Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 31 maja - 12 czerwca 2001

Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 31 maja - 12 czerwca 2001

Agroturystyka „Zgoda”, Zwardoń 45
34-737 ZWARDOŃ
tel. 0-33-8646-328

Kadra:
Jerzy Bednarczuk
Rafał Łochowski
Waldemar Pompe
Jarosław Wróblewski

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`http://www.impan.gov.pl/~olimp/`

Wstęp

Obóz Naukowy LII Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 31 maja - 12 czerwca w Zwardoniu. Uczestniczyło w nim 20 uczniów, zakwalifikowanych na niego na podstawie wyników finału LII Olimpiady Matematycznej.

Obóz przygotowali i zajęcia na nim przeprowadzili członkowie kadry w składzie: Jerzy Bednarczuk, Rafał Łochowski, Waldemar Pompe i Jarosław Wróblewski.

Zajęcia polegały głównie na samodzielnym rozwiązywaniu zadań, w ramach tzw. zawodów indywidualnych.

Każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy otrzymywali do rozwiązania 3 lub 4 zadania. Zawody indywidualne odbywały się w godzinach 9.30-14.00. Popołudnia były poświęcone omawianiu zadań i pogadankom na tematy z zakresu matematyki wiążące się z omawianymi zadaniami.

Oprócz zawodów indywidualnych, w dniach 3, 6 i 10 czerwca odbyły się zawody drużynowe. Zadania przygotowane na zawody drużynowe były nieco trudniejsze niż zadania z zawodów indywidualnych, wszystkie jednak zostały rozwiązane (najtrudniejsze okazało się zadanie 9, które zostało rozwiązane przez jedną spośród wszystkich czterech drużyn). Poza tym, 12 czerwca odbyła się rozgrywka Meczu Matematycznego (regulamin meczu znajduje się na końcu niniejszego zeszytu). Punkty uzyskane za poszczególne zadania z zawodów indywidualnych przedstawia tabela na następnej stronie. W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać w sumie 183 punkty (punkty za „10 łatwych zadań geometrycznych przestrzennych” do łącznej klasyfikacji były liczone ze współczynnikiem 0,5). Najlepszy osiągnięty wynik to 139,5 punktów. Do znalezienia się w pierwszej piątce wystarczyło zdobycie 86 punktów.

r. ł.

Zestawienie wyników ocen z zawodów indywidualnych [1]

numer zadania	liczba ocen 6 pt.	liczba ocen 5 pt.	liczba ocen 2 pt.	liczba ocen 0 pt. lub -
Ł 1.	9	4	3	4
Ł 2.	4	1	–	15
Ł 3.	9	1	2	8
Ł 4.	6	–	–	14
Ł 5.	3	3	–	14
Ł 6.	6	2	5	7
Ł 7.	–	3	5	12
Ł 8.	3	–	6	11
Ł 9.	2	4	2	12
Ł 10.	3	–	1	16
Ł 11.	9	5	–	6
1.	15	1	–	4
2.	9	2	3	6
3.	5	–	6	9
4.	1	3	–	16
5.	14	3	–	3
6.	10	–	–	10
7.	1	3	1	15
8.	2	–	–	18
9.	2	–	1	17
10.	4	2	9	5
11.	7	–	2	11
12.	8	2	–	10
13.	12	2	2	4
14.	4	1	–	15
15.	2	–	1	17
16.	6	1	2	11
17.	10	4	1	5
18.	5	–	1	14
19.	15	1	–	4
20.	5	–	1	14
21.	6	–	–	14
22.	4	–	1	15
23.	1	3	–	16
24.	4	1	2	13
25.	3	–	–	17

[1] Każda praca była oceniana w skali 0, 2, 5, 6 pt.

Treści 10 łatwych zadań geometrycznych przestrzennych

1. Świat ma kształt sfery. Fredek spoglądając na świat z dowolnego punktu leżącego na zewnątrz świata, uszczęśliwia tę część świata, którą widzi. 21 stycznia o godzinie 10.00 Fredek spojrzał na świat po raz pierwszy, 21 lutego o godzinie 10.00 spojrzał (być może z innego punktu) po raz drugi i podobnie 21 każdego miesiąca spoglądał na świat o godzinie 10.00. Kiedy najwcześniej Fredek może uszczęśliwić cały świat?

2. Wykazać, że pole rzutu prostokątnego sześcianu o krawędzi 1 na płaszczyznę jest równe co najwyżej $\sqrt{3}$.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami rozwartokątnymi.

4. Rozważamy cztery proste łączące odpowiednio wierzchołki ze środkami okręgów wpisanych w przeciwległe ściany pewnego czworościanu. Wykazać, że jeśli dwie spośród tych prostych przecinają się, to i dwie pozostałe się przecinają.

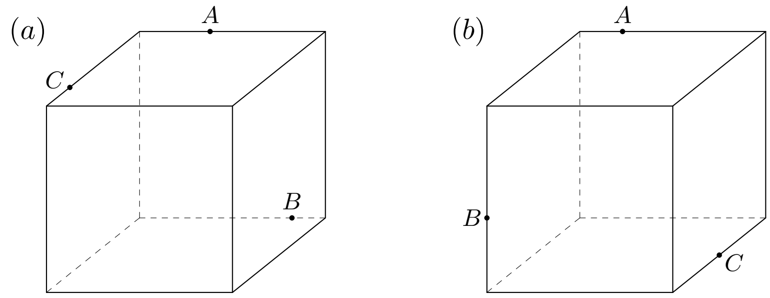
5. Dany jest czworościan foremny $ABCD$ o krawędzi 1. Niech K i L będą odpowiednio środkami krawędzi AB i CD. Obliczyć odległość pomiędzy prostymi DK i AL.

6. Niech w, k, s oznaczają odpowiednio liczby: wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu wypukłego. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielościan wypukły, w którym:

(a) $w=7$, $k=15$, $s=10$;
(b) $w=8$, $k=15$, $s=9$;
(c) $w=13$, $k=35$, $s=24$;
(d) $w=25$, $k=37$, $s=14$.

7. Rozstrzygnąć, czy istnieje czworościan, który nie jest foremny i który ma trzy osie symetrii.

8. Poniżej narysowano rzuty sześcianów przeciętych płaszczyzną ABC. Przy pomocy cyrkla i linijki wyznaczyć rzuty pozostałych punktów przecięcia płaszczyzny ABC z krawędziami sześcianu. Opisać wykonaną konstrukcję.
Uwaga. Zadanie wykonać na dołączonej kartce.



9. Podstawą ostrosłupa jest czworokąt wypukły. Wykazać, że można ten ostrosłup przeciąć płaszczyzną nie przecinającą podstawy tak, aby w przekroju otrzymać równoległobok.

10. Rozstrzygnąć, czy istnieje 10 płaszczyzn, z których każda rozcina dany czworościan foremny na dwie bryły przystające.

11. Udowodnić, że w dowolnym czworościanie istnieje wierzchołek, przy którym wszystkie kąty płaskie są ostre.

Treści zadań z zawodów indywidualnych

1. Dane są liczby $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$, wśród których każda z liczb $1,2,3,\ldots,2n-1,2n$ występuje dokładnie raz.

Dowieść, że

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2 .$$

2. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y,z \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$(x+y+z)^{x+y+z} x^x y^y z^z < \frac{3}{4}(x+y)^{x+y}(x+z)^{x+z}(y+z)^{y+z} .$$

3. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach C i D. Okręgi te leżą wewnątrz okręgu o i są do niego styczne odpowiednio w punktach A i B. Wspólna styczna do okręgów o_1 i o_2 jest styczna do nich odpowiednio w punktach E i F. Udowodnić, że proste AE, CD, BF przecinają się w punkcie leżącym na okręgu o.

4. Pewnego wieczora Fredek opowiada dowcipy, przy czym wybiera je losowo z 3-elementowego zbioru znanych sobie dowcipów. Paula śmieszy tylko jeden dowcip Fredka i śmieje się zawsze, kiedy Fredek go opowiada. Andrzej śmieje się z każdego dowcipu, którego nie pamięta, a pamięta zawsze dwa poprzednie. Maniek zaś śmieje się wtedy, gdy Fredek opowiada ten sam dowcip, co przed chwilą.

Kiedy po raz drugi z rzędu nikt nie śmieje się z opowiadanego dowcipu, Fredek obrażony idzie spać.

Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby dowcipów, które Fredek opowie tego wieczora.

5. Rozwiązać równanie

$$x^{x+y} = (x+y)^y$$

w liczbach całkowitych dodatnich.

6. Okręgi o_A, o_B, o_C, o_D leżą wewnątrz okręgu o i są do niego styczne odpowiednio w punktach A, B, C, D. Każdy z okręgów o_A, o_C jest styczny zewnętrznie do każdego z okręgów o_B, o_D. Dowieść, że

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

7. Na okręgu napisano $n \geqslant 3$ liczb całkowitych dodatnich, wśród których jest $k \geqslant 1$ jedynek. Przy każdej liczbie dopisano iloraz sumy jej sąsiadów przez nią samą. Okazało się, że wszystkie dopisane liczby są całkowite.

Dowieść, że przy ustalonych n i k, suma dopisanych liczb nie zależy od tego, jakie liczby napisano na okręgu.

8. Dowieść, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją takie liczby całkowite dodatnie x i y, że

$$y^3 < x^2 < y^3 + \varepsilon y\,.$$

9. Okrąg o wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Punkt P leży wewnątrz okręgu o. Proste DP, EP i FP przecinają krótsze łuki EF, FD i DE okręgu o odpowiednio w punktach X, Y i Z. Udowodnić, że proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.

10. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie a, dla których istnieje taki niestały wielomian dwóch zmiennych $P(x,y)$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$P(x,y) = P(a(x+y), a(x-y)) .$$

11. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} .$$

12. Czworościan $ABCD$ nazwiemy *ładnym*, jeżeli środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD leżą w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty C, D i środek ciężkości czworościanu $ABCD$. Ile najwięcej krawędzi różnej długości może mieć ładny czworościan?

13. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} .$$

14. Liczby rzeczywiste dodatnie b_1, b_2, …, b_n, B spełniają warunek

$$\frac{b_1}{b_1+B} + \frac{b_2}{b_2+B} + \ldots + \frac{b_n}{b_n+B} = 1 .$$

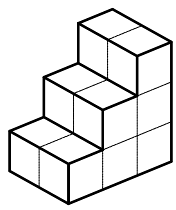
Udowodnić, że

$$B \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n - \frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} .$$

15. Okrąg ω leży wewnątrz okręgu Ω i przechodzi przez jego środek. Okręgi o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6 są styczne wewnętrznie do okręgu Ω i zewnętrznie do okręgu ω. Ponadto dla $i=1,2,3,4,5,6$ okręgi o_i i o_{i+1} są styczne zewnętrznie (przyjmujemy $o_7=o_1$).

Wyznaczyć możliwe wartości stosunku promienia okręgu ω do promienia okręgu Ω.

16. Klocek na rysunku poniżej zbudowany jest z 12 sześcianów jednostkowych.



Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których można z takich klocków zbudować sześcian o boku długości n.

17. Spośród par liczb rzeczywistych x i y spełniających równanie

$$x^{2001}=2000+2001x+y^{2002}$$

wyznaczyć te, dla których suma $x+y$ jest najmniejsza.

18. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg o, którego średnicą jest odcinek AM, przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Styczne do okręgu o w punktach D i E przecinają się w punkcie P. Dowieść, że $PB=PC$.

19. Punkt K leży na boku DF trójkąta DEF. Niech R będzie takim punktem, że półprosta FE jest dwusieczną kąta DFR oraz

$$RF\cdot KD=KE^2+KD\cdot KF.$$

Dowieść, że $\sphericalangle FRE=\sphericalangle DEK$.

20. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m i n liczba

$$\frac{(10m)!(10n)!}{(5m)!(5n)!(3m+2n)!(3n+2m)!}$$

jest całkowita.

21. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Funkcja $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ następujące warunki:
(a) $F(4n) = F(2n) + F(n)$,
(b) $F(4n+2) = F(4n) + 1$,
(c) $F(2n+1) = F(2n) + 1$.

Udowodnić, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie $F(2^{m+1})$ takich liczb całkowitych nieujemnych $n < 2^m$, że $F(4n) = F(3n)$.

22. Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC. Punkt D leży na boku BC. Okrąg o_1 jest styczny do odcinków AD i BD oraz do okręgu o. Podobnie, okrąg o_2 jest styczny do odcinków AD i CD oraz do okręgu o. Udowodnić, że jeżeli okręgi o_1 i o_2 są styczne, to ich punkt styczności jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

23. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich nieprzystających trójkątów prostokątnych, że ich boki mają całkowitą długość oraz liczby wyrażające długości przyprostokątnych tych trójkątów są względnie pierwsze i ich różnica jest równa 7.

24. Znaleźć wszystkie funkcje $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których istnieje taka ściśle rosnąca funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$u(x)f(y) = f(x+y) - f(x).$$

25. Okręgi o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6 leżą wewnątrz okręgu o i są styczne do niego odpowiednio w punktach A, B, C, D, E, F. Ponadto dla $i = 1$, 2, 3, 4, 5, 6 okręgi o_i i o_{i+1} są styczne zewnętrznie (przyjmujemy $o_7 = o_1$). Udowodnić, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Treści zadań z zawodów drużynowych

1. (a) Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą K taką, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 o sumie równej 0 zachodzi nierówność

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 \leqslant K(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)\,.$$

(b) Dla wyznaczonej w podpunkcie (a) stałej K rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

2. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$a^{13}+b^{13}+c^{13}+\ldots+y^{13}=z^{13}$$

w liczbach całkowitych nieujemnych $a,b,c,\ldots,y,z \leqslant 100$.

Uwaga. W równaniu występuje 26 niewiadomych.

3. Czworościan $\mathcal{T}$ nazwiemy *sztywnym*, jeśli nie istnieje czworościan $\mathcal{U}$ spełniający warunki:

1. czworościany $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ nie są przystające,
2. promienie sfer opisanych na czworościanach $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ są równe,
3. pola ścian czworościanu $\mathcal{T}$ są odpowiednio równe polom ścian czworościanu $\mathcal{U}$.

(a) Udowodnić, że jeżeli pola wszystkich ścian czworościanu sztywnego są równe, to jest on foremny.

(b) Rozstrzygnąć, czy istnieje taki czworościan sztywny, który nie jest foremny.

4. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnego wielomianu dwóch zmiennych $P(x,y)$, dla którego zachodzi równość

$$P(x,y)=P\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y),\tfrac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\right),$$

istnieje taki wielomian jednej zmiennej $Q(t)$, że

$$P(x,y)=Q(x^2+y^2).$$

5. Rozstrzygnąć, czy zbiór liczb całkowitych $n>1$ spełniających warunek $n^2 \mid 2^n-1$ jest

a) pusty,

b) niepusty skończony,

c) nieskończony.

6. Rozstrzygnąć, czy zbiór liczb całkowitych $n>1$ spełniających warunek $n^2 \mid 44^n-1$ jest

a) pusty,

b) niepusty skończony,

c) nieskończony.

7. Rozstrzygnąć, czy istnieje trapez $ABCD$ (nie będący równoległobokiem) o podstawach AB i CD, w którym równość

$$AB^n+CD^n+AC^n=AD^n+BC^n$$

zachodzi dla więcej niż jednej liczby całkowitej dodatniej n.

8. Dane są dwie względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie p i q. Podzbiór S zbioru $\{0,1,2,3,\ldots\}$ nazwiemy *idealnym*, jeżeli $0 \in S$ oraz dla każdego $n \in S$ liczby $n+p$ oraz $n+q$ należą do S. Wyznaczyć liczbę idealnych podzbiorów zbioru $\{0,1,2,3\ldots\}$.

9. Rozstrzygnąć, czy zbiór rozwiązań równania

$$x^8+y^8+z^8=2t^2$$

w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z, t takich, że NWD $(x,y,z,t)=1$ jest

a) pusty,

b) niepusty skończony,

c) nieskończony.

10. W czworościanie foremnym $ABCD$ o krawędzi 1 punkt K jest środkiem krawędzi AB, a punkt L jest środkiem krawędzi BD. Obliczyć odległość pomiędzy prostymi DK i CL.

Treści zadań z Meczu Matematycznego

1. Na płaszczyźnie danych jest 2000 punktów, z których dowolne cztery są wierzchołkami czworokąta wypukłego. Rozstrzygnąć, czy można te punkty połączyć w pary rysując 1000 odcinków tak, aby dowolne dwa narysowane odcinki się przecinały.

