

IX Drużynowe Zawody Matematyczne “Baltic Way '98”

Warszawa, 8 listopada 1998

Version: **Polish**

Czas trwania: $4\frac{1}{2}$ godziny.

1. Znaleźć wszystkie funkcje dwóch zmiennych f , których argumenty x, y i wartości $f(x, y)$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, spełniające następujące warunki (dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x i y):

$$\begin{aligned}f(x, x) &= x, \\f(x, y) &= f(y, x), \\(x + y)f(x, y) &= yf(x, x + y).\end{aligned}$$

2. Trójkę liczb całkowitych dodatnich (a, b, c) nazywamy *quasi-pitagorejską*, jeśli istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c , w którym miara kąta naprzeciwko boku c wynosi 120° . Udowodnić, że jeśli (a, b, c) jest trójką quasi-pitagorejską, to c ma dzielnik pierwszy większy od 5.

3. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y , które spełniają równanie

$$2x^2 + 5y^2 = 11(xy - 11).$$

4. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że dla $n = 1, 2, \dots, 1998$ wartości $P(n)$ są liczbami naturalnymi trzycyfrowymi. Udowodnić, że wielomian P nie ma pierwiastków całkowitych.

5. Niech a będzie cyfrą nieparzystą, zaś b cyfrą parzystą. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje liczba całkowita dodatnia, podzielna przez 2^n , w której zapisie dziesiętnym nie występują cyfry inne niż a i b .

6. Niech P będzie wielomianem stopnia 6 oraz niech a, b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 < a < b$. Załóżmy, że $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$, $P'(0) = 0$. Udowodnić, że $P(x) = P(-x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x .

7. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x) + f(y) = f(f(x)f(y))$.

8. Niech $P_k(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej dodatniej n .

9. Liczby α, β spełniają $0 < \alpha < \beta < \pi/2$. Niech γ, δ będą liczbami określonymi przez warunki:

- (i) $0 < \gamma < \pi/2$ oraz liczba $\operatorname{tg} \gamma$ jest średnią arytmetyczną liczb $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \beta$;
(ii) $0 < \delta < \pi/2$ oraz liczba $\frac{1}{\cos \delta}$ jest średnią arytmetyczną liczb $\frac{1}{\cos \alpha}$ i $\frac{1}{\cos \beta}$.

Udowodnić, że $\gamma < \delta$.

10. Niech $n \geq 4$ będzie parzystą liczbą całkowitą. W okrąg o promieniu 1 wpisane są n -kąt foremny i $(n-1)$ -kąt foremny. Dla każdego wierzchołka n -kąta rozważmy odległość od tego wierzchołka do najbliższego wierzchołka $(n-1)$ -kąta, mierzona po obwodzie okręgu. Niech S będzie sumą tych n odległości. Udowodnić, że S nie zależy od wzajemnego położenia tych dwóch wielokątów.

11. Niech a, b, c będą długościami boków pewnego trójkąta, zaś R — promieniem okręgu opisanego na nim. Udowodnić, że

$$R \geq \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}.$$

Kiedy zachodzi równość?

12. W trójkącie ABC zachodzi $\angle BAC = 90^\circ$. Punkt D leży na boku BC i $\angle BDA = 2\angle BAD$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD} \right).$$

13. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $\angle ADE = \angle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P . Dowieść, że $\angle EAD = \angle BDP$ i $\angle CBD = \angle ADP$.

14. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB < AC$. Prosta przechodząca przez B i równoległa do AC przecina dwusieczną kąta zewnętrznego $\angle BAC$ w punkcie D . Prosta przechodząca przez C i równoległa do AB przecina tę dwusieczną w punkcie E . Punkt F leży na boku AC i spełniona jest równość $FC = AB$. Udowodnić, że $DF = FE$.

15. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na bok BC . Punkt E leży na odcinku AD i spełnione jest równanie

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Punkt F jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D na bok BE . Udowodnić, że $\angle AFC = 90^\circ$.

16. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 czterdziestoma dwoma klocekami o wymiarach 4×1 w taki sposób, że tylko środkowe pole szachownicy pozostanie nie zakryte? (Zakładamy, że każdy klocek zakrywa cztery pełne pola szachownicy.)

17. Niech n i k będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Danych jest nk przedmiotów (tych samych rozmiarów) i k pudełek, z których każde pomieści n przedmiotów. Każdy przedmiot jest pokolorowany jednym z k różnych kolorów. Wykazać, że można rozmieścić te przedmioty w pudełkach w taki sposób, że w każdym pudełku znajdują się przedmioty w co najwyżej dwóch kolorach.

18. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których istnieje zbiór S o następujących własnościach:

- (i) S składa się z n liczb całkowitych dodatnich, z których wszystkie są mniejsze od 2^{n-1} ;
- (ii) dla dowolnych dwóch różnych niepustych podzbiorów A i B zbioru S suma elementów zbioru A jest różna od sumy elementów zbioru B .

19. Rozważmy mecz ping-ponga między dwiema drużynami, z których każda składa się z 1000 graczy. Każdy gracz grał przeciwko każdemu z graczy przeciwnej drużyny dokładnie raz (w ping-pongu nie ma remisów). Udowodnić, że istnieje dziesięciu graczy z jednej drużyny, takich że każdy z graczy drużyny przeciwnej przegrał z co najmniej jednym z tych dziesięciu graczy.

20. Powiemy, że liczba całkowita dodatnia m pokrywa liczbę 1998, jeśli 1, 9, 9, 8 pojawiają się w tej właśnie kolejności jako cyfry m . (Na przykład 1998 jest pokrywana przez 215993698, ale nie przez 213326798.) Niech $k(n)$ oznacza liczbę tych liczb całkowitych dodatnich, które pokrywają 1998 i mają dokładnie n cyfr ($n \geq 5$), z których wszystkie są różne od 0. Jaką resztę z dzielenia przez 8 daje $k(n)$?