Obóz naukowy
Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 6 - 20 czerwca 1999

Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 6 - 20 czerwca 1999

Dom wczasowy ”Zgoda”, Zwardoń 45
34-737 ZWARDOŃ
tel. 0-33-8646-328

Kadra:
Jerzy Bednarczuk
Rafał Łochowski
Waldemar Pompe
Jarosław Włodarczyk
Jarosław Wróblewski

Opracowanie tekstu i skład:
Waldemar Pompe
Jarosław Wróblewski

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`http://www.impan.gov.pl/~olimp/`

Treści zadań

Zawody indywidualne

Zadanie **1.**

Dane są liczby dodatnie a, b oraz liczba naturalna $n \geq 1$. Wyznaczyć największą wartość wyrażenia

$$\frac{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}\,,$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liczbami dodatnimi.

Zadanie **2.**

Oznaczmy przez $S(n)$ sumę cyfr liczby naturalnej n. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych, których nie da się przedstawić w postaci $n+S(n)$.

Zadanie **3.**

Rozstrzygnąć, czy dla dowolnego trójkąta ABC istnieją takie punkty P i Q, leżące na prostej BC, że

$$QC = 2 \cdot BP \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle BAP = \sphericalangle CAQ \neq 0\,.$$

Zadanie **4.**

Ciąg (c_n) jest określony rekurencyjnie wzorami

$$c_0 = 0,\ \ c_1 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad c_n = a(c_{n-1} + c_{n-2}) \qquad (n \geq 2),$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie wartości parametru a, że dla każdego n zachodzi nierówność $c_n < 10^n$.

Zadanie **5.**

Na płaszczyźnie dany jest zbiór E oraz takie koła otwarte (tzn. bez brzegu) $K_1, K_2, \ldots, K_n$, że $E \subseteq K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$. Udowodnić, że spośród tych kół można wybrać takie parami rozłączne koła $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_\ell}$, że

$$E \subseteq 3K_{i_1} \cup 3K_{i_2} \cup \ldots \cup 3K_{i_\ell}\,.$$

Uwaga: Jeśli K jest kołem o środku X i promieniu r, to $3K$ jest kołem o środku X i promieniu $3r$.

Zadanie **6.**

Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Punkt P, różny od wierzchołków trójkąta ABC, leży na tym łuku AB okręgu o, do którego należy punkt C. Punkty X, Y leżą odpowiednio na półprostych $AP^{\to}$, $BP^{\to}$, przy czym $AX = AC$ i $BY = BC$. Udowodnić, że wszystkie proste XY, wyznaczone przez różne położenia punktu P, mają punkt wspólny.

Zadanie **7.**

Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne a, dla których jest prawdziwe następujące zdanie:

$(*)$ *Dla dowolnej liczby naturalnej m, liczba $(1+a)^{a^{m-1}} - 1 - a^m$ jest podzielna przez a^{m+1}.*

Zadanie **8.**

Dany jest skończony zbiór A liczb naturalnych. Dowieść, że istnieje taki skończony zbiór B liczb naturalnych, że $B \supseteq A$ oraz

$$\prod_{x\in B} x = \sum_{x\in B} x^2.$$

Zadanie **9.**

Punkt E leży na boku AB rombu $ABCD$. Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty ADE, DEC, CEB mają wspólną styczną.

Zadanie **10.**

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia ε, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12} \in (0, \varepsilon)$ zachodzi nierówność

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{12} > \frac{x_1 x_2 x_3 \ldots x_{12}}{x_1^{10} + x_2^{11} + x_3^{12} + \ldots + x_{12}^{21}}\ .$$

Zadanie **11.**

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$\big(f(x)f(y)\big)^2 = f(x-y)f(x+y)\ ,$$

a ponadto $f(0) = f(1) = 1$ i $f\left(\frac{1}{3}\right) \neq 1$.

Zadanie **12.**

W Lolandii ku czci króla Lolisława Drugiego postawiono 66 pomników. Między każdymi dwoma pomnikami istnieje połączenie pasażerskie PKP, PKS, LOT lub Żeglugi Śródlądowej.

