# *Obóz przygotowawczy do zawodów międzynarodowych* *Zwardoń,* 2.06.1996 — 16.06.1996.

*Zawody indywidualne:*

**1.** Niech $x_n$ będzie $n$-tą liczbą palindromiczną. Czy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2}$ i jeśli tak, to ile ona wynosi?

**2.** Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

$$f(x) + f(y) + 5xy(x + y) = f(x + y).$$

**3.** Czy z kwadratu o boku 7,99 można wyciąć 50 kwadratów jednostkowych?

**4.** Czy istnieją parami różne liczby naturalne $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$, $y_1, y_2, \ldots, y_{1996}$ większe od 1 i takie, że dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \{1, 2, \ldots, 1996\}$ liczba $\sum\limits_{i\in A} \log_{x_i} y_i$ jest niewymierna, gdy $A \neq \{1, 2, 3, \ldots, 1996\}$, ale $\sum\limits_{i=1}^{1996} \log_{x_i} y_i$ jest liczbą wymierną?

**5.** Niech $n \geqslant 4$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Wyznaczyć kres górny i kres dolny cyklicznej sumy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}},$$

gdzie $x_{n+1} = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n = x_0$ przebiegają wszystkie układy liczb rzeczywistych dodatnich.

**6.** Wypukły czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu o środku $S$, jest on również wpisany w okrąg. Prosta równoległa do $AB$, przechodząca przez $S$ przecina $AD$ w punkcie $P$ i $BC$ w punkcie $Q$, prosta równoległa do $BC$, przechodząca przez $S$ przecina $AB$ w punkcie $K$ i $CD$ w punkcie $L$. Wykazać, że $PQ = KL$.

**7.** Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej $p \geqslant 5$ istnieją liczby naturalne $m < n < \sqrt{p}$ takie, że $p-n^2 \mid p-m^2$.

**8.** Niech $m_a$, $m_b$, $m_c$ będą długościami odpowiednich środkowych trójkąta o bokach $a$, $b$, $c$. Udowodnić, że

$$m_a(bc - a^2) + m_b(ca - b^2) + m_c(ab - c^2) \geqslant 0.$$

**9.** Ciąg $\{R_n\}$ jest określony rekurencyjnie:

$$R_1 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad R_{n+1} = 1 + \frac{n}{R_n} \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Dowieść, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$\left| \left(R_n - \frac{1}{2}\right)^2 - n \right| < 1.$$

**10.** Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 = -10y + 31 \\ y^2 = -6z + 39 \\ z^2 = -2t + 39 \\ t^2 = 2x + 47 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych $x$, $y$, $z$, $t$.

**11.** W pudełku znajduje się 1999 krówek popularnych śmietankowych i 2002 krówki popularne czekoladowe. Wybieramy losowo $k$ krówek popularnych. Dla jakich liczb $k$ prawdopodobieństwo wylosowania nieparzystej liczby krówek popularnych czekoladowych jest równe $\frac{1}{2}$?

**12.** Udowodnić, że istnieją takie dwa niepodobne czworościany, że w każdym z nich środki okręgów opisanych na ścianach są współpłaszczyznowe, ale dowolne dwa czworościany mające współliniowe środki okręgów opisanych na ścianach są podobne.

**13.** Ciąg $(a_n)$ liczb naturalnych dany jest rekurencyjnie wzorami:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}\,].$$

Dowieść, że w ciągu $(a_n)$ występuje nieskończenie wiele sześcianów liczb całkowitych.

**14.** Punkt $S$ jest środkiem ustalonego okręgu $o$, $M$ jest rzutem prostokątnym punktu $S$ na ustaloną prostą $l$. Niech $P$ będzie zmieniającym się punktem na $o$, natomiast $c$ będzie okręgiem o średnicy $PM$ przecinającym odpowiednio $o$ i $l$ po raz drugi w punktach $X$ i $Y$. Udowodnić, że wszystkie proste $XY$ mają punkt wspólny.

**15.** Dowieść, że wielomian
$$\sum (x-n_1)(x-n_2)(x-n_3)\ldots(x-n_{1000}),$$
gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie układy liczb całkowitych $1 \leqslant n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{1000} \leqslant 1996$, nie ma pierwiastków wielokrotnych.

