Obóz przygotowawczy do zawodów międzynarodowych
Zwardoń, 22.05.1995 — 4.06.1995.

Pierwsze Zawody Indywidualne:

1. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{p-1}{k}^2} = \frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi. Udowodnić, że m jest podzielne przez p.

2. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c, A, B, C takie, że prostopadłościan o wymiarach $A \times B \times C$ można podzielić na prostopadłościany $a \times b \times c$. Udowodnić, że a jest dzielnikiem przynajmniej jednej z liczb A, B, C.

3. Dany jest okrąg o oraz różne punkty A i B na zewnątrz tego okręgu. Dla każdego okręgu q przechodzącego przez punkty A i B i przecinającego okrąg o, punkty C_q i D_q są punktami wspólnymi tych okręgów. Udowodnić, że stosunek odległości punktów A i B od prostej C_qD_q nie zależy od wyboru okręgu q.

4. Dowieść, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba $\left[n\cdot\dfrac{7-\sqrt{44}}{8-\sqrt{44}}\right] + \left[n\cdot\dfrac{7+\sqrt{44}}{8+\sqrt{44}}\right]$ jest pierwsza.

5. Dowieść, że funkcja $f(x) = x^3$ nie jest sumą trzech funkcji okresowych.

6. Wielościan o ośmiu ścianach trójkątnych, w którym z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie cztery krawędzie jest wpisany w sferę. Jego trzy przekątne przecinają się w jednym punkcie i są parami prostopadłe. Wykazać, że ortocentra i środki ciężkości wszystkich ścian leżą na jednej sferze.

Drugie Zawody Indywidualne:

1. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 111$ względnie pierwszej z 10 istnieje dodatnia liczba palindromiczna podzielna przez n i mająca mniej niż $\frac{n}{\pi+1}$ cyfr.

2. Wielomian $W(x)$ stopnia $n > 2$ o współczynnikach całkowitych ma n różnych pierwiastków rzeczywistych tworzących ciąg arytmetyczny. Dowieść, że $W(x)$ jest iloczynem dwóch wielomianów dodatniego stopnia o współczynnikach wymiernych.

3. Czy istnieje 1995 punktów płaszczyzny takich, że żadne trzy z nich nie są współliniowe i ich wzajemne odległości są:
(a) liczbami całkowitymi?
(b) parami różnymi liczbami całkowitymi?

4. Czy równanie $n(n+5) = 2m(m+5) + 2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych m, n?

5. N punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie są współliniowe połączono odcinkami każdy z każdym, przy czym użyto trzech kolorów. Dowieść, że można znaleźć zbiór A złożony z co najmniej $\frac{N}{2}$ spośród tych punktów oraz kolor k takie, że dowolne dwa punkty zbioru A można połączyć łamaną złożoną z odcinków koloru k, której wierzchołki należą do A.

6. Na bokach BC i AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D i E. Punkt F jest punktem przecięcia odcinka DE i dwusiecznej kąta przy wierzchołku C. Dowieść, że jeśli $BD = DF$ oraz $AE = EF$, to punkt F jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Trzecie Zawody Indywidualne:

1. Wykazać, że dla nieskończenie wielu n naturalnych liczba $\binom{2n}{n}$ ma ostatnią cyfrę 8.

2. Dane są niezależne zmienne losowe X i Y o wartościach całkowitych nieujemnych. Istnieje taka liczba naturalna n, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej k mamy

$$P(X+Y=k) = \binom{n}{k}\cdot 2^{-n}.$$

Dowieść, że istnieje taka liczba naturalna m, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej k zachodzi

$$P(X=k) = \binom{m}{k}\cdot 2^{-m}.$$

Uwaga: Niezależność zmiennych losowych X i Y oznacza, że dla dowolnych liczb a i b zachodzi równość $P(X{=}a, Y{=}b) = P(X{=}a)\cdot P(Y{=}b)$.

3. Udowodnić, że dla dowolnej prostej ℓ, pole rzutu prostokątnego sześcianu jednostkowego na płaszczyznę prostopadłą do ℓ jest nie mniejsze od długości rzutu prostokątnego tego sześcianu na ℓ. Kiedy zachodzi równość?

4. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $a > 1$ takie, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniającej równość $f(a) = f(0)$ istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x+1) = f(x)$.

5. Na nieskończonej szachownicy przemalowno na zielono skończoną liczbę pól w taki sposób, że figura utworzona z zielonych pól składa się z jednego kawałka bez dziur, tzn. każde dwa pola zielone można połaczyć drogą złożoną z pól zielonych, z których kolejne mają wspólny bok, natomiast dowolne dwa pola nie należące do figury można połączyć drogą złożoną z pól nie należących do figury. Czy tak otrzymaną figurę można pokryć kostkami domina jeśli wiadomo, że:
(a) liczba pól białych przemalowanych na zielono jest taka sama jak liczba przemalowanych pól czarnych?
(b) liczba pól białych przemalowanych na zielono jest taka sama jak liczba przemalowanych pól czarnych oraz każde dwa pola zielone można połączyć dwiema drogami zielonymi nie mającymi ze sobą pól wspólnych?

6. Punkty D i E należą odpowiednio do boków AC i AB trójkąta ABC i $BD = CE$. Kąt DBC jest większy od kąta ECB. Wykazać, że kąt ACE jest większy od kąta ABD.

Dziesięć łatwych zadań geometrycznych:

1. Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu, podstawa AB trapezu jest styczna do tego okręgu w punkcie R, podstawa CD jest styczna do okręgu w punkcie S. Wykazać, że $AR \cdot DS = BR \cdot CS$.

2. W kwadracie $ABCD$ zawarty jest łuk okręgu o środku B i promieniu BA. Punkt S należy do tego łuku. Odległości punktu S od odcinków AC, AD i CD są równe odpowiednio p, q, r. Wykazać, że $p^2 = qr$.

3. Czy płaski przekrój sześcianu może być pięciokątem foremnym?

4. Trzy proste styczne do paraboli przecinają się w punktach A, B, C. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie ABC przechodzi przez ognisko tej paraboli.

5. Czy istnieje taki wielościan, który ma 13 wierzchołków, 19 krawędzi i 8 ścian?

6. Dany jest ostrosłup czworokątny o wszystkich krawędziach równej długości. Do ściany bocznej tego ostrosłupa doklejono czworościan foremny o takiej samej długości krawędzi. Wykazać, że środki ciężkości wszystkich, oprócz dwóch, ścian tak otrzymanego wielościanu leżą na jednym okręgu.

7. Punkty E, S, F leżą odpowiednio na bokach BC, CD, DA równoległoboku $ABCD$ i $CE = AF$. Odcinki AS i BS przecinają odcinek EF odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że pole trójkąta SPQ jest równe sumie pól trójkątów APF i BQE.

8. Proste k, ℓ, m są parami skośne, prosta p nie jest równoległa do żadnej z nich. Jaka może być liczba prostych równoległych do p i jednakowo oddalonych od prostych k, ℓ, m?

9. W trójkacie równoramiennym ABC o kącie ABC równym 108° poprowadzono dwusieczną kąta A, która przecina bok BC w punkcie D. Punkt E jest przecięciem boku AC i prostej równoległej do boku AB przechodzącej przez punkt D. Obliczyć kąt ABE.

10. Czy istnieje wielościan o polu 450 opisany na sferze o promieniu 6 i mający pola wszystkich ścian całkowite podzielne przez 6?

11. Wykazać, że dla czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg zachodzi równość:
$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

Dziesięć łatwych zadań niegeometrycznych pierwszego rodzaju:

1. Ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r, będących liczbami całkowitymi dodatnimi, nie zawiera żadnej potęgi, to znaczy liczby postaci m^n, gdzie $m, n > 1$. Czy wtedy musi istnieć liczba pierwsza p taka, że $p \parallel a_1$ oraz $p^2 \mid r$?

2. Dowieść, że z każdego postępu arytmetycznego o wyrazach całkowitych dodatnich można wybrać nieskończony podciąg, którego wszystkie wyrazy mają takie same czynniki pierwsze.

