AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3)– zadania przygotowawcze do egazminu

Ekstrema warunkowe

Typy zadań:

- *Wyznacz ekstremum funkcji na podrozmaitości.*
- *Rozstrzygnij czy funkcja na podrozmaitości ma ekstremum lokalne.*
- *Udowodnij nierówność.*

Co należy wiedzieć:

- *Znać metodę mnożników Lagrange'a (pamiętać o założeniach!).*
- *Znać twierdzenie Weierstrassa.*

Zadanie 1. Obliczyć supremum funkcji $f(x,y,z) = xyz$ na zbiorze

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 9, xy+yz+xz = 8\} .$$

Zadanie 2. Wyznacz punkt(y) zbioru

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, x^2-x+y^2 = 0, z \geq 0\}$$

o maksymalnej wartości sumy $x+z$.
Zadanie 3. W zbiorze $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2+3y^2+2xy+z^2 \leq 1\}$ znajdź punkt najbardziej odległy od $(0,0,0)$.
Zadanie 4. Niech $f(x,y,z) = xy - z$. Znaleźć maksimum i minimum funkcji f na zbiorach

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$,

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0, x^2+y^2+z^2 = 1\}$,

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Zadanie 5. Znajdź kres dolny i górny funkcji $f(x,y,z) = 10x+6z$ na zbiorze

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+4y^2+z^2 = 1, 3x^2+2y^2+2z^2 = 1\} .$$

Zadanie 6. Znajdź odległość pomiędzy gałęzią hiperboli $H = \{(x,y) \mid xy+x+y = 0 \text{ i } x > -1\}$ i prostą $L = \{(x,y) \mid x+2y+1 = 0\}$.
Zadanie 7. W zbiorze $C = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 3, xy+xz+yz = 0\}$ znajdź punkt(y) najbardziej oddalone/y od osi OZ lub wykaż, że taki punkt nie istnieje.
Zadanie 8. Niech $K = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = xyz = 4\}$. Wyznacz zbiór wszystkich wartości, przyjmowanych przez sumę $x+y+z$ na zbiorze K.
Zadanie 9. Udowodnij, że jeśli $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ i $\sum_{i=1}^n x_i = a$ to

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k \leq \frac{n-1}{2n} a^2 .$$

Zadanie 10. Rozważmy liczby $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ i $q > 1$. Znajdź maksimum funkcji $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i x_i a_i$ przy warunku $\sum_i (x_i)^q = 1$.
Zadanie 11. Wykaż, że dla dowolnych liczb $a, b, c, d \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\left(\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}\right)^{1/3} \leq \left(\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}\right)^{1/2} .$$

Zadanie 12. Dana jest liczba naturalna $n > 2$ oraz dodatnie liczby rzeczywiste a, b takie, że $a^2 < nb$. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi, spełniającymi warunki

$$x_1 + \ldots + x_n = a, \qquad (x_1)^2 + \ldots (x_n)^2 = b .$$

Dla ustalonych wartości n, a, b wyznacz maksymalną możliwą wartość różnicy między największą a najmniejszą z liczb $x_1, \ldots, x_n$.