Dowieść, że istnieją takie trzy pomniki, między którymi połączenia pasażerskie obsługuje ten sam przewoźnik.

Zadanie **13.**

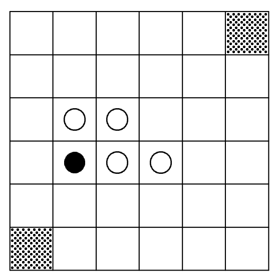
Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Okrąg p jest styczny do odcinków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q oraz jest styczny do okręgu o. Dowieść, że środek odcinka PQ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Zadanie **14.**

Zbiór $\{1,2,3,\ldots,65\}$ podzielono na cztery rozłączne zbiory. Dowieść, że istnieją takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne) należące do jednego z tych zbiorów, że $a+b=c$.

Zadanie **15.**

Na szachownicy $2n \times 2n$ stoi król Roszadnik-naprawowpróżni. W pojedynczym ruchu może on przesunąć się o jedno lub dwa pola w prawo, o jedno pole w górę lub o jedno pole po skosie w prawo w górę (zob. rysunek). Na ile sposobów król ten może pokonać drogę od lewego dolnego do prawego górnego rogu szachownicy w dokładnie $3n$ ruchach?



Zadanie **16.**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n iloczyn wszystkich takich liczb pierwszych p, które spełniają nierówność $n < p \le 2n$, jest mniejszy od 4^n.

Zadanie **17.**

Na zewnątrz trójkąta ABC są zbudowane trzy podobne trójkąty DBC, ECA, FAB, przy czym

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ECA = \sphericalangle FAB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DCB = \sphericalangle EAC = \sphericalangle FBA.$$

Niech $P = BE \cap CF$, $Q = CF \cap AD$, $R = AD \cap BE$.

Dowieść, że

$$\frac{QR}{AD} = \frac{RP}{BE} = \frac{PQ}{CF} .$$

Zadanie **18.**

Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\left(\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}\right)^2 \ge \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) \cdot \left(\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}\right).$$

Zadanie **19.**

Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Znaleźć wszystkie takie funkcje f przekształcające zbiór $\mathbb{N}$ na zbiór $\mathbb{N}$, które spełniają warunek: $n \mid m \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \mid f(m)$.

Zadanie **20.**

Dany jest trójkąt ABC. Punkt X leży na boku AB tego trójkąta. Prosta ℓ, różna od prostej AB, jest styczna zewnętrznie do okręgów wpisanych w trójkąty ACX i BCX. Wyznaczyć zbiór punktów przecięcia prostych ℓ i CX dla wszystkich punktów X leżących na odcinku AB.

Zadanie **21.**

Załóżmy, że wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma cztery pierwiastki dodatnie. Dowieść, że jeżeli $c + d = 0$, to $a + b \ge 80$.

Zadanie **22.**

Wyznaczyć wszystkie takie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje taka nieparzysta liczba naturalna n, że $f^n(x) = x$.

Uwaga: $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}(x)$.

Zadanie **23.**

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele nieprzystających trójkątów prostokątnych, których boki mają długości całkowite, a długości przyprostokątnych różnią się o 1.

Zadanie **24.**

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle ACB$. Punkt M jest środkiem boku BC. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinek AM w punkcie D. Udowodnić, że $\sphericalangle MDC \leq 45^\circ$.

Zadanie **25.**

Dowieść, że dla dowolnego k zbiór wszystkich liczb zapisywalnych w układzie siódemkowym przy pomocy $2k$ cyfr (dopuszczamy zera początkowe), z których k cyfr to zera i trójki, a pozostałe k cyfr to jedynki i dwójki, nie zawiera żadnego postępu arytmetycznego trójwyrazowego.

Zadanie **26.**

Koledzy Fredka mieszkają na okręgu o promieniu 541 km. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży.

Wszyscy koledzy mają w sumie tyle paliwa, aby wystarczyło Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu.