3. Jaka jest ostatnia cyfra liczby $\left[(3+\sqrt{5})^n\right]$ w zależności od n?

4. Czy liczba $13+5\sqrt{7}$ jest sumą liczb postaci $(a+b\sqrt{7})^2$, gdzie a, b są wymierne?

5. Znaleźć taką liczbę naturalną n, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \in [n, n+1995]$ istnieje taka permutacja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ liczb $1, 2, \ldots, n$, że $\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n}=k$.

6. Niech dla n naturalnego, M_n będzie liczbą takich liczb naturalnych $m \in [1, n]$, że $\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right]$ jest liczbą parzystą. Czy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}$, a jeśli tak, to ile ona jest równa?

7. Czy istnieją dwie różne potęgi dwójki złożone z tych samych cyfr w zapisie dziesiętnym, tj. będące anagramami? Nie dopuszczamy zer początkowych w zapisie dziesiętnym.

8. Wybieramy liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{1995} \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Wykonujemy następujący eksperyment: rzucamy kostką do gry 1995 razy z tym, że jeśli w k-tym rzucie wypadnie a_k oczek, zaniedbujemy dalsze rzuty. Jak należy wybrać liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{1995}$, by wartość oczekiwana sumy oczek we wszystkich nie zaniedbanych rzutach była największa?

9. Kulawa wieża porusza się po nieskończonej szachownicy. Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ przesuwa się o jedno pole w górę, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ w dół, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ w prawo i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ w lewo. Kolejne ruchy są od siebie niezależne. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że po 20 ruchach wieża wróci do miejsca startu.

10. 40 milionów ludzi gra w totolotka. Stawka wynosi 1 zł, całą pulę dzieli się w równych częściach pomiędzy osoby, które trafiły 6 liczb z 49. Częściowe trafienia nie są wynagradzane. W przypadku braku „szóstek” wszystkim graczom zwraca się stawkę 1 zł. Każdy gracz wypełnia jeden zakład, przy czym 39999998 graczy typuje liczby losowo w sposób od siebie niezależny. Bolek skreśla liczby $1,2,3,4,5,6$, a Lolek $7,8,9,10,11,12$. Czy wartość oczekiwana wygranej netto Bolka (po odliczeniu ceny zakładu) jest:
(a) równa zero?
(b) dodatnia?
(c) ujemna?

11. Dowieść, że jeśli p i q są liczbami niewymiernymi większymi od 1 i spełniającymi zależność $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, to zbiory $A=\{[p{\cdot}n] : n\in\mathbb{N}\}$ i $B=\{[q{\cdot}n] : n\in\mathbb{N}\}$ są rozłączne oraz $A\cup B=\mathbb{N}$.

Dziesięć łatwych zadań niegeometrycznych drugiego rodzaju:

1. Czy istnieje funkcja ciągła $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, która każdą wartość rzeczywistą przyjmuje dokładnie 1995 razy?

2. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z co najmniej jedna z następujących nierówności jest fałszywa:

$$4x(1-y)>1\,,\qquad 4y(1-z)>1\,,\qquad 4z(1-x)>1\,.$$

3. Znaleźć wszystkie rozwiązania rzeczywiste układu równań:

$$\begin{cases}(x+y)^3 = z\\(y+z)^3 = x\\(z+x)^3 = y\end{cases}$$

4. Na planecie χ-chromat Centauri żyje 31, 5, 1995, amarantowych, dereniowych i ledwokwitnącowiśniowych kameleonów. Gdy dwa kameleony różnego koloru się spotkają, oba zmieniają kolor na trzeci. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie na χ-chromacie Centauri będzie tyle samo kameleonów każdego koloru?

5. Dowieść, że istnieje liczba naturalna, którą można zapisać na co najmniej 1995 sposobów w postaci $x^2+y^3+z^5$, gdzie x, y, z są liczbami naturalnymi.

6. Czy istnieje funkcja ciągła f określona na całej prostej taka, że dla dowolnego x rzeczywistego $f(f(x))=4^{-x}$?

7. Czy w pola szachownicy 8×8 można wpisać parami różne liczby całkowite dodatnie tak, aby każdy kwadrat złożony z pól tej szachownicy miał równe iloczyny liczb na obu przekątnych?