Odpowiedzi i wskazówki:
Zadanie 1. $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}) = \frac{112}{27}$.
Zadanie 2. $f(\frac{3}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$.
Zadanie 3. Rozpatrzmy $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na zbiorze A. Jedyny punkt krytyczny to $(0, 0, 0)$ gdzie g ma minimum. Maksimum musi być przyjęte na brzegu $\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 + 2xy + z^2 = 1\}$. $f(0, 0, \pm 1) = 1$.
Zadanie 4. (a) $f(0, 0, -1) = 1$ i $f(0, 0, 1) = -1$;
(b) $f(\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}), \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}, \frac{1}{2})) = -\frac{3}{4}$ i $f(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{2}{3}}$;
(c) tak jak w poprzednim punkcie.
Zadanie 5. $f(\pm\frac{6}{\sqrt{183}}, \varepsilon\sqrt{\frac{73}{366}}, \pm\frac{1}{\sqrt{183}}) = \pm\sqrt{\frac{61}{3}}$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$.
Zadanie 6. $g(\sqrt{2} - 1, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1, \frac{3}{5}(\sqrt{2} - 1), -\frac{3}{10}\sqrt{2} - \frac{1}{5})^2 = \frac{4}{5}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ dla $g(x, y, t, s)^2 = (x - t)^2 + (y - s)^2$. To zadanie można też zrobić wyznaczając y jako funkcję x z równanie hiperboli i s jako funkcję t z równania prostej i rozwiązując standardowe zadanie na (niezwiązane) ekstremum funkcji dwóch zmiennych.
Zadanie 7. Wątpliwości powinna budzić zwartość zbioru C, gdyż żadne z równań nie opisuje zbioru zwartego. Wyznaczając $z = 3 - x - y$ z pierwszego równania i wstawiając do drugiego dostajemy $x^2 + y^2 = 3x + 3y - xy$. To równanie traktowane jako równanie kwadratowe na x ma rozwiązania tylkod dla x ze skończonego zakresu i podobnie dla y. Wobec tego zbiór jest ograniczony, a więc zwarty (bo domknięty). Dalej postępujemy standardowo maksymalizując funkcję $g(x, y)^2 = x^2 + y^2$ na C. $g(0, 3, 0) = g(3, 0, 0) = 3$.
Zadanie 8. $[f(\frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right), 2\left(7 - 3\sqrt{5}\right)), f(1, 1, 4)] = [17 - 5\sqrt{5}, 6]$
Zadanie 9. Rozważ funkcję $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j<k} x_i x_k$ przy warunku $\sum_i x_i = a$. Z uwagi na zwartość ekstrema muszą być przyjmowane w zbiorze $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Metoda mnożników Lagrange'a daje jeden punkt podejrzany $x_i = \frac{a}{n}$, zaś badanie f na brzegach $x_i = 0$ sprowadza się do rozwiązywania analogicznego zadania z $n \mapsto n - 1$.
Zadanie 10. Rozwiązaniem jest wersja nierówności Höldera.
Zadanie 11. Rozważ różnicę wyrażeń po obu stronach nierówności przy warunku $a + b + c + d = 1$. Obliczenia są dosyć długie.
Zadanie 12. Rozważ funkcję $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 - x_2$. Wynik: $\sqrt{2(b - \frac{a^2}{n})}$.

Elementy teorii miary

Typy zadań:

- *Oblicz miarę wybranego zbioru.*
- *Sprawdź, że dany zbiór jest borelowski/miary zero/mierzalny.*
- *Sprawdź, czy dana funkcja jest miarą (zewnętrzną).*

Co należy wiedzieć:

- *Znać definicję ciała i σ-ciała zbiorów.*
- *Znać definicję miary i miary zewnętrznej i związki miedzy nimi (tw. Cratheodory'ego).*
- *Znać definicję zbiorów mierzalnych w sensie Lebesque'a i ich charakteryzację.*
- *Znać podstawowe własności miary Lebesgue'a.*

Zadanie 1. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb z przedziału $[0,1]$ mających rozwinięcie dwójkowe w którym cyfra 0 nie występuje dwa razy pod rząd. Wykaż, że A jest zbiorem miary zero.

Zadanie 2. Wykaż, że zbiór

$$\{x = (0,0c_2 0c_4 0c_6 \dots)_2 \mid c_i \in \{0,1\}\}$$

jest mierzalny i obliczyć jego miarę.

Zadanie 3. Wykaż, że w każdym podzbiorze $A \subset \mathbb{R}^n$ dodatniej miary istnieje punkt o wszystkich współrzędnych niewymiernych.