Dowieść, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc przeciwzegarowo po okręgu i tankując po drodze odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Zadanie **27.**

Punkt O jest środkiem okręgu o, opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Punkt D, różny od punktów A i C leży na tym łuku AC okręgu o, który nie zawiera punktu B. Punkt E leży na boku AB, przy czym $\sphericalangle ADE = \sphericalangle OBC$, zaś punkt F leży na boku BC i spełnia równość $\sphericalangle CDF = \sphericalangle OBA$. Dowieść, że $\sphericalangle DEF = \sphericalangle DOC$ oraz $\sphericalangle DFE = \sphericalangle DOA$.

Zadanie **28.**

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna n, że ze zbioru

$$\left\{0, 1, 2, 3, \ldots, \tfrac{1}{2}(3^n - 1)\right\}$$

można wybrać (2^n+1)-elementowy podzbiór nie zawierający żadnego trójwyrazowego postępu arytmetycznego.

Zawody drużynowe

Zadanie **1.**

Rodzina gra w karty. Jak zwykle tasuje ojciec. Przeważnie robi to w następujący sposób. Bierze talię kart w prawą rękę i przerzuca do lewej ręki po kilka kart, raz na wierzch, raz pod spód. Jednak dziś gra toczy się o wysoką stawkę i ojciec ma spocone ręce. Dlatego też musi dołożyć szczególnej staranności przy tasowaniu, aby karty się nie sklejały. Tasuje więc z pełną pedanterią, przerzucając do lewej ręki po jednej karcie. Jak wygląda dziś jego tasowanie? (Dla uproszczenia powiedzmy, że ojciec ma 10 kart.)

Najpierw ojciec przerzuca do lewej ręki pierwszą kartę z wierzchu, potem drugą kartę wrzuca na wierzch pierwszej, trzecią pod spód, czwartą na wierzch, piątą pod spód, … , dziesiątą na wierzch. Jeśli ojciec przejrzy teraz potasowane karty, zobaczy, że ułożyły się one w następującej kolejności (patrząc od wierzchu):

$$10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$$

(numery odnoszą się do pozycji kart przed tasowaniem).

Udowodnić, że dla dowolnego k, przy wielokrotnym tasowaniu talii k kart wszystkie karty wrócą **jednocześnie** na swoje pierwotne położenie po nie więcej niż k tasowaniach.

Zadanie **2.**

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna n, że ze zbioru

$$\left\{0,1,2,3,\ldots,\tfrac{1}{2}(3^n-1)\right\}$$

można wybrać (2^n+1)-elementowy podzbiór nie zawierający żadnego trójwyrazowego postępu arytmetycznego.

Zadanie **3.**

Niech α, β, γ będą miarami kątów leżących naprzeciwko boków a, b, c pewnego trójkąta. Udowodnić, że

$$\frac{a}{\alpha(b+c-a)}+\frac{b}{\beta(c+a-b)}+\frac{c}{\gamma(a+b-c)}\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\,.$$

Zadanie **4.**

Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano (po jego zewnętrznej stronie) trójkąty BCD i ACE, przy czym

$$AE=BD \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle BDC+\sphericalangle AEC=180^\circ.$$

Punkt F leży na boku AB i jest wyznaczony przez warunek

$$\frac{AF}{FB}=\frac{DC}{CE}\,.$$

Dowieść, że z odcinków o długościach $CD+CE$, BC, AC można zbudować trójkąt i że jest on podobny do trójkąta DEF.

Zadanie **5.**

Niech $B_1,B_2,\ldots,B_b$ będą takimi k-elementowymi podzbiorami zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, że $|B_i\cap B_j|\leq 1$ dla wszystkich $i\neq j$. Dowieść, że

$$b\leq\left[\frac{n}{k}\left[\frac{n-1}{k-1}\right]\right]\,.$$

($|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X.)

Zadanie **6.**

Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|12^k-5^n|$, gdzie k, n są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Zadanie **1.**

Znaleźć wszystkie takie funkcje ciągłe $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$\left(f(x)\,f(y)\right)^2 = f(x-y)\,f(x+y)\ .$$

Zadanie **2.**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n iloczyn wszystkich takich liczb pierwszych p, które spełniają nierówność $n < p \le 2n$, jest mniejszy od 4^n.

