XXI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Przysiek (Polska), 29 czerwca – 1 lipca 1998

Zawody indywidualne, I dzień (29.06.1998)

1. Niech x_1, x_2, y_1, y_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Udowodnić nierówność

$$(x_1y_1 + x_2y_2 - 1)^2 \geq (x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1)\,.$$

2. Rozważamy n punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ położonych w tej kolejności na jednej linii prostej. Malujemy każdy z tych n punktów na jeden z następujących kolorów: biały, czerwony, zielony, niebieski, fioletowy. Kolorowanie nazwiemy *dopuszczalnym*, jeśli dla dowolnych dwóch kolejnych punktów P_i, P_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ oba są tego samego koloru lub co najmniej jeden z nich jest biały. Ile jest dopuszczalnych kolorowań?

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (x, y) spełniające następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2 - x^3 = y \\ 2 - y^3 = x\,. \end{cases}$$

Zawody indywidualne, II dzień (30.06.1998)

4. Niech m, n będą danymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt[k^2]{k^m} \right]$$

($[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x). Udowodnić, że

$$S_m(n) \leq n + m\cdot(\sqrt[4]{2^m} - 1)\,.$$

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich takich, że równanie $x^3 - 17x^2 + ax - b^2 = 0$ ma trzy pierwiastki całkowite (niekoniecznie różne).

6. Różne punkty A, B, C, D, E, F są położone na okręgu k w tej kolejności. Proste styczne do okręgu k w punktach A i D oraz proste BF i CE przecinają się w jednym punkcie P. Udowodnić, że proste AD, BC i EF są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

Zawody zespołowe (1.07.1998)

7. Rozważamy pary (a, b) liczb naturalnych takich, że iloczyn $a^a \cdot b^b$ w zapisie dziesiętnym kończy się dokładnie 98 zerami. Wyznaczyć parę (a, b) o tej własności, dla której iloczyn ab jest najmniejszy.

8. Niech $n > 2$ będzie daną liczbą naturalną. Rozważamy siatkę kwadratową na płaszczyźnie. W każdym kwadracie jednostkowym siatki wpisana jest liczba naturalna. Wielokąty o polu równym n, których boki są zawarte w prostych tworzących siatkę, nazwiemy wielokątami *dopuszczalnymi*. *Wartością* wielokąta dopuszczalnego nazwiemy sumę wszystkich liczb wpisanych w kwadraty zawarte w tym wielokącie. Udowodnić, że jeśli wartości dowolnych dwóch przystających wielokątów dopuszczalnych są równe, to wszystkie liczby wpisane w kwadraty siatki są równe.

Uwaga. Przypominamy, że obraz symetryczny Q wielokąta P jest wielokątem przystającym do P.

9. Niech K, L, M będą środkami boków BC, AC, AB trójkąta ABC. Punkty A, B, C dzielą okrąg opisany na trójkącie ABC na trzy łuki: AB, BC, CA. Niech X będzie takim punktem łuku BC, że $BX = XC$. Analogicznie, niech Y będzie takim punktem łuku AC, że $AY = YC$, zaś Z takim punktem łuku AB, że $AZ = ZB$. Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że $r + KX + LY + MZ = 2R$.