2. W pewnym kraju jest 2001 miast i każde dwa mają bezpośrednie, dwukierunkowe połączenie lotnicze. Rozstrzygnąć, czy można tak ustalić ceny biletów na te połączenia, aby koszt każdych dwóch podróży, nie przebiegających w taki sam sposób, a polegających na jednokrotnym odwiedzeniu wszystkich miast i powrocie do wyróżnionego miasta, z którego podróż się rozpoczęła, był inny.

Uwaga. Cena biletu z miasta A do miasta B nie musi być taka sama jak cena biletu z miasta B do miasta A.

3. Znaleźć wszystkie takie pary liczb całkowitych dodatnich (x,y), że liczby x^2+5y i y^2+5x są kwadratami liczb całkowitych.

4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje ciągłe $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi równość

$$2^{y+1}f(x)+2^{x+1}f(y)=f(x+y)+4^y f(x-y).$$

5. Liczby rzeczywiste dodatnie $b_1,b_2,\ldots,b_n$, B spełniają warunek
$$\frac{b_1}{b_1+B}+\frac{b_2}{b_2+B}+\ldots+\frac{b_n}{b_n+B}=n-1\,.$$
Udowodnić, że
$$B\leqslant\frac{\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}{n-1}\,.$$

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje rozwiązanie równania
$$x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=xyzuv-65$$
w liczbach całkowitych x, y, z, u, v większych od 2001.

7. Dane są takie liczby naturalne a i b, że $1<a<b^2$. Udowodnić, że jeśli dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi podzielność $b^n-1\,|\,a^n-1$, to $a=b$.

8. Trapez t jest opisany na okręgu o środku S i promieniu 1. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie P. Znając długość odcinka PS, obliczyć stosunek długości podstaw trapezu t.

9. Różne punkty A, B, C leżą na prostej k, a punkt P leży poza nią. Punkty Q, R, S są środkami okręgów opisanych na trójkątach PAB, PBC, PCA. Wykazać, że punkty P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.

10. Punkty A i B leżą po różnych stronach prostej k. Za pomocą cyrkla i linijki skonstruować taki okrąg, przechodzący przez punkty A i B, aby długość jego cięciwy wyznaczonej przez prostą k, była minimalna.

11. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Każda z przekątnych AD, BE, CF tego sześciokąta dzieli go na dwa czworokąty o równych polach. Wykazać, że przekątne te przecinają się w jednym punkcie.

Szkice rozwiązań 10 łatwych zadań geometrycznych przestrzennych

1. *Odp.:* Fredek uszczęśliwi świat najwcześniej 21 kwietnia o godzinie 10.00.

Spoglądając na świat kolejno z czterech wierzchołków czworościanu zawierającego cały świat, Fredek uszczęśliwi cały świat.

Wykażemy, że Fredek nie może uszczęśliwić świata spoglądając na niego kolejno z trzech różnych punktów A,B,C. Spoglądając na świat z punktu A, Fredek nie jest w stanie uszczęśliwić pewnego okręgu wielkiego tego świata. Podobnie, spogądając z punktu B, Fredek nie uszczęśliwia pewnego, innego niż poprzednio, okręgu wielkiego. Zatem spoglądając na świat z punktów A i B Fredek nie uszczęśliwi pewnych dwóch antypodycznie położonych punktów świata. Punktów tych Fredek niestety nie może uszczęśliwić jednocześnie, spoglądając z punktu C.

2. Przyjmijmy, że sześcian $ABCDEFGH$ jest rozłączny z płaszczyzną rzutowania ω. Niech A będzie jego wierzchołkiem najbardziej oddalonym od ω. Rzut sześcianu $ABCDEFGH$ na płaszczyznę ω jest figurą $\mathcal{F}$ składającą się z równoległoboków $A'B'C'D'$, $A'D'H'E'$, $A'B'F'E'$ (X' oznacza rzut punktu X na płaszczyznę ω). Pole $\mathcal{F}$ jest więc równe podwojonemu polu trójkąta $B'D'E'$. Z kolei pole trójkąta $B'D'E'$ jest nie większe niż pole trójkąta BDE, które wynosi $\sqrt{3}/2$.

3. *Odp.:* Taki czworościan istnieje.

Niech $ABCD$ będzie trapezem o podstawach AB i CD, w którym kąty ACB, ADB, ADC, BCD są rozwarte. Wówczas warunki zadania spełnia czworościan $ABCD'$ gdzie D' jest punktem przestrzeni położonym dostatecznie blisko punktu D.

4. Niech I_A, I_B, I_C, I_D będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w ściany BCD, CDA, DAB, ABC czworościanu $ABCD$. Odcinki CI_C i DI_D przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy proste CI_D i DI_C przecinają się na krawędzi AB. To z kolei jest równoważne temu, że

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

Powyższa równość zaś jest równoważna temu, że odcinki AI_B i BI_A przecinają się. Stąd wynika, że odcinki AI_A i BI_B przecinają się.

5. Umieśćmy czworościan $ABCD$ w sześcianie $PBQACRDS$. Niech X, Y, U i W będą odpowiednio środkami krawędzi PB, AQ, CR i SD. Wówczas proste AL i DK są zawarte odpowiednio w płaszczyznach równoległych $APUW$ i $XYDR$. Odległość między tymi płaszczyznami jest równa odległości między prostymi PU i RX, czyli wynosi $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

6.

(a) Takim wielościanem jest np. bryła składająca się z dwóch ostrosłupów pięciokątnych sklejonych przystającymi podstawami.

(b) Takim wielościanem jest np. graniastosłup trójkątny, do którego podstaw doklejono czworościany.

(c) Taki wielościan nie istnieje, gdyż w dowolnym wielościanie wypukłym zachodzi nierówność $2k \geqslant 3s$.

(d) Taki wielościan nie istnieje, gdyż w dowolnym wielościanie wypukłym zachodzi nierówność $2k \geqslant 3w$.

7. Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie prostopadłościanem nie będącym sześcianem. Wówczas czworościan $ACB'D'$ spełnia warunki zadania.

8.

(a) Przez punkt B prowadzimy prostą równoległą do prostej AC. Punkt przecięcia się poprowadzonej prostej z krawędzią sześcianu jest jednocześnie punktem przecięcia się płaszczyzny ABC z tą krawędzią. Oznaczmy ten punkt przez D. Przez punkt D prowadzimy prostą równoległą do prostej AB. Punkt przecięcia się tej prostej z krawędzią sześcianu jest także punktem należącym do płaszczyzny ABC. Oznaczmy ten punkt przez E. Punkty D i E to punkty, które należało wyznaczyć.

(b) Przez punkt A prowadzimy prostą równoległą do krawędzi sześcianu zawierającej punkt B. Punkt przecięcia się poprowadzonej prostej z krawędzią sześcianu, różny od punktu A oznaczmy przez P. Przez punkt P i przez wierzchołek sześcianu leżący jednocześnie na krawędzi sześcianu zawierającej punkt B oraz na „dolnej" ścianie sześcianu prowadzimy prostą. Punkt przecięcia się tej prostej z prostą AB oznaczmy przez Q. Punkt przecięcia się prostej QC z krawędzią sześcianu należy do płaszczyzny ABC. Dalej postępujemy podobnie jak w punkcie (a).

9. Niech $SABCD$ będzie rozważanym ostrosłupem o wierzchołku S i podstawie $ABCD$. Niech l będzie wspólną prostą płaszczyzn SAB i SCD, zaś m wspólną prostą płaszczyzn SBC i SDA. Przecinając dany ostrosłup płaszczyzną równoległą do płaszczyzny wyznaczonej przez proste l i m otrzymamy w przekroju równoległobok.

10. *Odp.:* Takich płaszczyzn jest nieskończenie wiele.

Niech $ABCD$ będzie danym czworościanem foremnym, zaś K i L odpowiednio środkami krawędzi AB i CD. Wówczas dowolna płaszczyzna przechodząca przez punkty K i L dzieli czworościan $ABCD$ na dwie bryły przystające.

11. Przypuśćmy, że przy każdym wierzchołku pewnego czworościanu istnieje kąt rozwarty. Wówczas suma kątów płaskich przy każdym jego wierzchołku jest większa niż $180°$. Stąd wynika, że suma wszystkich kątów płaskich w czworościanie jest większa niż $4\cdot 180°$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż suma wszystkich kątów płaskich w czworościanie jest równa $4\cdot 180°$.