Zadanie **3.**

Zbiór $\{1,2,3,\ldots,65\}$ podzielono na 4 rozłączne zbiory. Dowieść, że znajdą się takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne) należące do jednego zbioru, że $a+b=c$.

Zadanie **4.**

Rozważamy wszystkie trójkąty równoramienne o wierzchołkach będących wierzchołkami danego n-kąta foremnego. Dla jakich n dokładnie połowa tych trójkątów to trójkąty ostrokątne?

Zadanie **5.**

Wśród $n \ge 2$ osób niektóre się ze sobą kolegują. Zakładamy, że jeśli osoba A uważa B za swojego kolegę, to B także uważa A za swojego kolegę. Jest od tego wszakże jeden wyjątek. Fredek uważa wszystkich za swoich kolegów niezależnie od tego, czy oni uważają go za swojego kolegę, czy też nie. Dla jakich n może się zdarzyć, że każda osoba twierdzi, że ma inną liczbę kolegów?

Zadanie **6.**

Długości przekątnych trapezu są równe 13 oraz 15, zaś jego wysokość jest równa 5. Wyznaczyć pole tego trapezu.

Zadanie **7.**

Która liczba jest większa:

$$\sin^2 17^\circ + \sin^2 67^\circ + 2\sin 17^\circ \sin 67^\circ \sin 6^\circ \quad \text{czy} \quad \sin^2 84^\circ \ ?$$

Zadanie **8.**

Dany jest czworokąt $ABCD$ nie będący trapezem. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA. Odcinki KM i NL przecinają się w punkcie S. Proste AB, CD oraz NL przecinają się w jednym punkcie. Również proste AD, BC oraz KM przecinają się w jednym punkcie. Udowodnić, że jeżeli w każdy z czworokątów $KBLS$, $NSMD$ można wpisać okrąg, to w czworokąt $ABCD$ można również wpisać okrąg.

Zadanie **9.**

Znaleźć największą liczbę naturalną k, przez którą podzielna jest każda z liczb $n^{16} - n^4$, gdzie $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Zadanie **10.**

Dany jest trójkąt ABC. Niech ABX oraz ACY będą takimi trójkątami zbudowanymi na zewnątrz trójkąta ABC, że

$$\sphericalangle XBA + \sphericalangle YCA = 180^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle XAB = \sphericalangle YAC = 15^\circ \ .$$

Udowodnić, że wszystkie proste XY, odpowiadające różnym położeniom punktów X i Y, mają punkt wspólny.

Zadanie **11.**

Czy sześcian można podzielić na różne sześciany w liczbie większej niż jeden sześcian?

Uwaga: Sformułowanie zadania jest zainspirowane przez przepisy wrocławskiego MPK, zgodnie z którymi *dozwolony jest przewóz psów, w liczbie nie większej niż jeden pies.*

Zadanie **12.**

Znaleźć pierwszą cyfrę po przecinku i ostatnią przed przecinkiem w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2000} .$$

Zadanie **13.**

Liczbą *bip* nazwiemy każdą liczbę postaci $\binom{2n}{n}$, gdzie $n \geq 1$. Liczbą *bip-bip* nazwiemy każdą liczbę *bip* lub sumę co najmniej dwóch różnych liczb *bip*.

Na nieskończonej szachownicy wprowadzono układ współrzędnych, którego punkty kratowe pokrywają się ze środkami pól danej szachownicy. Następnie usunięto z szachownicy wszystkie te pola, których środki mają współrzędne będącymi liczbami *bip-bip*. Czy tak powstałą figurę można pokryć kostkami domina?

Zadanie **14.**

Niech

$$K(n) = \sqrt{\left(\left\lceil \sqrt{n} \right\rceil\right)^2 - n} .$$

Dowieść, że w ciągu $a_n = K(10080n)$ występuje 100 kolejnych liczb całkowitych.

Uwaga: $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x.

