XXII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Zadanie **1.** Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech $M = \{1, ..., n\}$. Wyznacz liczbę uporządkowanych szóstek zbiorów $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ spełniających następujące dwa warunki:
(a) zbiory $A_1, ..., A_6$ są (niekoniecznie różnymi) podzbiorami zbioru M;
(b) każdy element zbioru M albo nie należy do żadnego, albo należy do dokładnie trzech, albo należy do wszystkich sześciu zbiorów spośród $A_1, ..., A_6$.

Zadanie **2.** Wyznacz największą liczbę rzeczywistą C_1 i najmniejszą liczbę rzeczywistą C_2 takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzą następujące nierówności

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2$$

Zadanie **3.** Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Wyznacz wszystkie układy n funkcji $(f_1, ..., f_n)$, gdzie $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla każdego $i = 1, ..., n$, takie że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełnione są następujące równania:
$f_1(x) - f_2(x)f_2(y) + f_1(y) = 0$
$f_2(x^2) - f_3(x)f_3(y) + f_2(y^2) = 0$
...
$f_k(x^k) - f_{k+1}(x)f_{k+1}(y) + f_k(y^k) = 0$
...
$f_n(x^n) - f_1(x)f_1(y) + f_n(y^n) = 0.$

Zadanie **4.** Dany jest trójkąt ABC. Przez punkt P leżący wewnątrz trójkąta ABC prowadzimy trzy proste k, l, m w taki sposób, że:
(a) prosta k przecina proste AB i AC odpowiednio w punktach A_1 i A_2 $(A_1 \neq A_2)$ takich, że $PA_1 = PA_2$;
(b) analogicznie prosta l przecina proste BC i BA odpowiednio w punktach B_1 i B_2 $(B_1 \neq B_2)$ takich, że $PB_1 = PB_2$;
(c) analogicznie prosta m przecina proste CA i CB odpowiednio w punktach C_1 i C_2 $(C_1 \neq C_2)$ takich, że $PC_1 = PC_2$.
Udowodnij, że proste k, l, m są przez te warunki wyznaczone jednoznacznie. Wyznacz punkt P (i udowodnij, że jest tylko jeden taki punkt), dla którego trójkąty AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 mają równe pola.

Zadanie **5.** Ciąg liczb całkowitych (a_n) spełnia następującą zależność rekurencyjną:

$$a_{n+1} = a_n^3 + 1999$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnij, że istnieje co najwyżej jedna wartość n, dla której a_n jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie **6.** Rozwiąż następujący układ równań
$x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^4 = 1 \qquad (n = 1, 2, ..., 1999)$
$x_0 = x_{1999}$
w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych.

Zadanie **7.** Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych dodatnich takie, że

$$x^{x+y} = y^{y-x} \ .$$

Zadanie **8.** Dana jest prosta g i punkty P, Q, S leżące po tej samej stronie tej prostej. Punkty M i N leżą na prostej g, przy czym $PM \perp g$ i $QN \perp g$. Punkt S leży między prostymi PM i QN. Ponadto $PM = PS$ i $QN = QS$. Symetralne odcinków SM i SN przecinają się w punkcie R. Prosta RS przecina okrąg opisany na trójkącie PQR w punkcie T różnym od R. Udowodnij, że punkt S jest środkiem odcinka RT.

Zadanie **9.** Punktem kratowym nazywamy punkt płaszczyzny mający obie współrzędne całkowite. Rozważamy następującą grę jednoosobową. Pozycja w grze składa się ze skończonego zbioru zaznaczonych punktów kratowych i ze skończonego zbioru odcinków spełniających następujące warunki:
(a) końce każdego zaznaczonego odcinka są zaznaczonymi punktami kratowymi;
(b) każdy zaznaczony odcinek jest równoległy do jednej osi układu współrzędnych lub do jednej z dwóch prostych o równaniach $y = x$, $y = -x$;
(c) każdy zaznaczony odcinek zawiera dokładnie 5 punktów kratowych i każdy z tych punktów jest zaznaczony;
(d) dowolne dwa zaznaczone odcinki mają co najwyżej jeden punkt wspólny.
Ruch w grze polega na zaznaczeniu nowego punktu kratowego, a następnie zaznaczeniu odcinka w taki sposób, by powstała nowa pozycja w grze.
Rozstrzygnij, czy istnieje pozycja początkowa w grze, taka że możliwe jest wykonanie nieskończonego ciągu ruchów.