X Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

Reykjavik, 6 listopada 1999

1. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające układ równań:

$$\begin{cases} abc+ab+bc+ca+a+b+c=1 \\ bcd+bc+cd+db+b+c+d=9 \\ cda+cd+da+ac+c+d+a=9 \\ dab+da+ab+bd+d+a+b=9 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że pierwiastek trzeciego stopnia z n powstaje przez odrzucenie trzech ostatnich cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby n.

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geq 3$, że nierówność

$$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1 \leq 0$$

zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniających równość $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$.

4. Dla liczb rzeczywistych dodatnich x, y określamy

$$f(x,y)=\min\left(x, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Udowodnić, że istnieją takie liczby x_0, y_0, że $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ dla wszystkich liczb dodatnich x, y. Wyznaczyć $f(x_0,y_0)$.

5. Styczna w punkcie o współrzędnych (a,b) do okręgu $x^2+y^2=1$ ma z parabolą $y=x^2+1$ dokładnie jeden punkt wspólny. Wyznaczyć wszystkie punkty (a,b) o powyższej własności.

6. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, którą potrzebuje skoczek szachowy, aby przejść z jednego narożnika szachownicy $n \times n$ (gdzie $n \geq 4$) do narożnika przeciwległego ?

7. Dwa różne pola szachownicy 8×8 nazwiemy *sąsiadującymi*, jeżeli mają wspólny bok lub wspólny wierzchołek. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, aby król szachowy zaczynając od pewnego pola szachownicy 8×8 odwiedził wszystkie pola dokładnie raz według następującej reguły: W każdym etapie podróży (licząc od trzeciego odwiedzonego pola) król stoi na polu sąsiadującym z parzystą liczbą pól, które już odwiedził.

8. Mamy do dyspozycji 1999 monet, z których każde dwie mają różny ciężar. Dysponujemy urządzeniem, które pozwala spośród dowolnych trzech monet wskazać tę, której ciężar zawiera się pomiędzy ciężarami dwóch pozostałych. Dowieść, że moneta tysięczna pod względem ciężaru może być wyznaczona przez nasze urządzenie stosowane nie więcej niż 1 000 000 razy. Udowodnić, że za pomocą tego urządzenia miejsce w ciągu ciężarów można wyznaczyć tylko dla tej monety.

9. Sześcian o krawędzi 3 podzielono na 27 sześcianów jednostkowych, które ponumerowano w sposób dowolny liczbami $1, 2, \ldots, 27$. Tworzymy 27 możliwych sum w poszczególnych rzędach (jest dziewięć takich sum w każdym z trzech kierunków równoległych do krawędzi sześcianu, każda suma o trzech składnikach). Co najwyżej ile spośród tych 27 sum może być liczbą nieparzystą ?

10. Czy można koło o promieniu 1 (łącznie z brzegiem) rozdzielić na trzy takie podzbiory, że żaden z nich nie zawiera dwóch punktów odległych o 1 ?

11. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnić, że istnieje taki okrąg przechodzący przez trzy z tych punktów, że czwarty punkt leży na okręgu lub w jego wnętrzu.

12. W trójkącie ABC zachodzi równość $2AB = AC + BC$. Udowodnić, że następujące cztery punkty: środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, środek okręgu opisanego oraz środki boków AC i BC, leżą na jednym okręgu.

13. W trójkącie ABC dwusieczne kątów A i B przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Ponadto $AE + BD = AB$. Wyznaczyć miarę kąta C.

14. W trójkącie równoramiennym ABC równe są boki AB i AC. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC. Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do AC przecina prostą DE w punkcie F. Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{AD}{AE},$$

gdzie $[PQRS]$ oznacza pole czworokąta $PQRS$.

15. W trójkącie ABC zachodzi $\angle C = 60^\circ$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC i spełnia $BD = AC$. Bok AC przedłużono do punktu E tak, aby $AC = CE$. Udowodnić, że $AB = DE$.

16. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, którą można przedstawić w postaci $k = 19^n - 5^m$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n.

17. Czy istnieje taki skończony ciąg liczb całkowitych $c_1, c_2, \ldots, c_n$, że każda z liczb $a + c_1$, $a + c_2$, $\ldots$, $a + c_n$ jest pierwsza dla więcej niż jednej, ale tylko dla skończenie wielu różnych liczb całkowitych a ?

18. Liczba całkowita dodatnia m daje z dzielenia przez 4 resztę 2. Dowieść, że istnieje co najwyżej jeden rozkład $m = ab$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi

$$0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m+1}}.$$

19. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich parzystych k, że dla każdej liczby pierwszej p liczba $p^2 + k$ jest złożona.

20. Liczby a, b, c, d są pierwsze oraz spełniają warunki $a > 3b > 6c > 12d$, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażenia

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$