

XL Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie zbiory skończone S na płaszczyźnie, złożone z co najmniej trzech punktów i spełniające następujący warunek:
dla każdych dwóch różnych punktów A i B zbioru S , symetralna odcinka AB jest osią symetrii zbioru S .

Zadanie 2. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n \geq 2$.

(a) Wyznaczyć najmniejszą stałą C taką, że nierówność

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

(b) Dla tej stałej C , ustalić, kiedy zachodzi równość.

Zadanie 3. Rozważmy planszę kwadratową $n \times n$, gdzie n jest daną dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Plansza jest podzielona na n^2 kwadratów jednostkowych. Dwa różne kwadraty planszy są *przyległe*, gdy mają wspólny bok. N kwadratów planszy zostało wyróżnionych w taki sposób, by każdy kwadrat planszy (wyróżniony lub nie) był przyległy do co najmniej jednego kwadratu wyróżnionego.

Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość N .

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie pary (n, p) liczb całkowitych dodatnich takie, że:
 p jest liczbą pierwszą,

$$n \leq 2p,$$

$$(p-1)^n + 1 \text{ dzieli się przez } n^{p-1}.$$

Zadanie 5. Okręgi Γ_1 i Γ_2 są położone wewnątrz okręgu Γ i są odpowiednio styczne do Γ w różnych punktach M i N . Okrąg Γ_1 przechodzi przez środek okręgu Γ_2 . Prosta przechodząca przez punkty przecięcia okręgów Γ_1 i Γ_2 przecina okrąg Γ w punktach A i B . Proste MA i MB przecinają Γ_1 odpowiednio w punktach C i D .

Udowodnić, że prosta CD jest styczna do okręgu Γ_2 .

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.