Szkice rozwiązań zadań z zawodów indywidualnych

1. W każdej z par (a_i,b_i) występuje jedna z liczb $1,2,3,\ldots,n$ i jedna z liczb $n+1,n+2,n+3,\ldots,2n$, skąd

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=$$
$$=n+1+n+2+n+3+\ldots+2n-(1+2+3+\ldots+n)=n^2\,.$$

2. Niech x będzie najmniejszą z liczb x,y,z. Wowczas

$$(x+y+z)x=x^2+xy+xz\leqslant\frac{3}{4}(x^2+xy+xz+yz)=\frac{3}{4}(x+y)(x+z)$$

i podobnie

$$(x+y+z)y<(x+y)(y+z)$$

oraz

$$(x+y+z)z<(x+z)(y+z)\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$(x+y+z)^x x^x\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^x(x+y)^x(x+z)^x\leqslant\frac{3}{4}(x+y)^x(x+z)^x\,,$$
$$(x+y+z)^y y^y<(x+y)^y(y+z)^y\,,$$
$$(x+y+z)^z z^z<(x+z)^z(y+z)^z\,.$$

Mnożąc trzy ostatnie nierówności stronami, otrzymujemy nierówność daną w zadaniu.

3. Poprowadźmy styczną t do okręgu o, równoległą do prostej EF i leżącą po innej stronie prostej EF niż okręgi o_1 i o_2. Punkt styczności oznaczmy P. Wówczas punkty A, E i P są współliniowe (jednokładność o środku w punkcie A przekształcająca okrąg o_1 na okrąg o, przekształca punkt E na punkt P). Podobnie, współliniowe są punkty B, F i P. Aby zakończyć dowód wystarczy wykazać, że punkty A, B, E i F leżą na jednym okręgu. Można to uzasadnić dokonując inwersji rozważanej konfiguracji względem jednego z punktów przecięcia prostej EF z okręgiem o lub rozważyć kąty czworokąta $ABFE$ i kąty, jakie tworzy prosta t z odcinkami PA i PB.

4. Wyznaczana wartość oczekiwana istnieje ponieważ prawdopodobieństwo, że po raz drugi z rzędu nikt się nie zaśmieje jest dodatnie. Niech A będzie dowcipem Fredka, który śmieszy Paula, natomiast x i y dwoma pozostałymi dowcipami. Wówczas Fredek idzie spać po wystąpieniu ciągu dowcipów $xyxy$ lub $yxyx$. Niech L będzie wartością oczekiwaną liczby dowcipów, które Fredek opowie tego wieczora, a L_{abc} liczbą dowcipów, które jeszcze opowie Fredek, gdy do tej pory wystąpił ciąg dowcipów abc. Wówczas

$$L = 1 + \frac{L_A + L_x + L_y}{3} = 1 + \frac{L + 2L_x}{3}$$

z uwagi na równości $L_A = L$ i $L_x = L_y$. Podobnie

$$L_x = 1 + \frac{L + L_x + L_{xy}}{3},$$

$$L_{xy} = 1 + \frac{L + L_{xyx} + L_y}{3} = 1 + \frac{L + L_x + L_{xyx}}{3},$$

$$L_{xyx} = 1 + \frac{L + L_x + L_{xyxy}}{3} = 1 + \frac{L + L_x}{3},$$

skąd po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy $L = 60$.

5. Niech $z=y/x$. Wówczas po podstawieniu $y=xz$ dane równanie przyjmuje postać
$$x^{x(z+1)}=x^{xz}(z+1)^{xz}\,,$$
co kolejno jest równoważne równaniom
$$x^{z+1}=x^{z}(z+1)^{z}\,,$$
$$x=(z+1)^{z}\,.$$
Liczba z jest wymierna. Zapisując ją w postaci ułamka nieskracalnego p/q otrzymujemy
$$x=\frac{(p+q)^{p/q}}{q^{p/q}}\,,$$
$$x^q=\frac{(p+q)^{p}}{q^{p}}\,.$$
Ponieważ x jest liczbą całkowitą, więc $q=1$, a stąd wynika, że liczba z jest całkowita.

Zatem wszystkie rozwiązania równania są postaci
$$x=(z+1)^{z},\quad y=z(z+1)^{z}\,,$$
gdzie z jest liczbą całkowitą dodatnią.

Najmniejsze rozwiązania to: $x=2$, $y=2$; $x=9$, $y=18$; $x=64$, $y=192$; $x=625$, $y=2500$; $x=7776$, $y=38880$.

6. Rozważmy inwersję względem punktu A. Niech X' będzie obrazem punktu X w tej inwersji. Wówczas
$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{AC'},\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{AC'}.$$
Teza wynika z powyższych równości i z obserwacji, że $B'C'=C'D'$.

7. Teza zadania wynika z następującego lematu.
Lemat Suma dopisanych liczb jest równa $3n-k$.
Dowód indukcyjny. Dla $n=3$ początkowe liczby są jedoznacznie wyznaczone przez liczbę k i warunek całkowitości liczb dopisanych, a mianowicie:
gdy $k=1$, to napisano liczby 1,2,3 i dopisano odpowiednio 5,2,1;
gdy $k=2$, to napisano liczby 1,1,2 i dopisano odpowiednio 3,3,1;
gdy $k=3$, to napisano trzy jedynki i dopisano trzy dwójki;
stąd widać, że w tym przypadku lemat jest prawdziwy.

Lemat jest również prawdziwy w przypadku $n=k$, gdyż wówczs na okręgu napisano n jedynek i dopisano n dwójek.

Przyjmijmy teraz, że $n>3$ i $k<n$. Niech a, b, c, d, e będą kolejnymi liczbami napisanymi na okręgu, przy czym c jest największą ze wszystkich napisanych liczb. Wówczas $c=b+d$, gdyż w przeciwnym razie wszystkie liczby napisane na okręgu musiałyby być równe c. Przy liczbach b,c,d są więc dopisane odpowiednio liczby $1+\frac{a+d}{b}$, 1, $1+\frac{b+e}{d}$.

Jeśli wykreślimy liczbę c, to liczby dopisane przy jej sąsiadach zmniejszą się o 1, a więc suma wszystkich liczb dopisanych zmniejszy się o 3, a przy tym na okręgu napisanych będzie $n-1$ liczb, w tym k jedynek. Dla uzyskanego rozmieszczenia zachodzi teza lematu, zatem lemat jest prawdziwy także dla początkowego rozmieszczenia liczb na okręgu.

8. Poszukiwanie wielomianów $P(n)$ i $Q(n)$ takich, że wielomian $P^2(n)-Q^3(n)$ jest niezerowy i ma stopień mniejszy niż stopień $Q(n)$ prowadzi do

$$P(n)=n^6+6n^3+6,$$
$$Q(n)=n^4+4n\,.$$

Wówczas kładąc $x=P(n)$ i $y=Q(n)$ otrzymujemy

$$x^2-y^3=8n^3+36<9n^3+36=\frac{9y}{n}<\varepsilon y\,,$$

o ile $n>9/\varepsilon$.

9. Zachodzą następujące równości

$$\sphericalangle AFX=\sphericalangle XEF=\sphericalangle XDF=\alpha,$$
$$\sphericalangle AEX=\sphericalangle XFE=\sphericalangle XDE=\beta.$$

Wówczas

$$\frac{\sin\sphericalangle FAX}{\sin\sphericalangle EAX}=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2.$$

Analogiczne równości zachodzą dla konfiguracji przy kątach B i C. Mnożymy otrzymane równości stronami. Ponieważ odcinki DX,EY,FZ przecinają się w jednym punkcie, stosujemy trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy. Stąd otrzymujemy tezę na mocy odwrotnego twierdzenia Cevy.

10. Dla dowolnego niestałego wielomianu $P(x,y)$ istnieje taka para liczb $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, że $\lim_{t\to\infty}|P(tx_0,ty_0)|=\infty$. Załóżmy, że dla pewnego niestałego wielomianu $P(x,y)$ i dla pewnej liczby rzeczywistej dodatniej a zachodzi dana w zadaniu równość. Iterując ją, otrzymujemy

$$P(x,y)=P(2a^2x,2a^2y).$$

Stąd i z przytoczonego powyżej stwierdzenia wynika, że $2a^2=1$, co daje równość $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dla $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ przykładem wielomianu spełniającego warunki podane w zadaniu jest wielomian $P(x,y)=x^2+y^2$.

