Zadania z XXIII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych

Baranów Sandomierski, 28-30 czerwca 2000 r.

1. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, dla których istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że dla nieskończenie wielu wartości x zachodzi równość:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \left[\frac{k}{2}\right] P(x+k) = 0\,.$$

2. W sześcianie o krawędzi długości 1, $ABCD$ jest pewną ścianą, a CG krawędzią do niej prostopadłą. Okrąg o_1 jest wpisany w kwadrat $ABCD$, a okrąg o_2 jest opisany na trójkącie BDG. Wyznaczyć najmniejszą wartość odległości XY dla $X \in o_1$ i $Y \in o_2$.

3. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozwiązać w liczbach rzeczywistych następujący układ równań:

$$\begin{cases} x_1^3 = x_2 + x_3 + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k^3 = x_{k+1} + x_{k+2} + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}^3 = x_n + x_1 + 1 \\ x_n^3 = x_1 + x_2 + 1 \end{cases}$$

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie N, nie mające dzielników pierwszych różnych od 2 i 5, takie, że $N+25$ jest kwadratem liczby całkowitej.

5. Dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 5$ możliwe jest pokolorowanie wierzchołków n-kąta foremnego nie więcej niż sześcioma kolorami, w ten sposób, aby w każdej grupie pięciu kolejnych wierzchołków wystąpiło pięć różnych kolorów?

6. Rozważmy bryłę Q postaci $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup Q_5 \cup Q_6$, gdzie Q_i $(i = 0,1,2,\ldots,6)$ są siedmioma różnymi sześcianami o krawędziach długości 1, przy czym sześcian Q_0 ma wspólną ścianę z każdym z sześciu pozostałych. Rozstrzygnąć, czy można wypełnić przestrzeń nieskończoną ilością brył, z których każda powstaje przez przesunięcie równoległe bryły Q, a żadne dwie nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.

7. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt $A_0B_0C_0$. Rozważamy trójkąty ABC spełniające następujące warunki:

(i) proste AB, BC, CA przechodzą, odpowiednio, przez punkty C_0, A_0, B_0;

(ii) trójkąty ABC i $A_0B_0C_0$ są podobne (tzn. istnieje podobieństwo przekształcające A na A_0, B na B_0 i C na C_0).

Wyznaczyć miejsce geometryczne środków okręgów opisanych na wszystkich takich trójkątach ABC.

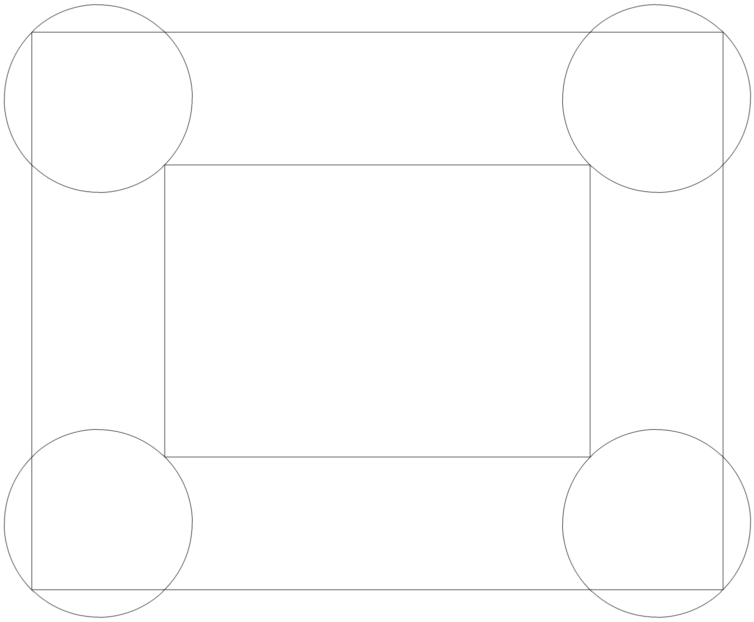
8. Na płaszczyźnie danych jest 27 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Cztery spośród tych punktów są wierzchołkami kwadratu o boku długości 1, a pozostałe 23 leżą wewnątrz tego kwadratu. Udowodnić, że pewne trzy spośród danych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż $\frac{1}{48}$.

9. Udowodnić, że jeśli a, b, c są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, przy czym $a+b+c=1$, to mają miejsce nierówności:

$$2 \leqslant \left(1-a^2\right)^2 + \left(1-b^2\right)^2 + \left(1-c^2\right)^2 \leqslant (1+a)(1+b)(1+c)\,.$$

Dla każdej z tych nierówności rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

10. Plan zamku w Baranowie Sandomierskim można w przybliżeniu przedstawić jako graf o 16 węzłach, narysowany poniżej:



Nocny strażnik planuje zamkniętą trasę obchodu wzdłuż krawędzi tego grafu.

(a) Ile istnieje takich tras (bez uwzględniania kierunku), które przechodzą przez każdy węzeł dokładnie raz?

(b) Ile istnieje takich tras (z uwzględnieniem kierunku), które przechodzą przez każdą krawędź dokładnie raz i nie krzyżują się same ze sobą?