**16.** Rozwiązać układ równań:
$$\begin{cases} 1+x_1 &= x_2^2 \\ 1+x_2 &= x_3^2 \\ \ldots\ldots\ldots & . \quad \ldots\ldots \\ 1+x_{1995} &= x_{1996}^2 \\ 1+x_{1996} &= x_1^2 \end{cases}$$
w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1996}$.

**17.** Niech $S$ będzie zbiorem wszystkich $n^2$ punktów kratowych, których obie współrzędne są liczbami naturalnymi nie przekraczającymi $n$. Malujemy na czerwono $n$ losowo wybranych punktów zbioru $S$. Przez $W_n$ oznaczmy wartość oczekiwaną liczby prostokątów o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, których wszystkie cztery wierzchołki zostały pokolorowane na czerwono. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} W_n$ .

**18.** Wewnątrz trójkąta $ABC$ znajduje się punkt $P$ taki, że $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA < \sphericalangle PAB$. Prosta $BP$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punktach $B$ i $E$. Okrąg opisany na trójkącie $APE$ przecina prostą $CE$ w punktach $E$ i $F$. Udowodnić, że
$$S(APEF) = S(ABP) + S(BCP)$$
wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle PBA = \sphericalangle BCA$.

## *Zadania domowe:*

**1.** Dowieść, że w zapisie dziesiętnym liczby $1996^{1996^{1996}}$ co najmniej 1996 cyfr jest różnych od 7.

**2.** Liczbę nazywamy homonimiczną, jeśli ma parzystą liczbę cyfr i składa się z tej samej grupy cyfr powtórzonej dwukrotnie, np. 11, 7373, 15941594. Dowieść, że istnieją parami różne liczby naturalne $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1996}$ mające tę samą liczbę cyfr i takie, że liczby $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_{1996}^2$ są homonimiczne.

**3.** Odcinek długości 1996 na płaszczyźnie jest równoległy do osi $OX$ i nie zawiera punktów kratowych (tzn. o obu współrzędnych całkowitych). Czy można tak poruszać tym odcinkiem, aby w żadnym momencie nie zawierał punktów kratowych, a po zakończeniu ruchu byłrównoległy do osi $OY$?

**4.** Czy istnieje taki wielomian $W$ stopnia 1996, że dla dowolnego $x$ niewymiernego $W(x)$ jest liczbą niewymierną?

**5.** Czy kulę domkniętą o promieniu 1996 można rozłożyć na sumę rozłącznych okręgów?

**6.** Dowieść, że istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia $x$, że dla $n$ naturalnych liczba $[x^n]$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $n$ jest liczbą pierwszą.

**7.** Dowieść, że dla dowolnych liczb naturalnych $n$ i $k$ spełniających nierówność $2 \leqslant k \leqslant n$ oraz dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sum\limits_{l=-k+1}^{k-1} x_{i+l}} \leqslant \left[\frac{n}{k}\right],$$
gdzie numeracja $x$-ów jest cykliczna, tzn. $x_{n+s} = x_s$.

**8.** Ciąg $(a_n)$ jest określony rekurencyjnie: $a_1 = 16,\ a_2 = 20,\ a_3 = 25$ oraz
$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \qquad \text{dla } \ n \geqslant 1.$$
Niech $p > 10000$ będzie liczbą pierwszą. Obliczyć resztę z dzielenia liczby $a_q$ przez $p^{1996}$, gdzie $q = (p^p)!$ .

**9.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku $O$. Proste $AD$ i $BC$ przecinają się w punkcie $P$. Niech $L$ i $M$ będą odpowiednio środkami boków $AD$ i $BC$, niech zaś $Q$ i $R$ będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów $O$ i $P$ na prostą $LM$. Dowieść, że $LQ = RM$.

**10.** Dany jest wypukły $n$-kąt $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geqslant 3$) i punkt $P$. Załóżmy, że rzuty prostokątne punktu $P$ na proste $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ leżą na okręgu o środku $O$.
$(a)$ Dowieść, że jeśli punkt $P$ należy do wnętrza $n$-kąta, to $O$ również.
$(b)$ Czy $(a)$ jest prawdziwe dla wklęsłych $n$-kątów?
$(c)$ Dla jakich $n$ twierdzenie odwrotne do $(a)$ jest prawdziwe?

