Obóz przygotowawczy do zawodów międzynarodowych
Zwardoń, 24.05.1993 — 3.06.1993.

1. Na okrągłym stole o promieniu 1, w odległości r od środka położono piłeczkę $(0 < r < 1)$. Na ile sposobów można jej nadać taki zwrot, aby po trzykrotnym odbiciu, nie przechodząc przez środek, piłeczka przeszła przez położenie początkowe?

2. Dla jakich liczb naturalnych n, równanie $x^2 + xy + y^2 = 7^n$ ma rozwiązania w liczbach naturalnych niepodzielnych przez 7 ?

3. Dane są liczby rzeczywiste $1 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{1993} = 1993$. Pokazać, że
$$\sum_{k=1}^{1992} \frac{a_{k+1} - a_k}{1 + a_k^2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

4. Ciąg (a_n) określony jest następująco:
$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{2n+1} = \frac{a_{2n} + a_{2n-1}}{2}, \quad a_{2n+2} = \sqrt{a_{2n+1} \cdot a_{2n}}, \qquad \text{dla } \; n \geqslant 1\,.$$
Wykazać, że istnieje granica ciągu (a_n) i znaleźć jej wartość.

5. Niech $n \geqslant 3$ i $k \neq 0$ będą liczbami całkowitymi oraz niech $W(x) = \sum\limits_{r=0}^{n} (rk + 1)x^{n-r}$. Pokazać, że $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

6. Dane są okręgi o_1 i o_2 przecinające się w punkcie P. Punkty $A_i \in o_1$ i $B_i \in o_2$, gdzie $i = 1, 2$, są takie, że P należy do wnętrza odcinka A_iB_i. Dowieść, że kąt między prostymi A_1A_2 i B_1B_2 nie zależy od wyboru punktów A_i, B_i.

7. Liczby a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ są z przedziału $[0, 2]$, przy czym $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geqslant n$. Pokazać, że
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\Big) - n \leqslant 11\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big) - n\Big)\,.$$

8. Pokazać, że najmniejsza wspólna wielokrotność liczb $1, 2, \ldots, n$ jest nie mniejsza od 2^{n-1}.

9. W okrąg wpisany jest czworokąt wypukły, którego przekątne są prostopadłe. Udowodnić, że środki boków tego czworokąta oraz rzuty prostopadłe punktu przecięcia przekątnych na boki leżą na jednym okręgu i promień tego okręgu zależy jedynie od położenia punktu przecięcia przekątnych.

10. Wyznaczyć wszystkie funkcje f ze zbioru $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ w siebie takie, że $f(1) > 0$, $f(m^2 + n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2$ dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych m, n.

11. Dany jest kąt o wierzchołku A i okrąg weń wpisany oraz prosta p przechodząca przez A i nieprzecinająca okręgu. Rozpatrujemy zbiór wszystkich czworokątów takich, że:

— są one opisane na danym okręgu,

— jedna para przeciwległych boków zawiera się w ramionach kąta,

— druga para przeciwległych boków przecina się na prostej p.

Znaleźć miejsce geometryczne punktów przecięcia przekątnych tych czworokątów.

12. W pewnym kraju jest n miast, $n \geqslant 4$. Między pewnymi z nich są drogi. Jaka jest minimalna liczba dróg, jeśli:

(a) dla dowolnych dwóch miast istnieje miasto z nimi połączone;

(b) dla dowolnych niepołączonych dwóch miast A i B istnieją co najmniej dwa miasta C i D połączone drogą zarówno z A jak i B.

13. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, które są nieskończenie wiele razy różniczkowalne oraz spełniają tożsamość:

$$2f(x+1) = f(x) + f(2x).$$

14. Dany jest dowolny trójkąt ABC. Udowodnić nierówność:

$$\frac{r_a}{\sin\alpha} + \frac{r_b}{\sin\beta} + \frac{r_c}{\sin\gamma} \geqslant 2p.$$

15. Proste k_1, k_2, k_3, n przecinają się w punkcie P. Proste k_1', k_2', k_3' są obrazami odpowiednio prostych k_1, k_2, k_3 w symetrii względem prostej n. Punkty $A_1 \in k_1$, $A_2 \in k_2$, $A_3 \in k_3$ są różne od P. Niech prosta A_iA_j przecina prostą k_l' w punkcie A_l', gdzie $\{i,k,l\} = \{1,2,3\}$. Pokazać, że punkty A_1', A_2', A_3' są współliniowe.