Zadanie 4. Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych/mierzalnych. Wykaż, że zbiór

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \text{ jest ciągiem rosnącym}\}$$

jest zbiorem borelowskim/mierzalnym.

Zadanie 5. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem λ_1-mierzalnym. Wykaż, że

$$A \times A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in A\}$$

jest zbiorem λ_2-mierzalnym.

Zadanie 6. Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem domkniętym, a zbiór $A \subset P$ będzie domknięty. Udowodnij, że jeśli $\lambda(A) = \lambda(P)$, to $A = P$.

Zadanie 7. Niech $A \subset \mathbb{R}^k$ będzie zbiorem dodatniej miary Lebesgue'a. Wykaż, że dla każdego $0 < c < 1$ istnieje przedział k-wymiarowy P taki, że $\lambda^k(P) > 0$ oraz $\lambda^k(A \cap P) > c\lambda^k(P)$.

Zadanie 8. Wyznaczyć σ-ciało generowane przez rodzinę przedziałów $[n, n+1]$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 9. Wykaż, że rodzina zbiorów składająca się z przeliczalnych sum przedziałów postaci $(a,b] \subset \mathbb{R}$ i punktów $c \in \mathbb{R}$ jest ciałem podzbiorów $\mathbb{R}$. Wykaż, że σ-ciało generowane przez rodzinę przedziałów postaci $(a,b]$ to σ-ciało zbiorów borelowskich.

Zadanie 10. Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym podzbiorem. Zdefiniujmy dla $A \subset \mathbb{R}$

$$\mu_X(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } X \subset A, \\ 0 & \text{gdy } X \not\subset A. \end{cases}$$

Rozstrzygnij, czy μ_X jest miarą zewnętrzną?

Zadanie 11. Rozważmy punkty $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że $\delta := \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}$ jest miarą zewnętrzną i rozstrzygnij jak wygląda σ-ciało zbiorów δ-mierzalnych. Powyżwej δ_x oznacza *deltę Diraca*, tzn. $\delta_x(A) = 0$ gdy $x \notin A$ oraz $\delta_x(A) = 1$ gdy $x \in A$.

Zadanie 12. Dane jest σ-ciało $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru X oraz miara μ określona na $\mathcal{F}$. Dla $A \subset X$ definujemy $\mu^*(A) := \inf\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{F}, A \subset B\}$. Wykaż, że μ^* jest miarą zewnętrzną.

Zadanie 13. Podaj przykład niemierzalnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}$. Odpowiedź uzasadnij.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Rozważany zbiór jest zawarty w zbiorze liczb $x \in [0, 1]$ które nie mają cyfry 0 w rozwinięciu czwórkowymi. Jest to zbiór miary zero – patrz zadanie z ćwiczeń o braku 3 w rozwinięciu dziesiętnym.

Zadanie 2. Rozważany zbiór jest miary zero. Można go alternatywnie opisać jako zbiór tych liczb z przedziału $[0, 1]$, w których rozwinięciu czwórkowym nie występują cyfry 2 i 3.

Zadanie 3. Punkty o co najmniej jednej współrzędnej wymiernej tworzą zbiór miary zero.

Zadanie 4. Zbiór $A_k = \{x \in \mathbb{R} \mid f_{k+1}(x) > f_k(x)\}$ jest otwarty/mierzalny. Wobec $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mamy tezę.

Zadanie 5. Każdy zbiór λ_1-mierzalny możemy zapisać jako sumę zbioru typu F_σ i zbioru miary zero $A = F \cup N$, wobec tego $A \times A = F \times F \cup N \times F \cup F \times N \cup N \times N$. Pierwszy element tej sumy jest zbiorem typu F_σ w $\mathbb{R}^2$ (uzasadnienie jest bardzo proste), a pozostałe zbiory są zbiorami λ_2-miary zero (było takie zadanie na ćwiczeniach, że produkt zbioru miary zero i dowolnego innego jest miary zero). Korzystając z charakteryzacji zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a otrzymujemy tezę.

