XII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich
Hamburg (Niemcy), 4 listopada 2001

1. Na egzamin przygotowano 8 pytań. Każdy uczeń otrzymał 3 z nich. Żadnych dwóch uczniów nie otrzymało więcej niż jedno wspólne pytanie. Jaka największa możliwa liczba uczniów wzięła udział w egzaminie?

2. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Rozstrzygnąć, czy istnieje n takich niepustych parami rozłącznych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,\ldots\}$, że każdą dodatnią liczbę całkowitą można w jednoznaczny sposób przedstawić w postaci sumy co najwyżej n liczb, każdej z innego podzbioru.

3. Liczby $1,2,\ldots,49$ rozmieszczono w tablicy 7×7, po czym obliczono sumę liczb w każdym wierszu i każdej kolumnie. Niektóre z tych 14 sum są nieparzyste, a pozostałe są parzyste. Niech A oznacza sumę wszystkich nieparzystych sum, a B sumę wszystkich parzystych sum. Czy jest możliwe takie rozmieszczenie liczb, że $A=B$?

4. Niech p i q będą dwiema różnymi liczbami pierwszymi. Dowieść, że

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{1}{2}(p-1)(q-1).$$

($\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x.)

5. Każdy spośród danych 2001 punktów na okręgu pokolorowano na czerwono albo na zielono. W jednym kroku wszystkie punkty są jednocześnie przekolorowywane w następujący sposób: jeśli oba punkty bezpośrednio sąsiadujące z punktem P mają ten sam kolor co punkt P, to punkt P nie zmienia koloru, w przeciwnym razie punkt P zmienia kolor. Rozpoczynając od pokolorowania F_1 otrzymujemy kolejno pokolorowania $F_2, F_3, \ldots$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $n_0 \leqslant 1000$, że $F_{n_0} = F_{n_0+2}$. Czy to stwierdzenie jest prawdziwe, jeśli liczbę 1000 zastąpimy przez 999?

6. Punkty A, B, C, D, E leżą w tej właśnie kolejności na okręgu c i spełniają $AB \parallel EC$ oraz $AC \parallel ED$. Prosta styczna do okręgu c w punkcie E przecina prostą AB w punkcie P. Proste BD i EC przecinają się w punkcie Q. Udowodnić, że $AC = PQ$.

7. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg przechodzący przez punkt A przecina odcinki AB, AC i AD odpowiednio w punktach M, K i N, różnych od A. Dowieść, że $AB \cdot AM + AD \cdot AN = AK \cdot AC$.

8. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym i niech N będzie środkiem boku BC. Ponadto załóżmy, że $\sphericalangle AND = 135^\circ$. Dowieść, że

$$AB + CD + \frac{BC}{\sqrt{2}} \geqslant AD.$$

9. Dany jest romb $ABCD$. Znaleźć zbiór takich punktów P, które leżą wewnątrz rombu i spełniają warunek $\sphericalangle APD + \sphericalangle BPC = 180^\circ$.

10. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Wiedząc, że $BD \cdot CD = AD^2$ oraz $\sphericalangle ADB = 45^\circ$, wyznaczyć miary kątów trójkąta ABC.

11. Funkcja f o wartościach rzeczywistych jest określona na zbiorze wszystkich liczb całkowitych dodatnich. Dla dowolnych liczb całkowitych $a > 1$, $b > 1$ oraz $d = \mathrm{NWD}(a,b)$ zachodzi równość

$$f(ab) = f(d)\left(f\left(\frac{a}{d}\right) + f\left(\frac{b}{d}\right)\right).$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $f(2001)$.

12. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^5 = 5.$$

Dowieść, że $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i > 3/2$.

13. Niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunki

$$a_0 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_n = a_{\lfloor 7n/9 \rfloor} + a_{\lfloor n/9 \rfloor}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia k, że

$$a_k < \frac{k}{2001!}.$$

($\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x.)

14. Danych jest $2n$ kart. Na każdej karcie napisano pewną liczbę rzeczywistą x, przy czym $1 \leqslant x \leqslant 2$ (na różnych kartach mogą być różne liczby). Udowodnić, że można tak rozdzielić karty na dwa stosy o sumach odpowiednio s_1 i s_2, że

$$\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{s_1}{s_2} \leqslant 1.$$

15. Niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych spełniającym warunek

$$i \cdot a_i^2 \geqslant (i+1) \cdot a_{i-1} a_{i+1} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Ponadto niech x i y będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi oraz określmy $b_i = x a_i + y a_{i-1}$ dla $i = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że nierówność $i \cdot b_i^2 > (i+1) \cdot b_{i-1} b_{i+1}$ zachodzi dla wszystkich liczb całkowitych $i \geqslant 2$.

16. Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze liczb całkowitych dodatnich spełniającą następujący warunek: dla wszystkich $n>1$ istnieje taki dzielnik pierwszy p liczby n, że $f(n)=f(n/p)-f(p)$. Wiedząc, że $f(2001)=1$, wyznaczyć $f(2002)$.

17. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że można wybrać co najmniej $2^{n-1}+n$ takich liczb ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,2^n\}$, że dla dowolnych wybranych dwóch różnych liczb x i y, $x+y$ nie dzieli $x\cdot y$.

18. Niech a będzie liczbą nieparzystą. Udowodnić, że liczby $a^{2^n}+2^{2^n}$ oraz $a^{2^m}+2^{2^m}$ są względnie pierwsze dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych n i m, przy czym $n\neq m$.

19. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba nieparzysta mająca tyle samo dodatnich dzielników co 360?

20. Z ciągu (a,b,c,d) liczb całkowitych możemy uzyskać w jednym kroku jeden z ciągów

$$(c,d,a,b), \quad (b,a,d,c), \quad (a+nc,b+nd,c,d), \quad (a+nb,b,c+nd,d)$$

dla dowolnej liczby całkowitej n, przy czym liczba n może być w każdym kroku inna. Czy można otrzymać ciąg $(3,4,5,7)$ z ciągu $(1,2,3,4)$ przy pomocy pewnej liczby kroków?