XX Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne
Austria, 25–27 czerwca 1997

Zawody indywidualne, I dzień (25.06.1997)

1. Proste l_1 i l_2 przecinają się w punkcie P. Okręgi S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie P i prosta l_1 jest ich wspólną styczną w tym punkcie. Podobnie, okręgi T_1 i T_2 są styczne zewnętrznie w punkcie P i prosta l_2 jest ich wspólną styczną w tym punkcie. Okręgi S_1 i T_1 przecinają się w punktach P i A. Podobnie, okręgi S_1 i T_2 przecinają się w punktach P i B, okręgi S_2 i T_2 w punktach P i C oraz okręgi S_2 i T_1 w punktach P i D. Udowodnić, że punkty A, B, C i D leżą na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy proste l_1 i l_2 są prostopadłe.

2. Dana jest szachownica mająca m kolumn i n wierszy. Każde pole ma współrzędne (x,y), gdzie x jest numerem kolumny ($1 \le x \le m$), a y jest numerem wiersza ($1 \le y \le n$). Następnie niech p i q będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Pionek stojący na polu (x,y) może poruszyć się na pole (x',y') wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|x-x'| = p \qquad \text{i} \qquad |y-y'| = q.$$

Na każdym polu stoi jeden pionek. Chcemy jednocześnie wykonać ruch wszystkimi pionkami tak, aby znów na każdym polu stał tylko jeden pionek. Na ile sposobów można to zrobić?

3. Na tablicy napisano 97 liczb: 48, 24, 16, …, 48/97, tzn. liczby wymierne $48/k$ dla $k = 1, 2, \ldots, 97$. W każdym kroku wybieramy dowolnie dwie liczby a i b napisane na tablicy, wycieramy je i wpisujemy liczbę $2ab - a - b + 1$. Po 96 krokach na tablicy pozostanie dokładnie jedna liczba. Wyznaczyć zbiór liczb, które mogą pozostać na tablicy.

Zawody indywidualne, II dzień (26.06.1997)

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ boki AB i CD są równoległe. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Następnie, punkt F jest punktem przecięcia wysokości trójkąta EBC, a punkt G punktem przecięcia wysokości trójkąta EAD. Udowodnić, że środek odcinka GF leży na prostej przechodzącej przez punkt E i prostopadłej do AB.

5. Niech p_1, p_2, p_3, p_4 będą czterema różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnić, że nie istnieje wielomian trzeciego stopnia $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach całkowitych taki, że

$$|Q(p_1)| = |Q(p_2)| = |Q(p_3)| = |Q(p_4)| = 3.$$

6. Udowodnić, że nie istnieje funkcja $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ taka, że $f(x + f(y)) = f(x) - y$ dla wszystkich liczb całkowitych x, y.

Uwaga: $\mathbf{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych.

Zawody zespołowe (27.06.1997)

7. *a*) Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych p, q zachodzi nierówność

$$p^2 + q^2 + 1 > p \cdot (q + 1).$$

b) Wyznaczyć najwikszą liczbę rzeczywistą b taką, że dla wszystkich liczb rzeczywistych p, q zachodzi nierówność

$$p^2 + q^2 + 1 \ge b \cdot p \cdot (q + 1).$$

c) Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą c taką, że dla wszystkich liczb całkowitych p, q zachodzi nierówność

$$p^2 + q^2 + 1 \ge c \cdot p \cdot (q + 1).$$

8. Niech n będzie liczbą naturalną i niech M będzie zbiorem n-elementowym. Wyznaczyć największą liczbę naturalną k o następujęcej własności:

Istnieje k-elementowa rodzina K trójelementowych podzbiorów zbioru M taka, że każde dwa zbiory należące do K mają niepuste przecięcie.

9. Dany jest równoległościan P. Niech V_P bdzie jego objętością, S_P polem jego powierzchni, a L_P sumą długości jego krawędzi. Dla liczby rzeczywistej $t \ge 0$ niech P_t będzie bryłą złożoną ze wszystkich punktów X, których odległość od P jest nie większa od t. Udowodnić, że objętość bryły P_t wyraża się wzorem

$$V(P_t) = V_P + S_P \cdot t + \frac{\pi}{4} \cdot L_p \cdot t^2 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot t^3.$$

Wyjaśnienie: Odległość punktu X od równoległościanu P jest nie większa od t, jeśli istnieje punkt Y należący do równoległościanu taki, że $|XY| \le t$.