Zadanie 6. $\operatorname{int} P \setminus A$ jest zbiorem otwartym. Każdy niepusty zbiór otwarty ma dodatnią miarę.

Zadanie 7. Z wykładu wiemy, że dla dowolnego ε istnieje zbiór otwarty $U \supset A$ taki, że $\lambda^k(U \setminus A) < \epsilon$. Stąd łatwo wynika, że możemy zażądać, aby $\lambda^k(U \cap A) > c \cdot \lambda^k(U)$. Zapiszmy teraz U jako przeliczalną sumę przedziałów k-wymiarowych o przecięciach będących zbiorami miary zero (np. kostek diadycznych). Co najmniej jeden z tych przedziałów musi spełniać analogiczną nierówność.

Zadanie 8. Elementy tego σ-ciała to przeliczalne sumy punktów $\{n\}$ i przedziałów otwartych $(n, n+1)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 9. Sprawdzenie warunków bycia ciałem nie przedstawia specjalnych trudności. Aby wykazać, że rozważany zbiór generuje σ-ciało zbiorów borelowskich wystarczy pokazać, że: 1. Każdy przedział postaci (a, b) (baza standardowej topologii na $\mathbb{R}$) należy do σ-ciała generowanego przez przedziały postaci $(a, b]$ – stąd każdy zbiór borelowski należy do rozważanego σ-ciała oraz 2. Zbiory postaci $(a, b]$ są borelowskie – stąd rozważane σ-ciało zawiera się w σ-ciele zbiorów borelowskich. Jedyną trudność może stanowić punkt pierwszy. Zauważmy, że $(a, b) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a, b + \frac{1}{n}]$.

Zadanie 10. O ile X nie jest zbiorem jednopunktowym, δ_X nie jest miarą zewnętrzną, bo nie spełnia nawet warunku skończonej podaddytywności. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ takie, że $X \not\subset A$ i $X \not\subset B$ ale $X \subset A \cup B$. Wtedy $1 = \mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B) = 0$.

Zadanie 11. Funkcja δ jest nie tylko miarą zewnętrzną, ale też miarą na X (tak zwana miara licząca). Jej σ-ciało to 2^X.

Zadanie 12. Jedyną trudność stanowi sprawdzenie warunku podaddytwności. Rozważmy zbiory A_i, dowolne $\varepsilon > 0$ i wybierzmy zbiory $B_i \in \mathcal{F}$ tak aby $A_i \subset B_i$ oraz $\mu^*(A_i) \geq \mu(B_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$. Wówczas wobec $\bigcup_i A_i \subset \bigcup_i B_i \in \mathcal{F}$ mamy $\mu^*(\bigcup_i A_i) \leq \mu(\bigcup B_i) \leq \sum_i \mu(B_i) \leq \sum_i \mu(A_i) + \varepsilon$. Z dowolności ε mamy tezę.

Zadanie 13. Z wykładu znamy zbiór Vitali'ego, czyli zbiór warstw $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Całka Lebesgue'a

Typy zadań:

- *Zbadaj mierzalność/całkowalność danej funkcji.*
- *Oblicz całkę z danej funkcji.*
- *Oblicz miarę danego zbioru.*
- *Oblicz granicę ciągu całek.*

Co należy wiedzieć:

- *Znać definicję funkcji mierzalnej.*
- *Znać konstrukcję i podstawowe własności całki Lebesgue'a.*
- *Znać twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monontonicznej i zmajoryzowanej całek.*
- *Znać twierdzenie o zamianie zmiennych w całce.*
- *Znać twierdzenie Fubini'ego.*

Funkcje mierzalne

Zadanie 1. Niech $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi. Wykaż, że funkcja