Zadanie **15.**

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Pewien okrąg o środku I jest styczny do trzech okręgów dopisanych do trójkąta ABC. Czy stąd wynika, że trójkąt ABC jest równoboczny?

Zadanie **16.**

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których istnieje nieskończenie wiele takich par liczb naturalnych (a,b), że

$$a \mid b^k + 1 \qquad \text{oraz} \qquad b \mid a^k + 1.$$

Zadanie **17.**

Rozstrzygnąć, czy istnieją takie pięcioelementowe podzbiory A_1, $A_2, A_3, \ldots, A_{364}$ zbioru $\{1,2,3,\ldots,17\}$, że $|A_i \cap A_j| \leq 3$ dla wszystkich $i \neq j$. ($|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X.)

Zadanie **18.**

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Dowieść, że środki okręgów wpisanych w trójkąty AML, BKM, CLK leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.

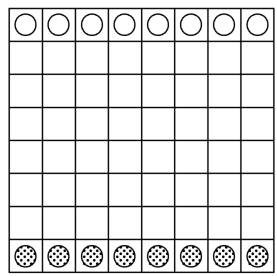
Zadanie **19.**

Niech h_a, h_b, h_c będą wysokościami, zaś r promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Czy z własności

$$h_a + h_b + h_c = 9r$$

wynika, że trójkąt ABC jest równoboczny?

Zadanie **20.**



Na szachownicy ustawionych jest 8 pionków białych i 8 czarnych, jak na rysunku. Jeden z graczy gra pionkami białymi, drugi czarnymi. Gracze wykonują ruchy na przemian poczynając od gracza grającego białymi. Dozwolony ruch polega na przesunięciu własnego pionka w pionie na wolne pole tak, aby nie przeskakiwać pionka przeciwnika. Wygrywa ten, kto uniemożliwi przeciwnikowi wykonanie ruchu. Rozstrzygnąć, czy jeden z graczy ma strategię wygrywającą. Jeśli tak, to który?

Zadanie **21.**

Pasem o szerokości d nazwiemy obszar zawarty między dwiema prostymi równoległymi odległymi o d, wraz z tymi prostymi. Czy kwadrat o boku 1 można pokryć skończoną liczbą pasów o sumie szerokości mniejszej od 1?

Zadanie **22.**

Za siedmioma górami, za siedmioma rzekami,
W III Wielokątnej Wypukłej mieszka
Docent Karol Juzek z dwunastoma kolesiami.

Każdy koleś ma zagrodę w kształcie koła
I każdy chce być wojewodą
W województwie ze swoją zagrodą.

Konstytucja III Wielokątnej Wypukłej przewiduje wszakże,
Że województwa muszą być Wielokątne Wypukłe także.
A ma być ich dwanaście.

Wykazać, że Docent Karol Juzek (tak mu dopomóż Boże)
Reformę administracyjną III Wielokątnej Wypukłej
Przeprowadzić może.

Regulamin Meczu Matematycznego

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy.

3. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

4. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania rozwiązania jednego z zadań. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą.

5. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie.

6. Jeżeli drużyna wywołana przyjmuje zadanie, Kapitan tej drużyny wyznacza członka swojej drużyny do zreferowania rozwiązania przy tablicy. Rozwiązanie to jest oceniane przez Jury.

7. Podczas referowania rozwiązania nie jest dopuszczalne komunikowanie się osoby referującej ze swoją drużyną, jak również drużyna przeciwna nie może w tym czasie przerywać referującemu zadając pytania, komentując fragmenty rozwiązania, itp. Osoba referująca może korzystać z notatek.

8. Kapitan drużyny prezentującej rozwiązanie może przerwać referowanie i wezwać osobę referującą na konsultację. Jeżeli osobą referującą jest Kapitan, wyznacza on swojego zastępcę uprawnionego do wezwania go na konsultację. Osoba referująca może także zażądać konsultacji. W czasie referowania jednego zadania dopuszcza się dwie konsultacje trwające łącznie nie dłużej niż 3 minuty.