11. Oznaczmy $m=\frac{a}{\sqrt[3]{x}}$ $n=\frac{b}{\sqrt[3]{y}}$, $k=\frac{c}{\sqrt[3]{z}}$. Dana do udowodnienia nierówność przyjmuje postać

$$3(m^3+n^3+k^3)(x^3+y^3+z^3)\geqslant(mx+ny+kz).$$

Stosując dwukrotnie nierówność Höldera, otrzymujemy

$$\begin{aligned}3(m^3+n^3+k^3)(x^3+y^3+z^3)=&\\ &=(1^2+1^2+1^2)(m^3+n^3+k^3)(x^3+y^3+z^3)\geqslant\\ &\geqslant(m^{3/2}+n^{3/2}+k^{3/2})^2(x^3+y^3+z^3)\geqslant\\ &\geqslant(mx+ny+kz)^3\,.\end{aligned}$$

12. *Odp.:* Sześć. Dowolny czworościan, w którym kąty ACB i ADB są proste jest ładny.

13. Dowód indukcyjny. Po zweryfikowaniu podanej równości dla $n=1$ przechodzimy do kroku indukcyjnego, którego uzasadnienie jest następujące

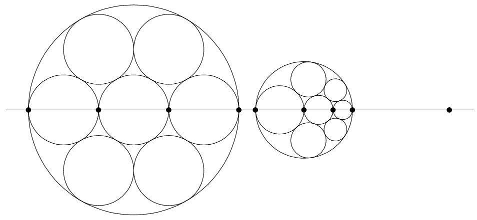
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}\right](-1)^{k+1}\frac{1}{k}+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}=\\ &=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}=\\ &=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}=\\ &=\Big[-(1-1)^{n+1}-(-1)^{0+1}-(-1)^{n+2}+(-1)^{n+2}\Big]\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\,.\end{aligned}$$

14. Niech $\beta_k = \frac{b_k}{b_1+\ldots+b_n}$. Korzystając z danej w zadaniu równości a następnie z nierówności Jensena dla funkcji $g(x) = \frac{1}{x+B}$, otrzymujemy

$$1 = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{1}{b_k + B} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k + B}.$$

Przekształcając powyższą nierówność, otrzymujemy nierówność daną w zadaniu.

15. Jedyną możliwą wartością rozważanego stosunku jest $\frac{3}{10}$. Przeprowadzamy inwersją okręgi ω i Ω na okręgi współśrodkowe i widzimy, że stosunek ich promieni nie zależy od okręgów o_1, …, o_6.



Przy założeniu, że środki okręgów ω, Ω, o_1 i o_4 leżą na jednej prostej, łatwo obliczyć szukany stosunek, który wynosi $\frac{3}{10}$.

16. Jeżeli długość n boku sześcianu jest podzielna przez 12, to można go zbudować z klocków. Udowodnimy, że jest to warunek konieczny. Ponieważ objętość każdego klocka wynosi 12 więc, jeżeli sześcian o boku n jest konstruowalny z klocków, to musi zachodzić podzielność $6 \mid n$. Załóżmy więc, że sześcian jest zbudowany z $m = n^3/12 = 18l^3$ klocków i umieśćmy go w jednym z oktantów układu współrzędnych, tak aby jeden z jego wierzchołków znajdował się w początku układu. Sześcian jednostkowy $[i,i+1] \times [j,j+1] \times [k,k+1]$ kolorujemy jednym z ośmiu kolorów, w zależności od tego, dla której z ośmiu trójek (r,s,t), gdzie $r,s,t = 0,1$, spełniony jest warunek $i \equiv r (\mathrm{mod}\, 2)$, $j \equiv s (\mathrm{mod}\, 2)$, $k \equiv t (\mathrm{mod}\, 2)$. W każdym klocku sześć sześcianów jednostkowych jest pokolorowanych kolorami, którymi nie są pokolorowane żadne inne sześciany jednostkowe w tym klocku, dwa pozostałe kolory zaś pojawiają się na dokładnie trzech sześcianach w tym klocku. Wybierzmy jeden z ośmiu kolorów i niech p będzie liczbą tych klocków, w których ów kolor pojawia się trzykrotnie. W sześcianie zbudowanym z m klocków kolor ten pojawia się dokładnie $3p + (m-p) = m + 2p$ razy. Z drugiej strony, w sześcianie o boku $n = 6l$ kolor ten pojawia się $12m/8$ razy. Z tego wynika, że $m = 4p$; zatem l jest liczbą parzystą.

17. Niech x,y będą liczbami spełniającymi dane równanie.

Jeżeli $x,y \geqslant 0$, to $x+y>0$.

Jeżeli $x \geqslant 0$ i $y<0$, to $x>1$ i otrzymujemy

$$y^{2002} < x^{2001} < x^{2002},$$

skąd $|y|<x$ i $x+y>0$.

Zatem przy $x \geqslant 0$ mamy $x+y>0$.

Warunek $x<0$ implikuje $x=-1$ i $y=0$, co daje $x+y=-1$.

Uwaga. Przy ograniczeniu $x \geqslant 0$ przybliżona odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest następująca:

$x=1{,}00797341098$, $y=-1{,}00796915869$, $x+y=4{,}25229034216^{-6}$.

18. Niech okręgi opisane na trójkątach BDM i CEM przecinają proste PD i PE odpowiednio w punktach K i L. Pokażemy, że punkt P leży na osi potęgowej tych okręgów, czyli że $KD=LE$. Ponieważ okręgi te są przystające, wystarczy wykazać, że $\sin\sphericalangle KMD = \sin\sphericalangle LME$. Ostatnia równość wynika z podobieństwa trójkątów ABM i DKM oraz ACM i ELM.

19. Niech L będzie punktem symetrycznym do punktu K względem prostej FE. Wówczas równość dana w treści zadania przybiera postać

$$\frac{KD}{KE}=\frac{LE}{LR}.$$

Zatem trójkąty KDE i LER są podobne. Stąd $\sphericalangle FRE=\sphericalangle DEK$

20. Dla każdej liczby pierwszej p i dla każdej liczby naturalnej n najwyższa potęga p, przez jaką dzieli się liczba $n!$ jest równa $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$

($[x]$ oznacza część całkowitą liczby x).

Teza zadania wynika z nierówności

$$[10x]+[10y] \geqslant [5x]+[5y]+[3x+2y]+[2x+3y],$$

prawdziwej dla wszystkich rzeczywistych x, y.

21. Dla $n \in N$ wartość $F(n)$ można obliczyć następująco:

jeżeli $\epsilon_k,\epsilon_{k-1},\ldots,\epsilon_0 \in \{0,1\}$ są kolejnymi cyframi w rozwinięciu dwójkowym liczby n, $n=2^k\epsilon_k+2^{k-1}\epsilon_{k-1}+\ldots+2^0\epsilon_0$, to

$$F(n)=\epsilon_k f_{k+1}+\epsilon_{k-1}f_k+\ldots+\epsilon_0 f_1,$$

przy czym ciąg (f_k) jest ciągiem Fibonacciego, zdefiniowanym w następujący sposób: $f_1=f_2=1$, $f_k=f_{k-1}+f_{k-2}$, dla $k=1,2,\ldots$.

Równość $F(3n)=F(4n)$ dla $0 \leqslant n < 2^m$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu $(\epsilon_k,\epsilon_{k-1},\ldots,\epsilon_0)$ nie ma dwóch sąsiednich jedynek. Liczb n spełniających ten warunek jest dokładnie $f_{m+2}=F(2^{m+1})$.

22. Oznaczmy przez K i L odpowiednie punkty styczności okręgów o_1 i o_2 do okręgu o. Niech P i Q oznaczają odpowiednio punkty styczności prostej BC z okręgami o_1 i o_2. Analogicznie jak w zad. 3. dowodzimy, że proste KP i LQ przecinają się w punkcie X leżącym na okręgu o. Punkt X jest środkiem łuku BC okręgu o. Punkty K, L, P, Q leżą na jednym okręgu, więc punkt X leży na osi potęgowej okręgów o_1 i o_2, którą jest prosta AD, co oznacza, że AD jest dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$. Pozostaje udowodnić, że $XI = XB$, gdzie I jest punktem styczności okręgów o_1 i o_2. To jednak wynika z zależności $XB^2 = XP \cdot XK = XI^2$.