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f_1(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x}) & \text{jeśli } f_3(\boldsymbol{x}) > f_4(\boldsymbol{x}) \\ |f_2(2\boldsymbol{x})| & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

jest mierzalna.
Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą. Wykaż, że f jest mierzalna.
Zadanie 3. Niech $A \subset [0,1]$ będzie zbiorem tych punktów przedziału jednostkowego, które nie mają żadnej trójki w rozwinięciu dziesiętnym, zaś niech $V \subset [0,1]$ będzie dowolnym zbiorem niemierzalnym (na przykład przecięciem przedziału jednostkowego ze zbiorem Vitali'ego). Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in A \cap V \\ x^3 & \text{dla } x \in [0,1] \setminus (A \cap V) \end{cases}$$

jest mierzalna? Odpowiedź uzasadnij.
Zadanie 4. Rozważmy funkcję $F : [0,1) \to [0,1)$ daną wzorem $F(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$. Wykaż, że jeśli $A \subset [0,1)$ jest zbiorem mierzalnym, to $F^{-1}(A)$ też jest mierzalny i ma tę samą miarę.
Zadanie 5. Każdy punkt z klasycznego zbioru Cantora C możemy jednoznacznie zapisać jako $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$, gdzie $c_i \in \{0,2\}$. Definiujemy funkcję $f : C \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^{i+1}} .$$

Wykaż, że f jest funkcją niemalejącą, ciągłą i że obrazem zbioru miary zero C jest cały odcinek $[0,1]$. Wykaż, że f przedłuża się do funkcji ciągłej $\widetilde{f} : [0,1] \to [0,1]$ o tych samych własnościach.

Powyższa funkcja to tak zwana funkcja Cantora-Lebesgue'a. Z konstrukcji wynika, że ciągły obraz zbioru miary zero nie musi być zbiorem miary zero.

Przejścia graniczne w całce

Zadanie 6. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1} e^{-2x}\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 7. Oblicz całkę

$$\int_0^1 \left(x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + x - 1\right)\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 8. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{e^{-n}}^1 \left(1+\frac{\ln x}{n}\right)^n x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 9. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ne^{-nx}\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 10. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2\pi n}^{2\pi n}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\exp(-2x^2)\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 11. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{x^2+y^2\le 1\}}\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^n+y^n)\mathrm{d}\lambda^2(x,y).$$

Zadanie 12. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{nx+x^5+1}\mathrm{d}x\ .$$

Całkowanie funkcji wielu zmiennych – twierdznie Fubini'ego i zamiana zmiennych

Zadanie 13. Oblicz miarę zbioru

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+z^2<1, y^2+z^2<1\}\ .$$

Zadanie 14. Oblicz całkę

$$\int_{\{0<y<2x\}}(1-x+y)e^{-x}\mathrm{d}\lambda^2(x,y)\ .$$

Zadanie 15. Niech $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<x<1, 0<x+y<1, 0<z<\frac{1}{x+y+1}\}$. Oblicz całkę

$$\int_A \frac{1}{(x+y+1)^2}\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z)\ .$$

Zadanie 16. Oblicz całkę

$$\int_{\{x>0,y>1,z>1\}} \frac{x}{1+(xyz)^4} \mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \ .$$

Zadanie 17. Oblicz miarę zbioru

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 \le 4(x^2-y^2)\} \ .$$

Zadanie 18. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1, y > 0\}$. Oblicz całkę

$$\int_A x\exp(-y^2)\mathrm{d}\lambda^2(x,y) \ .$$

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Zauważmy, że $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) > a\}$ jest sumą przecięć zbiorów $(\{\boldsymbol{x} \mid f_1(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x}) > a\} \cap \{\boldsymbol{x} \mid f_3(\boldsymbol{x}) > f_4(\boldsymbol{x})\})$ oraz $(\{\boldsymbol{x} \mid |f_2(2\boldsymbol{x})| > a\} \cap \{\boldsymbol{x} \mid f_3(\boldsymbol{x}) \le f_4(\boldsymbol{x})\})$, z których każdy jest zbiorem mierzalnym. Uzasadnienie, że $f_2(2\boldsymbol{x})$ jest mierzalne, gdy takie było f_2: skalowanie $\boldsymbol{x} \mapsto 2\boldsymbol{x}$ zachowuje zbiory mierzalne.