9. Kapitan może zmienić osobę referującą dowolną liczbę razy. Każda zmiana powoduje odjęcie 1 punktu, o ile zadanie zostanie uznane za rozwiązane.

10. Czas na zreferowanie rozwiązania wynosi 15 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieje na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że zakończył referowanie, drużyna przeciwna zgłasza zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie **referujący** odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli Jury uznaje rozwiązanie za poprawne, punktuje je od 5 do 10 punktów. Jury może przyznać drużynie wywołującej te punkty, które zostały odjęte drużynie rozwiązującej, jeżeli usterki rozwiązania zostały przez tę drużynę zauważone.

13. Jeżeli Jury nie uznaje rozwiązania za poprawne, żadna z drużyn nie otrzymuje punktów, chyba, że drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy dyskwalifikujące rozwiązanie. Wtedy ma ona prawo do przedstawienia własnego rozwiązania na zasadach i przy punktacji określonych w pozycjach **6–12**.

14. Jeżeli drużyna wywołana nie przyjmie zadania, rozwiązuje je drużyna wywołująca zgodnie z zasadami określonymi w pozycjach **6–12**. Jeśli jednak nie przedstawi ona poprawnego rozwiązania, otrzyma -10 (minus 10) punktów.

15. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

Rozwiązania zadań

Zawody indywidualne

Zadanie **1.** Dane są liczby dodatnie a, b oraz liczba naturalna $n \geq 1$. Wyznaczyć największą wartość wyrażenia

$$(1) \qquad \frac{x_1x_2x_3\ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}\,,$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liczbami dodatnimi.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez w wyrażenie (1). Wtedy

$$a\cdot w = \frac{a}{a+x_1}\cdot\frac{x_1}{x_1+x_2}\cdot\frac{x_2}{x_2+x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}\cdot\frac{x_n}{x_n+b},$$

$$b\cdot w = \frac{x_1}{a+x_1}\cdot\frac{x_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{x_3}{x_2+x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}\cdot\frac{b}{x_n+b}.$$

Na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną otrzymujemy

$$(2) \qquad \sqrt[n+1]{a\cdot w} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{a+x_1}+\frac{x_1}{x_1+x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+b}\right),$$

$$(3) \qquad \sqrt[n+1]{b\cdot w} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{x_1}{a+x_1}+\frac{x_2}{x_1+x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}+\frac{b}{x_n+b}\right).$$

Po dodaniu stronami powyższych nierówności otrzymamy

$$\sqrt[n+1]{w}\left(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b}\right) \leq 1,$$

a stąd

$$w \leq \left(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b}\right)^{-(n+1)}.$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy mają miejsce równości w nierównościach (2) i (3). To natomiast jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(4) \qquad \frac{a}{a+x_1}=\frac{x_1}{x_1+x_2}=\frac{x_2}{x_2+x_3}=\ldots=\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}=\frac{x_n}{x_n+b}$$

oraz

$$(5)\qquad \frac{x_1}{a+x_1}=\frac{x_2}{x_1+x_2}=\frac{x_3}{x_2+x_3}=\ldots=\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}=\frac{b}{x_n+b}.$$

Związki (4) i (5) są równoważne następującym zależnościom:

$$\frac{x_1}{a}=\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\ldots=\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{b}{x_n}=\lambda.$$

Z powyższych równości wynika, że ciąg $a,x_1,x_2,\ldots,x_n,b$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie λ. Ciąg ten składa się z $n+2$ elementów, jego pierwszym wyrazem jest liczba a, zaś ostatnim liczba b. Stąd dostajemy $\lambda=(b\text{”ä})^{1\text{””}(n+1)}$.

Zatem dla ciągu zdefiniowanego wzorem

$$x_k=a\cdot\lambda^k=a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{k\text{””}(n+1)}\qquad (k=1,2,3,\ldots,n)$$

wartość wyrażenia w jest równa

$$\left(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b}\right)^{-(n+1)}$$

i jest to wartość największa.

Zadanie **2.** Oznaczmy przez $S(n)$ sumę cyfr liczby naturalnej n. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych, których nie da się przedstawić w postaci $n+S(n)$.