23. Jeżeli liczby m, $m+7$ są przyprostokątnymi, a n przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, to trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $3m+2n+7$ i $3m+2n+14$ ma przeciwprostokątną $4m+3n+14$. Jeśli przy tym liczby m i n są względnie pierwsze, to także przyprostokątne nowo utworzonego trójkąta są względnie pierwsze.

W ten sposób z jednego trójkąta spełniającego warunki zadania możemy uzyskąc nieskończony ciąg takich trójkątów, np. z trójkąta (5, 12, 13) otrzymujemy kolejno

(48, 55, 73), (297, 304, 425), (1748, 1755, 2477), ...

a z trójkąta (8, 15, 17) dostajemy

(65, 72, 97), (396, 403, 565), (2325, 2332, 3293), ...

24. Z danego równania wynika równość $f(x) = f(x)u(0) + f(0)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ f jest funkcją ściśle rosnącą, więc musi być $u(0) = 1$ oraz $f(0) = 0$ i $f(x) \neq 0$ dla $x \neq 0$. Dalej mamy

$$f(y)u(x) + f(x) = f(x+y) = f(x)u(y) + f(y),$$

stąd

$$f(x)(u(y)-1) = f(y)(u(x)-1) \text{ dla wszystkich } x,y \in \mathbb{R}.$$

Zatem dla wszystkich $x \neq 0$, $y \neq 0$ zachodzi równość

$$(u(x)-1)/f(x) = (u(y)-1)/f(y),$$

a zatem istnieje stała $C \in \mathbb{R}$ taka, że $u(x) = Cf(x) + 1$. Stąd

$$\begin{aligned} u(x+y) &= 1 + Cf(x+y) = 1 + Cf(x)u(y) + f(y) = \\ &= u(y) + Cf(x)u(y) = u(x)u(y) \end{aligned}$$

dla $x,y \in \mathbb{R}$. Stąd otrzymujemy, że istnieje taka liczba rzeczywista c, że dla każdej liczby wymiernej w zachodzi $u(w) = e^{cw}$. Korzystając z monotoniczności funkcji f otrzymujemy, że wzór $u(x) = e^{cx}$ jest prawdziwy dla każdej liczby rzeczywistej x.

25. Rozważaną konfigurację przekształcamy inwersyjnie względem punktu A. Niech X' oznacza obraz punktu X' przy tej inwersji oraz niech o_i' oznacza obraz okręgu o_i. Należy udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach $AB'E'$ i $AC'F'$ przecinają się na prostej AD' co jest równoważne temu, że punkt D' leży na osi potęgowej tych okręgów. Należy więc dowieść, że

$$B'D' \cdot D'E' = F'D' \cdot D'C' .$$

Powyższą równość weryfikujemy, wyrażając długości odpowiednich odcinków poprzez promienie $r_2, \ldots, r_6$ okręgów $o_2', \ldots, o_6'$ odpowiednio:

$$B'D' = 4r_2r_3 + 4r_3r_4, D'E' = 4r_4r_5, F'D' = 4r_6r_5 + 4r_5r_4, D'C' = 4r_3r_4.$$

Szkice rozwiązań zadań z zawodów drużynowych

1. (a) Niech $x_6 = x_1, x_7 = x_2$. Zachodzi równość

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{5} x_i x_{i+1} + 2\sum_{i=1}^{5} x_i x_{i+2} .$$

Dla każdej liczby rzeczywistej λ, korzystając z powyższej równości, otrzymujemy

$$0 \leqslant \sum_{i=2}^{6} (x_{i+1} + x_{i-1} - \lambda x_i)^2 =$$

$$= (2+\lambda^2)\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{5} x_i x_{i+2} - 4\lambda \sum_{i=1}^{5} x_i x_{i+1} =$$

$$= (1+\lambda^2)\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - (2+4\lambda)\sum_{i=1}^{5} x_i x_{i+1} .$$

Stąd otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{5} x_i x_{i+1} \leqslant \inf_{\lambda > -\frac{1}{2}} \frac{1+\lambda^2}{2+4\lambda} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 .$$

(b) Równość w powyższej nierówności zachodzi, gdy we wszystkich dokonanych przejściach mają miejsce równości. Zbiór piątek liczb, dla których jest to prawdą tworzy dwuwymiarową podprzestrzeń w przestrzeni $\mathbb{R}^5$ rozpiętą przez wektory $(1, \lambda, -\lambda, -1, 0)$, $(\lambda, 1, 0, -1, -\lambda)$, gdzie λ jest dodatnim pierwiastkiem równania $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$.

2. Odnotujmy najpierw, że równanie ma trywialne rozwiązania, w których jedna z liczb $a,b,c,\ldots,y$ jest równa z, a pozostałe są zerami.

Dla innych rozwiązań zachodzi nierówność

$$z = \frac{z^{13}}{z^{12}} = \frac{a^{13}+b^{13}+c^{13}+\ldots+y^{13}}{z^{12}} < a+b+c+\ldots+y\,.$$

Ponadto z małego twierdzenia Fermata wynika podzielność
$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13|A^{13}-A$, czyli $2730|A^{13}-A$ dla dowolnej liczby całkowitej A.

Stąd

$$a+b+c+\ldots+y \equiv a^{13}+b^{13}+c^{13}+\ldots+y^{13} = z^{13} \equiv z(\mathrm{mod}\,2730)\,,$$

co daje

$$a+b+c+\ldots+y \geqslant z+2730 > 2730$$

wbrew założeniu, że $a+b+c+\ldots+y \leqslant 2500$.

3. (a) Rozpatrzmy prostopadłościan P o krawędziach a,b,c, opisany na czworościanie $\mathcal{T}$. Niech S będzie polem pewnej ściany czworościanu $\mathcal{T}$, zaś R promieniem sfery na niej opisanej. Wówczas

$$4S^2 = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$$

oraz

$$4R^2 = a^2+b^2+c^2.$$

Rozważmy wielomian $P(x)=(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)=$
$=x^3-4R^2x^2+4S^2x-a^2b^2c^2$. Jeżeli wielomian $P(x)$ ma dwa różne pierwiastki, to wielomian $P(x)+\epsilon$, dla pewnego $\epsilon\neq0$, ma trzy dodatnie pierwiastki d^2,e^2,f^2 (d, e, f dodatnie). Wtedy czworościan wpisany w prostopadłościan o krawędziach d, e, f ma taki sam promień sfery opisanej i pola ścian co czworościan $\mathcal{T}$.

(b) Taki czworościan istnieje. Niech S będzie sferą o promieniu R. ABC jest trójkątem równobocznym wpisanym w koło wielkie sfery S. Jeżeli P jest punktem sfery S najbardziej oddalonym od płaszczyzny ABC, to wówczas czworościan $ABCD$ jest sztywny.

4. *Odp.:* Nie. Przykładem wielomianu, który spełnia pierwszy warunek i nie spełnia drugiego warunku jest wielomian

$$P(x,y) = x^8-28x^6y^2+70x^4y^4-28x^2y^6+y^8.$$

Wielomian ten jest równy części rzeczywistej liczby zespolonej $(x+iy)^8$
(x, y - liczby rzeczywiste).

Innym przykładem jest wielomian

$$P(x,y)=\Big(xy(x+y)(x-y)\Big)^2.$$

5.,6. Niech napis $p^k\|a$ oznacza, że $p^k|a$ i $p^{k+1}\nmid a$.

Lemat.

Niech $q>p$ będą liczbami pierwszymi nieparzystymi, a liczbą całkowitą.

(i) Jeżeli $p\nmid a-1$, to $p\nmid a^p-1$.

(ii) Jeżeli $p\nmid a-1$, to $p\nmid a^q-1$.

(iii) Jeżeli $p^k\|a-1$, to $p^{k+1}\|a^p-1$.

(iv) Jeżeli $p^k\|a-1$, to $p^k\|a^q-1$.

Dowód lematu.

Z małego twierdzenia Fermata mamy

$$a^p-1\equiv a-1 \pmod p\,,$$

co dowodzi (i).