8. Wielomian $P(x)$, stopnia $n>0$, o współczynnikach rzeczywistych spełnia dla każdego x rzeczywistego nierówność $P(x)\geqslant 0$. Dowieść, że dla dowolnego x rzeczywistego zachodzi nierówność:

$$P(x)+P'(x)+P''(x)+\ldots+P^{(n)}(x)\geqslant 0\,.$$

9. Wielomian $P(x)$, stopnia parzystego $n > 0$, o współczynnikach rzeczywistych spełnia dla każdego x rzeczywistego nierówność $P(x) \geqslant 0$. Dowieść, że dla dowolnego x rzeczywistego zachodzi nierówność:

$$P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \ldots + \frac{P^{(n)}(x)}{n!} \geqslant 0\,.$$

10. Wielomian $W(x)$ ma dokładnie dwa rzeczywiste miejsca zerowe. Czy stąd wynika, że $W(x) + 2W'(x)$ ma pierwiastek rzeczywisty ?

Pierwsze zawody drużynowe:

1. Dowieść, że istnieje liczba postaci 333333^{333333^n}, gdzie n jest liczbą naturalną, zakończona 333333^{333333} trójkami w zapisie dziesiętnym.

2. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest sumą kwadratów wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. Dowieść, że $W^2(x)$ jest sumą czwartych potęg wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

3. Sfery s_1, s_2, s_3, s_4 są parami rozłączne zewnętrznie. Sfera p jest styczna zewnętrznie do sfer s_1, s_2, s_3, s_4 odpowiednio w punktach A, B, C, D; sfera q jest styczna wewnętrznie do sfer s_1, s_2, s_3, s_4 odpowiednio w punktach E, F, G, H. Wykazać, że proste AE, BF, CG, DH przecinają się w jednym punkcie.

Drugie zawody drużynowe:

1. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi nierówność $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{[k\sqrt{2}]}\right| \leqslant 1995 \cdot \log_2 n\,.$

2. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nierówność

$$9\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant n(n-1) + 8\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$$

pociąga za sobą nierówność

$$8\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^3 < n^2 + 9\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^4\,.$$

3. Punkty P, A, B są niewspółliniowe i $PA = PB$. Z punktów A i B poprowadzono proste styczne do okręgu o środku P, przecinające się w punkcie M, nie należącym do symetralnej odcinka AB.
(a) Wykazać, że $MA \cdot MB = |PA^2 - PM^2|$.
(b) Przy ustalonych punktach P, A, B, znaleźć zbiór wszystkich takich punktów M.

Zadania rehabilitacyjne

Zadanie 1 z pierwszych zawodów drużynowych w rozbiciu na drobniusieńkie problemiczki:

Definicja: Mówimy, że a dzieli dokładnie b, co zapisujemy jako $a \parallel b$, gdy $a \mid b$ oraz $(a, \frac{b}{a}) = 1$.

Założenie: Niech $A \equiv 333 \pmod{1000}$.

1. Dowieść, że $10^k \parallel A^{5\cdot 10^{k-2}} - 1$ dla $k > 3$.

2. Dowieść, że jeśli $k > 3$, to $A^m \equiv A^n \pmod{10^k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \equiv n \pmod{5 \cdot 10^{k-2}}$.

3. Dowieść, że jeśli $k > 3$, $0 < R < 10^k$ oraz $A^n \equiv R \pmod{10^k}$, to dla dowolnego $0 \leqslant c < 10$ istnieje m takie, że $A^m \equiv c \cdot 10^k + R \pmod{10^{k+1}}$.

4. Dowieść, że jeśli $A \equiv 3333 \pmod{10000}$, to A^n może mieć dowolnie wiele trójek końcowych.

5. Niech $A = 333333$ oraz $N > 6$. Dowieść, że istnieje $R_N \equiv 1 \pmod{5\cdot 10^4}$ takie, że dla $m \equiv R_N \pmod{5\cdot 10^{N-2}}$ liczba A^m jest zakończona N trójkami. Dowieść, że istnieje n takie, że $A^n \equiv R_N \pmod{10^N}$.

6. Niech $A = 33333$. Dowieść, że jeśli liczba A^m jest zakończona sześcioma trójkami, to $m \equiv 5001 \pmod{10000}$. Dowieść, że dla żadnego n naturalnego nie zachodzi kongruencja $A^n \equiv 5001 \pmod{10^4}$.