Rozwiązanie

Sposób I: Niech $f(k)=k+S(k)$. Dla dowolnego n funkcja f osiąga tę samą wartość dla argumentów $1000n+91$ i $1000n+100$. Wobec tego dla dowolnego m zbiór wartości funkcji f na zbiorze $Z_m=\{1,2,3,\ldots,1000m\}$ jest co najwyżej $(999m)$-elementowy. Ponieważ funkcja f osiąga wartości większe od $1000m$ dla argumentów spoza zbioru Z_m, więc co najmniej m liczb z tego zbioru nie jest wartością funkcji f dla żadnego argumentu naturalnego. Stąd liczb, których nie da się zapisać w postaci $n+S(n)$ jest nieskończenie wiele.

* * *

Sposób II: Przykładem liczb, które nie są postaci $n+S(n)$ są

$$a_m=\underbrace{111\ldots11}_{m}20+m\qquad (m\geq 0).$$

Istotnie: Przypuśćmy, że dla pewnego $m \geq 1$ liczbę a_m można przedstawić w postaci $n+S(n)$. Wówczas z nierówności

$$(1) \qquad a_m > \underbrace{999\ldots99}_{m+1} + 9(m+1) \qquad \text{(zob. \textit{uwaga} niżej)}$$

oraz z faktu, że liczba a_m jest $(m+2)$-cyfrowa wynika, że również liczba n jest $(m+2)$-cyfrowa. Ponadto pierwszą cyfrą liczby n jest jedynka. Innymi słowy $n = \overline{1k}$, gdzie k jest liczbą $(m+1)$-cyfrową. Wtedy jednak $k+S(k) = a_{m-1}$.

Rozumując analogicznie, dochodzimy do liczby dwucyfrowej ℓ, dla której $\ell + S(\ell) = a_0 = 20$. Przez bezpośrednie sprawdzenie widzimy jednak, że ta równość nie może być spełniona. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że żadnej z liczb a_m nie da się zapisać w postaci $n+S(n)$.

Uwaga: Nierówność (1) można udowodnić indukcyjnie korzystając z nierówności

$$1\underbrace{000\ldots00}_{m+1}1 > 9\underbrace{000\ldots00}_{m}9.$$

Zadanie **3.** Rozstrzygnąć, czy dla dowolnego trójkąta ABC istnieją takie punkty P i Q, leżące na prostej BC, że

$$QC = 2\cdot BP \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle BAP = \sphericalangle CAQ \neq 0.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że punkty P i Q spełniające warunki zadania istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy $AC \neq \sqrt{2}AB$.

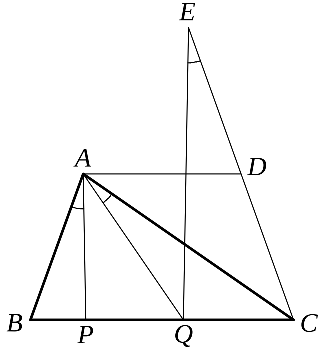
Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, zaś P i Q punktami spełniającymi warunki zadania. Istnieją cztery możliwe położenia punktów P i Q na prostej BC (p. odpowiednio rysunki 1, 2, 3, 4):

(1) Punkt P leży na półprostej $BC^{\rightarrow}$, punkt Q leży na półprostej $CB^{\rightarrow}$;

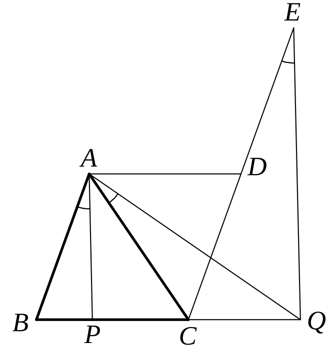
(2) Punkt P leży na półprostej $BC^{\rightarrow}$, punkt Q nie leży na półprostej $CB^{\rightarrow}$;

(3) Punkt P nie leży na półprostej $BC^{\rightarrow}$, punkt Q leży na półprostej $CB^{\rightarrow}$;