W celu dowodu (ii) rozważmy najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią r, dla której prawdziwa jest kongruencja $a^r\equiv 1 \pmod p$. Wówczas warunek $a^s\equiv 1 \pmod p$ jest równoważny podzielności $r|s$. Jeżeli $p\nmid a-1$, to $r>1$, a ponieważ z małego twierdzenia Fermata wynika podzielność $r|p-1$, dostajemy $r\nmid q$.

Jeśli natomiast $p^k\|a-1$, gdzie $k\geqslant 1$, to $a=1+p^kc$, gdzie c jest liczbą niepodzielną przez p. Wtedy

$$a^p-1=(1+p^kc)^p-1=\binom{p}{0}+\binom{p}{1}p^kc+\binom{p}{2}p^{2k}c^2+\ldots+\binom{p}{p}p^{pk}c^p-1=$$

$$=1+p^{k+1}c+\frac{p-1}{2}p^{2k+1}c^2+(\text{wyrazy podzielne przez } p^{3k})-1\equiv$$

$$\equiv p^{k+1}c \pmod{p^{k+2}}\,,$$

skąd wynika (iii).

Podobnie z zależności

$$a^q-1=(1+p^kc)^q-1=\binom{q}{0}+\binom{q}{1}p^kc+\binom{q}{2}p^{2k}c^2+\ldots+\binom{q}{q}p^{qk}c^q-1=$$

$$=1+p^kqc+(\text{wyrazy podzielne przez } p^{2k})-1\equiv$$

$$\equiv p^kqc \pmod{p^{k+1}}$$

otrzymujemy (iv).

Przechodzimy do rozwiązania zadania 6.

Jeżeli liczba n spełnia warunek $n^2|44^n-1$ oraz $n^2<44^n-1$, to dla dowolnego dzielnika pierwszego p liczby

$$\frac{44^n-1}{n^2}$$

mamy

$$pn^2|44^n-1\,,$$

skąd na mocy podpunktu (iii) lematu otrzymujemy

$$(pn)^2|44^{pn}-1\,.$$

To pozwala z jednej liczby spełniającej warunek zadania uzyskać inną, większą od niej. I tak z $n=1$ otrzymujemy $p=43$ i widzimy, że liczba 43 też spełnia warunki zadania.

Ten sam zabieg nie jest możliwy w zadaniu 5, gdyż nierówność $n^2<2^n-1$ nie jest spełniona dla $n=1$ i nie mamy rozwiązania, z którego można produkować następne.

Pokażemy, że jeżeli $n^2\not|\,2^n-1$, to dla dowolnej liczby pierwszej q nie mniejszej niż największy dzielnik pierwszy liczby n, zachodzi warunek

$$(qn)^2\not|\,2^{nq}-1.$$

Jeżeli $n^2\not|\,2^n-1$, to istnieje taki dzielnik pierwszy p liczby n, że

$$p^k\|n \quad \text{i} \quad p^{2k}\not|\,2^n-1\,.$$

Jeżeli $p<q$, to na mocy lematu

$$p^{2k}\not|\,2^{qn}-1\,.$$

Jeżeli natomiast $p=q$, to

$$q^{k+1}|qn \quad \text{i} \quad q^{2k+1}\not|\,2^{qn}-1\,.$$

Pozostaje zauważyć, że dla liczby pierwszej q mamy $2^q-1\equiv 2-1=1 (\mathrm{mod}\, q)$.

7. Warunki zadania spełnia dowolny trapez równoramienny, w którym $\sphericalangle AOD=120^\circ$, gdzie O jest punktem przecięcia jego przekątnych.

Istotnie, niech $AB=a$ i $CD=b$. Wówczas $AC=a+b$ i na mocy twierdzenia cosinusów $AD=BC=\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Bez trudu sprawdzamy, że warunek podany w zadaniu zachodzi dla $n=2$ i $n=4$.

8. Każda liczba całkowita z ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $z=px+qy$, gdzie $0\leqslant x\leqslant q-1$. Ostatnia nierówność definiuje na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ pionowy pas; każdą liczbę całkowitą jednoznacznie utożsamimy z jednym z punktów leżących w tym pasie. Dalsze rozważania ograniczymy do tego pasa.

Niech S będzie zbiorem idealnym. Każdy punkt leżący na prostej $y=0$ lub nad nią jest elementem zbioru S. Rozważmy trójkąt Δ ograniczony prostymi $y=0$, $x=q$ i $px+qy=0$. Jeżeli punkt z jest elementem zbioru S, to wraz z nim elementami S są wszystkie punkty leżące w prawej górnej ćwiartce płaszczyzny wyznaczonej przez proste: pionową i poziomą, przechodzące przez punkt z. Łamana wyznaczająca zbiór S składa się z odcinków pionowych i poziomych, i każda taka łamana długości $p+q$, leżąca w trójkącie Δ i łącząca punkt $(0,0)$ z punktem $(q,-p)$ wyznacza jednoznacznie zbiór idealny. Niech Γ oznacza zbiór wszystkich takich łamanych zaś Θ niech oznacza zbiór takich łamanych lecz niekoniecznie leżących w trójkącie Δ. Każdej łamanej ze zbioru Γ odpowiada dokładnie $p+q$ łamanych ze zbioru Θ, powstałych przez cykliczne przesunięcie poziomych i pionowych części owej łamanej. Zbiór Θ ma $\binom{p+q}{p}$ elementów, zatem zbiór Γ ma $\frac{1}{p+q}\binom{p+q}{p}$ elementów, i jest to liczba zbiorów idealnych.

9. Niech $x^2+y^2=z^2$. Wówczas $x^8+y^8+z^8=x^8+y^8+(x^2+y^2)^4=$ $=2(x^4+x^2y^2+y^4)^2$. Zatem z każdej trójki pitagorejskiej otrzymujemy jedno rozwiązanie rozważanego równania, skąd wynika, że szukanych rozwiązań jest nieskończenie wiele.

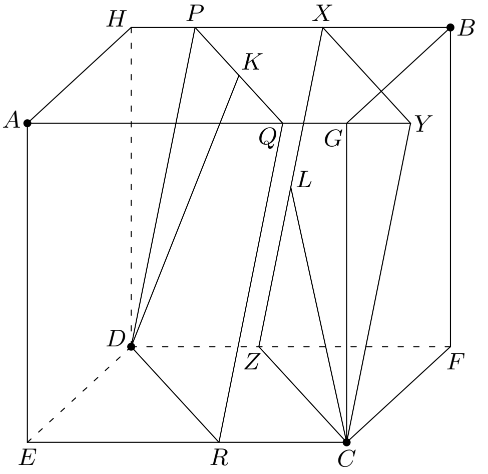
10. Czworościan $ABCD$ uzupełniamy do sześcianu $ECFDAGBH$ (patrz rysunek). Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na krawędziach HB, AG, EC i

$$\frac{HP}{PB}=\frac{1}{4},\quad \frac{AQ}{QG}=\frac{4}{1},\quad \frac{ER}{RC}=\frac{3}{2}.$$

Podobnie, punkty X, Z leżą odpowiednio na krawędziach HB, DF i spełniają warunki

$$\frac{HX}{XB}=\frac{3}{2},\quad \frac{DZ}{ZF}=\frac{2}{3},$$

zaś punkt Y leży na przedłużeniu krawędzi AG, przy czym $AY:YG=6:1$.



Tak zdefiniowane punkty P, Q, R oraz X, Y, Z wyznaczają dwie płaszczyzny równoległe, które zawierają odpowiednio proste DK i CL. Szukana odległość jest więc równa odległości między płaszczyznami $DPQR$ i $ZXYC$.

Oznaczając $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (długość krawędzi sześcianu), obliczamy pole p równoległoboku $DPQR$:

$$p = a^2\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{5}a^2.$$

Objętość równoległościanu $DPQRZXYC$ jest równa $\frac{2}{5}a^3$. Stąd, odległość d między prostymi DK i CL wynosi

$$d = \left(\frac{2}{5}a^3\right) : \left(\frac{\sqrt{35}}{5}a^2\right) = \frac{2a}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{70}}{35}.$$

Szkice rozwiązań zadań z Meczu Matematycznego

1. Łączymy punkty w pary tak, aby suma długości narysowanych odcinków była możliwie największa. Gdyby pewne 2 odcinki się nie przecinały, to zastępując je przekątnymi czworokąta wypukłego, którego wierzchołkami są końce tych odcinków, otrzymalibyśmy zbiór odcinków o większej sumie.