## *Osiem łatwych zadań geometrycznych:*

**1.** Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu o promieniu 1, $E$ jest środkiem $AB$, $F$ jest środkiem $CD$; $EF = t$. Wykazać, że $S(ABCD) \geqslant 2t$. Dla jakich czworokątów ma miejsce równość?
($S(ABCD)$ oznacza pole czworokąta $ABCD$).

**2.** Dany jest okrąg $o$ oraz punkt $H$ należący do wnętrza koła wyznaczonego przez $o$. Znaleźć zbiór środków boków takich trójkątów wpisanych w $o$, by $H$ był ich ortocentrum.

**3.** Dane są różne punkty $A$ i $B$. Rozważmy pary okręgów stycznych zewnętrznie i stycznych do prostej $AB$ w punktach odpowiednio $A$ i $B$. Rozważmy drugie proste styczne do tych okręgów odpowiednio w różnych punktach $A'$ i $B'$. Znaleźć zbiór środków tak otrzymanych odcinków $A'B'$ przy ustalonych punktach $A$ i $B$.

**4.** Punkt $B$ należy do odcinka $AC$. Rozważmy okręgi przechodzące przez punkty $A$ i $C$. Przez $B$ i środek jednego z łuków $AC$ takiego okręgu prowadzimy prostą przecinającą taki okrąg w drugim punkcie $P$. Znaleźć zbiór tak otrzymanych punktów $P$ przy ustalonych punktach $A$, $B$ i $C$.

**5.** Czworokąt $PQRS$ jest wpisany w okrąg. Jego przekątne przecinają się w punkcie $M$. Punkty $A$, $B$, $C$, $D$ są rzutami prostokątnymi $M$ na proste $PQ$, $QR$, $RS$, $SP$. Wykazać, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

**6.** $AB$ jest średnicą okręgu $o$, prosta $k$ jest styczna do okręgu $o$ w punkcie $A$, punkt $F$ należy do $k$, prosta $BF$ przecina okrąg $o$ w drugim punkcie $D$, prosta styczna do $o$ w punkcie $D$ przecina prostą $k$ w punkcie $C$. Wykazać, że $C$ jest środkiem odcinka $AF$.

**7.** Dana jest sfera $s$, prosta $k$ oraz punkt $A$. Przez punkt $A$ prowadzimy płaszczyznę równoległą do $k$, styczną do $s$. Znaleźć zbiór takich punktów $A$, dla których nie istnieje rozwiązanie tego zadania, przy ustalonych $k$ i $s$.

**8.** Każda krawędź pewnego czworościanu przystaje do krawędzi skośnej do niej. Wykazać, że ściany tego czworościanu są trójkątami ostrokątnymi.

**9.** Punkt $F$ nie należy do żadnej z dwóch przecinających się prostych $k$ i $l$. Znaleźć zbiór drugich ognisk $G$ takich elips stycznych do $k$ i $l$, że $F$ jest ich pierwszym ogniskiem.

**10.** Wykazać, że w dowolnym trójkącie rzuty prostokątne dowolnego spodka wysokości na pozostałe boki i na wysokości są współliniowe.

## *Osiem łatwych zadań niegeometrycznych:*

**1.** Dowieść, że liczba

$$\left(\sqrt{11+\sqrt{44}}-\sqrt{11}\right)^{\left(\sqrt{12+\sqrt{44}}-\sqrt{11}\right)^{\left(\sqrt{13+\sqrt{44}}-\sqrt{11}\right)}}$$

jest niewymierna.

**2.** Niech $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n \geqslant 1$. Dowieść, że jeśli

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} = \frac{p_n}{q_n},$$

gdzie $p_n$ i $q_n$ są całkowite, to $19 \mid p_n$.

**3.** Czy liczb naturalnych, które nie dadzą się przedstawić w postaci sumy kwadratów skończenie wielu kolejnych liczb naturalnych jest skończenie wiele?

