Zadania z XLI Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

Taejon (Korea Południowa), 19 i 20 lipca 2000 r.

1. Dwa okręgi Γ_1 i Γ_2 przecinają się w punktach M i N. Niech l będzie taką wspólną prostą styczną do Γ_1 i Γ_2, że punkt M znajduje się bliżej prostej l niż punkt N. Prosta l jest styczna do Γ_1 w punkcie A oraz do Γ_2 w punkcie B. Prosta równoległa do l przechodząca przez M przecina Γ_1 ponownie w punkcie C oraz Γ_2 ponownie w punkcie D. Proste CA i DB przecinają się w punkcie E; proste AN i CD przecinają się w punkcie P; proste BN i CD przecinają się w punkcie Q. Wykazać, że $EP = EQ$.

2. Niech a, b, c będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1\,.$$

3. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Na danej poziomej prostej znajduje się n pcheł, nie wszystkie w tym samym punkcie. Dla liczby rzeczywistej dodatniej λ definiujemy *ruch* następująco:

(i) wybieramy dwie pchły, w punktach A i B, przy czym A znajduje się na lewo od B;

(ii) pchła z punktu A skacze na punkt C, znajdujący się na danej prostej na prawo od B i taki, że $BC/AB = \lambda$.

Wyznaczyć wszystkie takie wartości λ, że dla dowolnego punktu M na prostej i dowolnego początkowego położenia n pcheł istnieje skończony ciąg ruchów, który przeprowadza wszystkie pchły na prawo od M.

4. Iluzjonista ma sto kart ponumerowanych od 1 do 100. Wkłada je do trzech pudełek, czerwonego, białego i niebieskiego tak, że każde z nich zawiera przynajmniej jedną kartę. Ktoś z widzów wybiera dwa z tych trzech pudełek, wyciąga po jednej karcie z każdego z wybranych pudełek i podaje sumę liczb na wyciągniętych kartach. Mając daną tę sumę, iluzjonista wskazuje to pudełko, z którego nie została wyciągnięta żadna karta.

Na ile sposobów można włożyć wszystkie karty do pudełek tak, by ta sztuka zawsze się udała? (Dwa sposoby uważa się za różne, gdy przynajmniej jedna karta znajdzie się za każdym razem w innym pudełku.)

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że

(i) n jest podzielna przez dokładnie 2000 różnych liczb pierwszych oraz

(ii) liczba $2^n + 1$ jest podzielna przez n.

6. Niech AH_1, BH_2, CH_3 będą wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do BC, CA, AB odpowiednio w punktach T_1, T_2, T_3. Niech proste l_1, l_2, l_3 będą symetrycznymi obrazami prostych H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 odpowiednio względem prostych T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2. Udowodnić, że proste l_1, l_2, l_3 wyznaczają trójkąt, którego wierzchołki leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.