2. *Odp.:* Jest to możliwe. Wystarczy aby koszty połączeń pomiędzy różnymi parami uporządkowanymi miast (pierwsze miasto - miasto wylotu, drugie miasto - miasto przylotu) były różnymi potęgami dwójki.

3. Załóżmy, że $x \leqslant y$. Wtedy

$$y^2+5x \leqslant y^2+5y < y^2+6y+9=(y+3)^2\,,$$

skąd $y^2+5x=(y+1)^2$ lub $y^2+5x=(y+2)^2$.

Pierwsza równość prowadzi do $5x=2y+1$, skąd $x=2k+1$ i $y=5k+2$ dla pewnego $k \geqslant 0$. Wówczas $x^2+5y=4k^2+29k+11$ i

$$(2k+3)^2 < 4k^2+29k+11 < (2k+8)^2\,,$$

skąd rozwiązując równania $4k^2+29k+11=(2k+i)^2$ dla $i=4,5,6,7$ otrzymujemy $k=5$ lub $k=38$ prowadzące do rozwiązań (11,27) i (77,192).

Z kolei równość $y^2+5x=(y+2)^2$ daje $5x=4y+4$, skąd $x=4k$ i $y=5k-1$ dla pewnego $k \geqslant 1$. Wówczas $x^2+5y=16k^2+25k-5$ i

$$(4k+1)^2 < 16k^2+25k-5 < (4k+4)^2\,,$$

skąd rozwiązując równania $16k^2+25k-5=(4k+i)^2$ dla $i=2,3$ otrzymujemy $k=1$ lub $k=14$ prowadzące do rozwiązań (4,4) i (56,69).

Po rezygnacji z ograniczenia $x \leqslant y$ otrzymujemy łącznie 7 par liczb spełniających warunki zadania.

4. Niech f będzie funkcją ciągłą spełniającą dane równanie. Przyjmując $g(x)=f(x)/2^x$ otrzymujemy

$$2g(x)+2g(y)=g(x+y)+g(x-y)\,.$$

Biorąc $x=y=0$ stwiedzamy, że $g(0)=0$. Z kolei przyjęcie $x=0$ pokazuje, że funkcja g jest parzysta.

Nietrudna indukcja pokazuje, że $g(nt)=n^2g(t)$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i rzeczywistej t. W celu wykonania kroku indukcyjnego wystarczy podstawić $x=nt$ i $y=t$.

Niech $c=g(1)$. Wówczas $g(q)=cq^2$ dla dowolnego q wymiernego, a ciągłość pozwala na uzyskanie $g(x)=cx^2$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

Stąd otrzymujemy

$$f(x)=cx^2 2^x\,.$$

Pozostaje sprawdzić, że funkcje określone powyższym wzorem spełniają dane w zadaniu równanie.

5. Niech $\beta_k=\frac{B}{b_k+B}$. Oczywiście $\beta_k>0$. Dla każdego $k=1,2,\ldots,n$ zachodzi równość

$$1-\beta_k=\sum_{j=1,j\neq k}^{n}\beta_j.$$

Nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną daje

$$1-\beta_k\geqslant(n-1)\sqrt[n-1]{\Pi_{j=1,j\neq k}^{n}\beta_j}.$$

Mnożąc otrzymane nierówności stronami, dostajemy

$$\Pi_{k=1}^{n}(1-\beta_k)\geqslant(n-1)^n\Pi_{k=1}^{n}\beta_k,$$

co po przekształceniach prowadzi do tezy zadania.

6. Rozwiązanie danego w zadaniu równania w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z, u, v nazwiemy *dobrym*, jeżeli liczby te są parami różne.

Z każdego dobrego rozwiązania można dostać inne dobre. Mianowicie, jeżeli rozwiązanie $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, $u=u_1$, $v=v_1$ jest dobre oraz $x_1<y_1<z_1<u_1<v_1$, to ze wzorów Viete'a otrzymujemy rozwiązanie
$x=y_1z_1u_1v_1-x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, $u=u_1$, $v=v_1$, które również jest dobre. Postępując w ten sposób możemy otrzymać rozwiązanie w dowolnie dużych liczbach o ile znajdziemy choć jedno dobre rozwiązanie. Dobrym rozwiązaniem tego równania jest zaś np. $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$, $v=5$.

7. Liczba
$$x_n=\frac{a^{n+1}-1}{b^{n+1}-1}b-\frac{a^n-1}{b^n-1}a=\frac{b^{n+1}(a-1)-a^{n+1}(b-1)-(a-b)}{(b^n-1)(b^{n+1}-1)}$$
jest całkowita. Po podzieleniu licznika i mianownika w powyższej równości przez b^{2n+1} stwierdzamy, że $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. Zatem dla dostatecznie dużych n
$$b^{n+1}(a-1)=a^{n+1}(b-1)+(a-b).$$
Dzieląc powyższą równość przez a^n, otrzymujemy
$$\left(\frac{b}{a}\right)^n b(a-1)=a(b-1)+\frac{a-b}{a^n}.$$
Przechodząc w powyższej równości z n do nieskończoności otrzymujemy $a(b-1)=0$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem $a=b$.

8. Niech K i L będą punktami styczności okręgu o z podstawami AB i CD. Wówczas na mocy twierdzenia Brianchona punkty K, P, L są współliniowe, a więc i punkty K, S, P, L są współliniowe. Zatem
$$\frac{CD}{AB}=\frac{1-a}{1+a}.$$

9. Niech punkty K, L, M będą odpowiednio środkami odcinków PA, PB i PC. Symetralne odcinków PA, PB i PC wyznaczają punkty Q, R, S. Punkty K, L, M są rzutami prostokątnymi punktu P na proste QS, QR, RS. Ponieważ punkty K, L, M są współliniowe, więc punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie QRS.

10. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych k i AB. Niech okrąg przechodzący przez punkty A i B przecina prostą k w punktach C i D. Przy tych oznaczeniach iloczyn $CP\cdot DP$ nie zależy od wyboru okręgu o. Zatem cięciwa, o której mowa w zadaniu ma najmniejszą długość wtedy, gdy $CP=DP$.

11. Z warunków zadania wynika, że pola trójkątów ACF i ACD są równe. Zatem $AC\,||\,FD$. Analogicznie $AE\,||\,BD$, $BF\,||\,CE$. Stąd wynika, że istnieje jednokładność J (o ujemnej skali) przekształcająca trójkąt ACE na trójkąt DFB. Zatem przekątne AD, DE i CF przecinają się jednym punkcie, będącym środkiem jednokładności J.

notatki

Regulamin Meczu Matematycznego

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy.

3. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

4. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania rozwiązania jednego z zadań. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą.

5. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie.

6. Jeżeli drużyna wywołana przyjmuje zadanie, Kapitan drużyny wywołującej wyznacza zawodnika drużyny wywołanej do zreferowania rozwiązania przy tablicy. Rozwiązanie to jest oceniane przez Jury.

7. Zawodnik może być wyznaczony powtórnie jedynie wtedy, gdy wszyscy zawodnicy z jego drużyny byli już wyznaczeni do referowania.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny wywołanej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. N-ta zmiana powoduje odjęcie N punktów, bez względu na to, czy zadanie zostanie uznane za rozwiązane. Kapitan prosi wówczas drużynę przeciwną o wyznaczenie nowego referującego.

10. Czas na zreferowanie rozwiązania wynosi 15 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieje na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że zakończył referowanie, drużyna przeciwna zgłasza zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie **referujący** odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli Jury uznaje rozwiązanie za poprawne, punktuje je od 5 do 10 punktów. Jury może przyznać drużynie wywołującej te punkty, które zostały odjęte drużynie rozwiązującej, jeżeli usterki rozwiązania zostały przez tę drużynę zauważone.

13. Jeżeli Jury nie uznaje rozwiązania za poprawne, żadna z drużyn nie otrzymuje punktów, chyba, że drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie. Wtedy ma ona prawo do przedstawienia własnego rozwiązania na zasadach i przy punktacji określonych w pozycjach **6–12**.

14. Jeżeli drużyna wywołana nie przyjmie zadania, rozwiązuje je drużyna wywołująca zgodnie z zasadami określonymi w p. **6–12**. Jeśli jednak nie przedstawi ona poprawnego rozwiązania, otrzyma -10 (minus 10) punktów.

15. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

Spis treści

wydanie drugie, nieco poprawione