Zadania z XI Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich
Oslo (Norwegia), 4 listopada 2000 r.

1. Niech K będzie punktem leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Niech M i N będą takimi punktami, że M i K leżą po przeciwnych stronach prostej AB, oraz N i K leżą po przeciwnych stronach prostej BC. Załóżmy, że $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \sphericalangle NBC = \sphericalangle NCB = \sphericalangle KAC = \sphericalangle KCA$. Udowodnić, że $MBNK$ jest równoległobokiem.

2. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o kącie $\sphericalangle A = 90°$. Niech M będzie środkiem boku AB. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej CM przecina bok BC w punkcie P. Dowieść, że

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMP.$$

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A = 90°$ oraz $AB \neq AC$. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, w taki sposób, że $AFDE$ jest kwadratem. Wykazać, że prosta BC, prosta FE oraz styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecinają się w jednym punkcie.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A = 120°$. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC. Niech BKP i CLQ będą trójkątami równobocznymi zbudowanymi na zewnątrz trójkąta ABC. Udowodnić, że $PQ \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + AC)$.

5. Niech ABC będzie takim trójkątem, że

$$\frac{BC}{AB - BC} = \frac{AB + BC}{AC}.$$

Wyznaczyć iloraz $\sphericalangle A : \sphericalangle C$.

6. Fredek prowadzi pensjonat. Twierdzi on, że za każdym razem gdy jego pensjonat odwiedza $n \geqslant 3$ gości, potrafi wskazać takich dwóch, którzy wśród pozostałych gości mają taką samą liczbę znajomych oraz wspólnego znajomego lub wspólnego nieznajomego. Dla jakich wartości n Fredek ma rację?

7. Tablica kontrolna o wymiarach 40×50 składa się 2000 guzików, z których każdy jest w pozycji: włączony lub wyłączony. Naciśnięcie guzika powoduje zmianę jego pozycji oraz pozycji wszystkich guzików w tej samej kolumnie i w tym samym wierszu. Wykazać, że przyciskając guziki można tablicę z początkowo wyłączonymi guzikami doprowadzić do tablicy, w której wszystkie guziki są włączone. Wyznaczyć najmniejszą potrzebną do tego liczbę naciśnięć.

8. Na przyjęciu spotkało się czternastu kolegów. Jeden z nich, Fredek, chciał wcześniej położyć się spać. Pożegnał się więc z 10 kolegami, zapominając o trzech pozostałych i poszedł spać. Po chwili wrócił na przyjęcie, pożegnał się z 10 kolegami (niekoniecznie tymi samymi co poprzednio) i poszedł spać. Fredek powracał jeszcze wielokrotnie i za każdym razem żegnał się z 10 kolegami, po czym szedł spać. Kiedy tylko pożegnał się z każdym ze swoich kolegów co najmniej raz, to już nie wrócił. Rano Fredek uświadomił sobie, że z każdym z trzynastu kolegów pożegnał się inną liczbę razy. Ile co najmniej razy powracał Fredek?

9. Po szachownicy $2k \times 2k$ złożonej z jednostkowych kwadratów skacze żaba. Skoki żaby są długości $\sqrt{1+k^2}$ i przenoszą ją ze środka jednego kwadratu do środka innego kwadratu. Pewnych m kwadratów szachownicy zaznaczono krzyżykiem. Wszystkie kwadraty, do których może skoczyć żaba z pól oznaczonych krzyżykiem oznaczono kółkiem (nawet jeśli na którymś z tych pól jest już krzyżyk). Kółkiem oznaczono n kwadratów. Dowieść, że $n \geqslant m$.

10. Na tablicy napisano dwie liczby całkowite dodatnie. Początkowo, jedna z nich jest równa 2000, a druga jest mniejsza niż 2000. Jeśli średnia arytmetyczna m dwóch liczb napisanych na tablicy jest liczbą całkowitą, możemy wykonać następującą procedurę: ścieramy jedną z liczb zastępując ją przez m. Dowieść, że ta procedura nie może być wykonana więcej niż dziesięć razy. Podać przykład, w którym powyższa procedura jest wykonywana dziesięć razy.

11. Dany jest taki ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots$, że dla dowolnych m i n zachodzi: jeśli m jest dzielnikiem liczby n oraz $m < n$, to a_m jest dzielnikiem liczby a_n oraz $a_m < a_n$. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość liczby a_{2000}.

12. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że żadna z nich nie jest początkowym fragmentem żadnej innej (na przykład 12 jest początkowym fragmentem liczb $\underline{12}$, $\underline{12}5$ oraz $\underline{12}405$). Dowieść, że

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} < 3.$$

13. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie takim ciągiem arytmetycznym liczb całkowitych, że $i \mid a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $n \nmid a_n$. Udowodnić, że n jest potęgą liczby pierwszej.

14. Znaleźć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że n równa się liczbie dodatnich dzielników liczby n pomnożonej przez 100.

15. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną ani przez 2, ani przez 3. Wykazać, że dla wszystkich liczb całkowitych k liczba

$$(k+1)^n - k^n - 1$$

jest podzielna przez k^2+k+1.

16. Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

17. Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach rzeczywistych następującego układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ xy + yz + zt + tx = 4 \\ xyz + yzt + ztx + txy = 3 \\ xyzt = -1. \end{cases}$$

18. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste x i y spełniające równanie

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4 = 2\cdot(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}).$$

19. Niech $t \geqslant \frac{1}{2}$ będzie liczbą rzeczywistą, a n dodatnią liczbą całkowitą. Dowieść, że $t^{2n} \geqslant (t-1)^{2n} + (2t-1)^n$.

20. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n, niech

$$x_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\cdot\ldots\cdot(4n-1)(4n+1)}{(2n)(2n+2)\cdot\ldots\cdot(4n-2)(4n)}.$$

Dowieść, że

$$\frac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \frac{2}{n}.$$