Zadanie 2. Łatwo sprawdzić, że przeciwobrazy zbioru postaci $(a,+\infty]$ są postaci $(b,+\infty)$ lub $[b,+\infty)$. Inny sposób: funkcja monotoniczna ma co najwyżej przeliczalną liczbę punktów nieciągłości, a więc jest ciągła poza zbiorem miary zero.

Zadanie 3. Łatwo sprawdzić, że przeciwobrazem A są jego dwie rozłączne kopie ściśnięte podwójnie.

Zadanie 4. Zbiór $A \cap V$ jest miary zero, a zatem funkcja f jest ciągła na $[0,1]$ poza zbiorem miary zero, stąd mierzalna (zadanie z ćwiczeń).

Zadanie 5. Zauważmy, że $f((0,c_1c_2c_3\ldots)_2) = ((0,\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\frac{c_3}{2}\ldots)_2)$ stąd monotoniczność, bo w dowolnym systemie pozycyjnym nierówność $x \le y$ wygląda tak samo. Ciągłość: jeśli $|x-y| < \frac{1}{3^{i-1}}$ to rozwinięcia x i y różnią się najwcześniej na i-tym miejscu i wówczas $|f(x)-f(y)| < \frac{1}{2^i}$. Epimorficzność: weźmy liczbę rzeczywistą $x = (0,d_1d_2d_3\ldots)_2$ z przedziału $[0,1]$ odpowiada jej punkt zbioru Cantora opisany liczbami $c_i = 2d_i$. Przedłużenie do $[0,1]$: na każdym z końców wyrzuconych przedziałów w konstrukcji zbioru Cantora f przyjmuje tę samą wartość. Definiujemy $\widetilde{f}$ jako funkcję stałą na wyrzucanym przedziale.

Zadanie 6. Korzystamy z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej: $f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)(1+\frac{x}{n})^{n+1}e^{-2x} < (1+x)e^x e^{-2x} = (1+x)e^{-x}$ – to jest funkcja całkowalna na $\mathbb{R}_+$. Granicą punktową jest e^{-x} stąd wynik to $\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

Zadanie 7. $\frac{1}{2}$. *Wskazówka*: oblicz tę całkę na przedziale $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ i uzasadnij (n.p. korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej), że dodawanie wkładów od wszystkich takich odcinków da wartość całki na przedziale $[0,1]$.

Zadanie 8. Ciąg funkcji $f_n(x) = \chi_{[e^{-n},1]}(x)\left(1+\frac{\ln x}{n}\right)^n x^{-\frac{3}{2}}$ jest zbieżny monotonicznie (dlaczego?) do $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$. $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2$.

Zadanie 9. Zamiana zmiennych $y = nx$ prowadzi do $\int_0^n e^{-y}\mathrm{d}y$. Używając tw. Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej dla $f_n(y) = \chi_{[0,n]}(y)e^{-y} \to e^{-y}$ dostajemy wartość granicy $\int_0^\infty e^{-y}\mathrm{d}y = 1$.

Zadanie 10. Korzystamy z twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Rozważmy

$$f_n(x) := \chi_{[-2\pi n, 2\pi n]}(x)\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\exp(-2x^2)$$

na prostej $\mathbb{R}$. Granicą punktową i jednocześnie ograniczeniem górnym tego ciągu jest $f(x) = \exp(-x^2)$. Jest to funkcja całkowalna i $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ – to jest standardowy przykład wykorzystania tw. Fubiniego – zob. skrypt Pawła Strzeleckiego, przykład 5.27.