**4.** (**Zadanie niegeometryczne czwarte**) W przestrzeni dany jest zbiór $S$ złożony z $n \geqslant 4$ punktów. Dowieść, że wśród nich znajdą się
($a$) takie trzy różne punkty $A$, $B$, $C$, że dla dowolnego czwartego punktu $D \in S$ różnego od $A$, $B$, $C$ zachodzi nierówność

$$AB + BC + CA \leqslant AD + BD + CD,$$

($b$) takie trzy różne punkty $A'$, $B'$, $C'$, że dla dowolnego czwartego punktu $D' \in S$ różnego od $A'$, $B'$, $C'$ zachodzi nierówność

$$A'B' + B'C' + C'A' \geqslant A'D' + B'D' + C'D'.$$

**5.** Dowieść, że jeśli liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{36}$ spełniają nierówność $\sum\limits_{i=1}^{36} x_i^2 \leqslant 36$, to

$$1996 \cdot \sum_{i=1}^{36} x_i + \sum_{i=1}^{36} x_i^4 \leqslant 36 \cdot 1997.$$

**6.** Wyznaczyć wszystkie ciągi $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ liczb rzeczywistych dodatnich takie, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 96, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 216, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^6 = 729.$$

**7.** Dla jakich $n$ naturalnych liczba $2^n + 5 \cdot 3^n$ jest kwadratem liczby całkowitej?

**8.** Czy istnieje taka liczba naturalna, której kwadrat ma sumę cyfr równą 1996?

**9.** Czy istnieje 1996 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma co najmniej 1996 różnych dzielników pierwszych?

**10.** Dany jest wielomian $W$ stopnia większego lub równego 5 o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że $W$ przyjmuje wartość 5 dla co najmniej 5-ciu różnych argumentów całkowitych. Dowieść, że $W$ nie przyjmuje wartości 96 dla żadnego argumentu całkowitego.

*Pierwsze zawody drużynowe:*

**1.** Dla jakich liczb naturalnych $n$ liczba $\binom{n}{2}!$ dzieli się przez liczbę $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot n!$ ?

**2.** Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n$, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:
*Dla dowolnych liczb naturalnych $a$, $p$ i $q$ takich, że $n \mid p - q$ zachodzi podzielność $n \mid a^p - a^q$.*

**3.** Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $6^x = 43 \cdot 5^y + 1$ w liczbach całkowitych $x$, $y$.

**4.** Każde dwa spośród 222 trójkami niewspółliniowych punktów płaszczyzny połączono odcinkiem czerwonym lub zielonym. Dowieść, że można wybrać z nich sześć takich punktów, z których każde dwa są połączone tym samym kolorem.

**5.** Znaleźć trzy ostatnie cyfry liczby $\left[\,(4 + \sqrt{24})^{1002}\,\right]$.

**6.** Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$\big(f(x+y)\big)^2 = f(1)f(x^2) + 2f(x)f(y) + f(1)f(y^2)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych $x$ i $y$.

**7.** Okręgi $c_1$ i $c_2$ o środkach $O_1$ i $O_2$ przecinają się w punktach $A$ i $B$. Prosta $l$ przechodząca przez punkt $A$ przecina odpowiednio okręgi $c_1$ i $c_2$ w drugich punktach $C$ i $D$. Proste $CO_1$ i $DO_2$ przecinają się w punkcie $P$, a prosta $m$ przechodząca przez $P$ i prostopadła do $CD$ przecina prostą $AB$ w punkcie $Q$. Dowieść, że punkty $P$, $D$, $Q$, $C$ i $B$ leżą na jednym okręgu.

**8.** Niech $D$, $E$, $F$ będą punktami leżącymi na bokach $BC$, $CA$, $AB$ trójkąta $ABC$ oraz niech $R$ będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Udowodnić, że

$$\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right)\big(DE + EF + FD\big) \geqslant \frac{AB + BC + CA}{R}.$$

**9.** Punkt $S$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$, punkty $P$ i $Q$ są rzutami punktu $A$ odpowiednio na proste $BS$ i $CS$. Wykazać, że

$$\frac{AP}{BS} + \frac{AQ}{CS} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

*Drugie zawody drużynowe:*

**1.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych $n$ takich, że $2^n$ w zapisie dziesiętnym ma końcówkę $n$, tzn. $10^k \mid 2^n - n$, gdzie $k = [\log_{10} n] + 1$.

**2.** Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x+y+z) + f(x) + f(y) + f(z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z) + f(0)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych $x$, $y$ i $z$.

**3.** Czy istnieje podzbiór płaszczyzny, którego rzut prostokątny na dowolną prostą jest:
$(a)$ sumą trzech rozłącznych odcinków otwartych?
$(b)$ sumą czterech rozłącznych odcinków otwartych?
$(c)$ sumą 1996 rozłącznych odcinków otwartych?