Zadania na Zawody Zespołowe Baltic Way 1997

Kopenhaga, 9 listopada 1997 r. godz. 10.00

$4\frac{1}{2}$ godziny. 5 punktów za zadanie.

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje f ze zbioru liczb rzeczywistych do zbioru liczb rzeczywistych, różne od funkcji zerowej takie, że $f(x)f(y) = f(x-y)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y.

2. Dany jest ciąg $a_1, a_2, a_3, \dots$ liczb całkowitych dodatnich, w którym każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie raz. Dowieść, że istnieją liczby całkowite ℓ i m, $1 < \ell < m$ takie, że $a_1 + a_m = 2a_\ell$.

3. Niech $x_1 = 1$ oraz $x_{n+1} = x_n + \left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + 2$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Wyznaczyć x_{1997}.

4. Dowieść, że dla średniej arytmetycznej a liczb $x_1, \dots, x_n$ spełniona jest nierówność

$$(x_1 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2 \leqslant \frac{1}{2}(|x_1 - a| + \dots + |x_n - a|)^2 .$$

5. W ciągu $u_0, u_1, \dots$ liczb całkowitych dodatnich u_0 jest dowolne. Dla każdej liczby całkowitej n,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_n & \text{dla parzystych } u_n , \\ a + u_n & \text{dla nieparzystych } u_n , \end{cases}$$

gdzie a jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią nieparzystą. Dowieść, że ciąg ten od pewnego miejsca jest okresowy.

6. Znaleźć wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych nieujemnych takich, że $a \geqslant b \geqslant c$ oraz

$$1{\cdot}a^3 + 9{\cdot}b^2 + 9{\cdot}c + 7 = 1997.$$

7. Niech P i Q będą wielomianami o współczynnikach całkowitych. Przypuśćmy, że liczby całkowite a i $a + 1997$ są pierwiastkami P oraz $Q(1998) = 2000$. Dowieść, że równanie $Q(P(x)) = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

8. Gdy dodajemy liczby 1996 i 1997, to najpierw dodajemy cyfry jedności 6 i 7. Otrzymujemy 13, zapisujemy 3 i „przenosimy” 1 do następnej kolumny. W ten sposób wykonujemy *przeniesienie*. Kontynuując, wykonamy łącznie trzy przeniesienia:

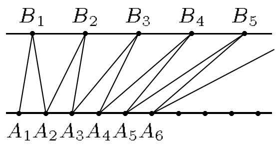
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 1\,9\,9\,6 \\ +\ 1\,9\,9\,7 \\ \hline 3\,9\,9\,3 \end{array}$$

Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia k, że przy dodawaniu $1996{\cdot}k$ do $1997{\cdot}k$ nie będzie ani jednego przeniesienia?

9. Na Sferze Światów światy są ponumerowane $1, 2, 3, \dots$ i połączone tak, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, czarodziej Gandalf może poruszać się w obu kierunkach pomiędzy światami o numerach n, $2n$ i $3n + 1$. Czy zaczynając od dowolnego świata Gandalf może dotrzeć do każdego innego świata?

10. Dowieść, że w dowolnym ciągu 79 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, zapisanych w systemie dziesiętnym, istnieje liczba całkowita dodatnia, której suma cyfr jest podzielna przez 13.

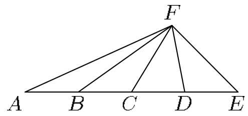
11. Na dwóch równoległych prostych, wybrano odpowiednio różne punkty A_1, A_2, A_3, $\dots$ oraz B_1, B_2, B_3, $\dots$ w ten sposób, że $|A_iA_{i+1}| = 1$ i $|B_iB_{i+1}| = 2$ dla $i = 1, 2, \dots$ (patrz rysunek). Wiedząc, że $\angle A_1A_2B_1 = \alpha$, obliczyć wartość nieskończonej sumy



$$\angle A_1B_1A_2 + \angle A_2B_2A_3 + \angle A_3B_3A_4 + \cdots .$$

12. Dwa okręgi $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ przecinają się w punktach P i Q. Prosta przechodząca przez P przecina ponownie $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ odpowiednio w punktach A i B. Punkt X jest środkiem odcinka AB. Prosta przechodząca przez Q i X przecina ponownie $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ odpowiednio w punktach Y i Z. Udowodnić, że X jest środkiem odcinka YZ.

13. Pięć różnych punktów A, B, C, D i E leży na prostej, przy czym $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Punkt F nie leży na tej prostej. Punkt G jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADF, zaś H jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BEF. Dowieść, że proste GH i FC są prostopadłe.



14. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC|^2$ jest średnią arytmetyczną liczb $|BC|^2$ i $|AB|^2$. Udowodnić, że $\operatorname{ctg}^2 B \geqslant \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} C$.

15. W trójkącie ostrokątnym ABC, dwusieczne kątów $\angle A$, $\angle B$ i $\angle C$ przecinają okrąg opisany odpowiednio w punktach A_1, B_1 i C_1. Niech M będzie punktem przecięcia prostych AB i B_1C_1, a N punktem przecięcia prostych BC i A_1B_1. Dowieść, że MN przechodzi przez środek okręgu wpisanego w $\triangle ABC$.

16. Dwaj gracze grają na szachownicy 5×5 w następującą grę. Pierwszy gracz stawia skoczka na wybranym polu. Następnie gracze naprzemian (zaczynając od gracza drugiego) przesuwają skoczka według reguł szachowych. Nie wolno przesunąć skoczka na pole, na którym już był. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Który z dwóch graczy ma strategię wygrywającą?

17. Prostokąt można podzielić na n równych kwadratów. Ten sam prostokąt można również podzielić na $n + 76$ równych kwadratów. Wyznaczyć n.

18. (i) Udowodnić, że istnieją dwa nieskończone zbiory liczb całkowitych nieujemnych A i B, niekoniecznie rozłączne takie, że każdą liczbę całkowitą nieujemną n można jednoznacznie przedstawić w postaci $n = a + b$, gdzie $a \in A$, $b \in B$.
(ii) Udowodnić, że dla każdej takiej pary (A, B), zbiór A lub B zawiera tylko wielokrotności pewnej liczby całkowitej $k > 1$.

19. W puszczy każde z n zwierząt ($n \geqslant 3$) mieszka w swojej grocie. Przed wyborami Króla Puszczy niektóre zwierzęta organizują kampanię wyborczą. Każde zwierzę organizujące kampanię odwiedza każdą z pozostałych grot dokładnie raz. Porusza się przy tym tylko po ścieżkach prowadzących od groty do groty, nie przechodzi przy tym z jednej ścieżki na inną pomiędzy grotami i wraca do swojej własnej groty na końcu kampanii. Przez żadną ścieżkę łączącą dwie groty nie przechodzi więcej niż jedno zwierzę organizujące kampanię.

a) Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej n, maksymalna możliwa liczba zwierząt organizujących kampanię równa się $\frac{n-1}{2}$;

b) Wyznaczyć maksymalną liczbę zwierząt organizujących kampanię dla $n = 9$.

20. W rzędzie leży dwanaście kart. Karty są trzech rodzajów: mają obie strony białe, obie strony czarne lub jedną białą i jedną czarną stronę. Początkowo dziewięć z tych kart leży czarną stroną do góry. Następnie odwracamy karty 1–6, po czym cztery karty leżą czarną stroną do góry. Potem odwracamy karty 4–9, w rezultacie czego sześć kart leży czarną stroną do góry. W końcu odwracamy karty 1–3 i 10–12, po czym pięć kart leży czarną stroną do góry. Ile jest kart każdego rodzaju?