Zadanie 11. Zauważmy, że w kole otwartym $\{x^2 + y^2 < 1\}$ zarówno x jak i y są mniejsze niż 1, wobec czego dla wszystkich punktów z tego koła (prawie wszystkich punktów z koła domkniętego) funkcje podcałkowe zbiegają do zera. Począwszy od drugiej funkcje podcałkowe można ograniczyć wspólnie przez $\ln(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}$, co jest ograniczone, a więc całkowalne na kole jednostkowym. Na mocy tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej szukaną granicą jest zero.

Zadanie 12. Zauważmy, że ciąg dodatnich funkcji $f_n(x) = \frac{n}{nx+x^5+1}$ jest rosnący i zbieżny punktowo do $\frac{1}{x}$. Na mocy tw. Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej granicą jest $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = +\infty$.

Zadanie 13.

$$\lambda^3(C) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\ .$$

Zadanie 14. Funkcja podcałkowa przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne, a zatem przed zastosowaniem tw. Fubini'ego powinniśmy upewnić się, że jest całkowalna. Zauważmy, że na rozpatrywanym zbiorze $|f(x,y)| \le (1+3x)e^{-x}$, która jest całkowalna (dlaczego?), zatem f też jest całkowalna

$$\int_{\{0<y<2x\}}(1-x+y)e^{-x}\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \int_0^\infty\left(\int_0^{2x}(1-x+y)e^{-x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty 2xe^{-x}\mathrm{d}x = 2\ .$$

Zadanie 15. Funkcja jest ciągła i dodatnia, więc możemy stosować twierdzenie Fubini'ego.

$$\int_A f = \int_0^1\int_{-x}^{1-x}\int_0^{\frac{1}{x+y+1}}\frac{1}{(x+y+1)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1\int_{-x}^{1-x}\frac{1}{(x+y+1)^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\ .$$

Zadanie 16. Funkcja podcałkowa jest ciągła dodatnia, więc możemy swobodnie stosować twierdzenie Fubini'ego.

$$\int_{\{x>0,y>1,z>1\}}\frac{x}{1+(xyz)^4}\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \int_1^\infty\int_1^\infty\int_0^\infty\frac{x}{1+(xyz)^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$\int_1^\infty\int_1^\infty\frac{1}{2y^2z^2}\operatorname{arctg}(x^2y^2z^2)\Big|_{x=0}^{x=\infty}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^\infty\int_1^\infty\frac{\pi}{4y^2z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}\ .$$

Zadanie 17. Najwygodniej zastosować podstawienie biegunowe $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. W tych zmiennych D jest opisany nierównością $r^2 \le 4\cos 2\phi$.

$$\lambda^2(D) = \int_{r^2\le 4\cos 2\phi} 1\cdot r\mathrm{d}\lambda^2(r,\phi) = \int_{\cos 2\phi\ge 0}\left(\frac{1}{2}r^2\Big|_{r=0}^{r^2=4\cos 2\phi}\right)\mathrm{d}\phi = 2\int_{\cos 2\phi\ge 0}\cos 2\phi\mathrm{d}\phi = 4\ .$$

Zadanie 18. Zauważmy, że funkcja podcałkowa $f(x,y) = x\exp[-y^2]$ jest nieujemna na zbiorze $A_+ := A \cap \{(x,t) \mid x \ge 0\}$, który jest zwarty po domknięciu. Z uwagi na ciągłość, f jest na tym zbiorze ograniczona, a zatem całka z jej części dodatniej $\int_A f_+ = \int_{A_+} f$ jest skończona. Do części ujemnej f możemy zastosować twierdzenie Fubini'ego. Ponieważ już wiemy że całka z części dodatniej jest skończona, jej dodanie nie wpłynie na całkowalność f na A. Możemy zatem policzyć całkę z całości f na A używając twierdzenia Fubini'ego:

$$\int_A f = \int_0^1\int_{-1-y}^{1-y} x\exp[-y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 2y\exp[-y^2]\mathrm{d}y = 1 - \frac{1}{e}\ .$$