16. (*Zawody drużynowe*) Wyznaczyć:

(a) $\displaystyle\min_{f_i\colon[0,1]\to\mathbf{R}}\ \max_{0\le x_i\le 1} \left|f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n) \ - \ x_1x_2\ldots x_n\right|,$

(b) $\displaystyle\min_{f_i\colon[0,1]\to\mathbf{R}}\ \max_{0\le x_i\le 1} \left|f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n) \ - \ (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\right|.$

17. (*Zawody drużynowe*) Znaleźć wszystkie czworokąty wypukłe z całkowitymi długościami boków, które można wpisać w okrąg i których pole jest równe obwodowi.

18. (*Zawody drużynowe*) Liczba $\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ jest liczbą pierwszą. Niech

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i.$$

Dowieść, że $f(x)$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia niższego o współczynnikach całkowitych.

19. Udowodnić, że liczba $\left[\dfrac{(m-1)!}{m}\right]$ jest parzysta dla $m > 4$.

20. Dowieść, że można pokolorować liczby $1, 2, \ldots, 1986$ na dwa kolory tak, aby nie było jednokolorowego ciągu arytmetycznego o długości 18.

21. Dany jest trójkąt ABC. Spodek wysokości C' z punktu C leży wewnątrz odcinaka AB. Rozpatrzmy okrąg o średnicy CC'. Prosta AC przecina ten okrąg w punktach C i P, a prosta CB w punktach C i X. Prosta AX przecina prostą CC' w punkcie Q. Udowodnić, że punkty B, P, Q są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = CB$.

22. Pola ścian czworościanu wynoszą S_1, S_2, S_3, S_4. W czworościanie tym leżą cztery niewspółpłaszczyznowe punkty P_1, P_2, P_3, P_4 o tej własności, że jeśli przez d_{ij} oznaczymy odległość od punktu P_i do ściany S_j to dla każdego $i \in \{1,2,3,4\}$ czwórka d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4} jest permutacją tej samej czwórki liczb. Pokazać, że $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

23. Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest ciągła i spełnia równanie funkcyjne:

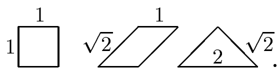
$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)} \qquad \text{dla } x \neq y\,.$$

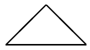
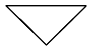
Wyznaczyć tę funkcję.

24. Czy istnieje liczba naturalna, która ma nie więcej niż 444 cyfry, dzieli się przez 1993 oraz czytana od końca jest tą samą liczbą?

25. Znaleźć wszystkie pary liczb naturalnych m, n takie, że:

$$2! + 3! + \ldots + n! = m^3.$$

26. Dane są klocki trzech rodzajów: 

. Z klocków tych ułożono prostokąt o wymiarach $m \times n$, przy czym wierzchołki klocków leżą w punktach kratowych prostokąta. Udowodnić, że trójkątów  jest tyle samo co trójkątów  .

27. Dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$. Niech B_i będzie środkiem boku A_jA_k $(i \neq j \neq k \neq i)$. Niech o będzie okręgiem wpisanym w ten trójkąt. Z punktu B_i prowadzimy styczną do tego okręgu różną od boku A_jA_k, która przecina prostą B_jB_k w punkcie C_i. Udowodnić, że punkty C_1, C_2, C_3 są współliniowe.

28. (*Zawody drużynowe*) Niech dla ustalonego $n \geqslant 1$ liczby nieujemne $w_1, w_2, \ldots, w_n$ spełniają warunek:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+w_i} = 1.$$

Udowodnić, że zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{w_i} \geqslant (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{w_i}}.$$

29. (*Zawody drużynowe*) Zbadać, czy ciąg

$$a_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \text{NWD } (i,j) \right)^{1/n^2}$$

jest zbieżny.

30. (*Zawody drużynowe*)

(a) Dane są trzy współśrodkowe okręgi o_1, o_2, o_3 o promieniach $r_1 < r_2 < r_3$. Z punktu $A \in o_3$ prowadzimy styczne do o_1 i o_2 odpowiednio w punktach P i Q, które przecinają o_3 odpowiednio w punktach B i C $(A \neq B, C)$. Prosta PQ przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach R $(R \neq P)$ i S $(S \neq Q)$. Wykazać, że prosta CR jest styczna do o_1, prosta BS jest styczna do o_2 i że proste te przecinają się na o_3.

(b) Rozważyć powyższe zadanie przy założeniu, że okręgi o_1, o_2, o_3 są parami styczne zewnętrznie, a nie współśrodkowe.