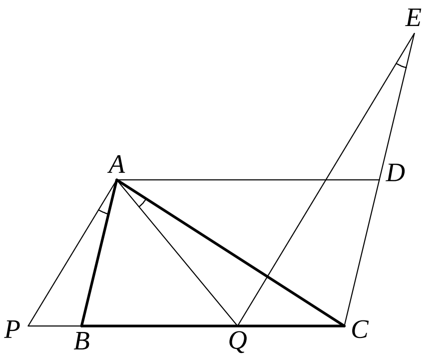
(4) Punkt P nie leży na półprostej $BC^{\rightarrow}$, punkt Q nie leży na półprostej $CB^{\rightarrow}$.



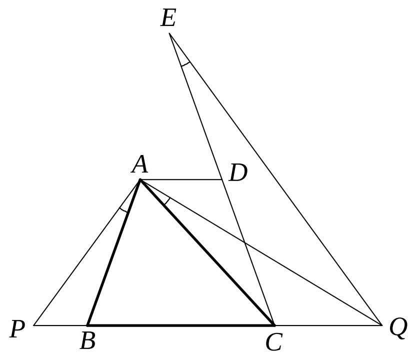
rys. 1



rys. 2



rys. 3



rys. 4

Niech D będzie punktem symetrycznym do punktu A względem symetralnej odcinka BC w przypadkach (1) i (4) oraz punktem symetryczym do punktu B względem środka odcinka AC w przypadkach (2) i (3). We wszystkich czterech przypadkach definiujemy punkt E jako obraz punktu C w symetrii względem punktu D. Wówczas

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle ECQ \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AB}{EC} = \frac{1}{2} = \frac{BP}{CQ},$$

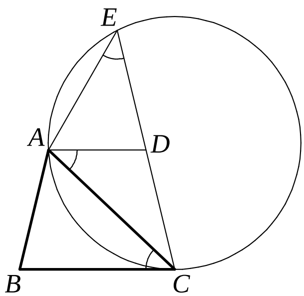
skąd wynika, że trójkąty APB oraz EQC są podobne. Zatem

$$\sphericalangle CAQ = \sphericalangle BAP = \sphericalangle CEQ. \tag{1}$$

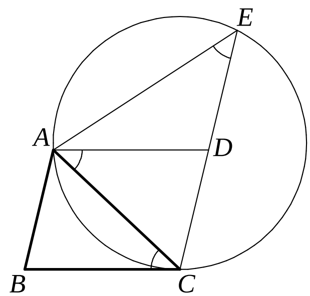
Ponieważ punkty A i E leżą po tej samej stronie prostej BC, więc z równości (1) wynika, że we wszystkich czterech przypadkach *punkty A, C, Q, E leżą na jednym okręgu*.

Zatem, aby znaleźć punkt Q, wystarczy wyznaczyć jedno z dwóch położeń punktów E, po czym opisać okrąg na trójkącie ACE. Drugi punkt przecięcia tego okręgu z prostą BC (jeśli istnieje!) jest punktem Q. Punkt P musi być takim punktem prostej BC, aby trójkąty ABP i EQC były podobne.

Z powyższych rozważań wynika więc, że punkt Q (a więc również i para punktów P, Q) nie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi opisane na obu możliwych trójkątach ACE są styczne do prostej BC. Wykażemy, że tak się dzieje wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = \sqrt{2}AB$.



rys. 5



rys. 6

Jeśli E jest jednym z wyżej zdefiniowanych punktów (rys. 5, 6), to:

$$
\begin{aligned}
& \text{punkty } P, Q \text{ nie istnieją} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \text{okrąg opisany na trójkącie } ACE \text{ jest styczny do prostej } BC \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \sphericalangle ACB = \sphericalangle AEC \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle DAC = \sphericalangle AEC \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \text{trójkąty } DAC \text{ i } AEC \text{ są podobne} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & AC^2 = CD \cdot CE \quad \Leftrightarrow \quad AC^2 = 2AB^2 \quad \Leftrightarrow \quad AC = \sqrt{2}AB.
\end{aligned}
$$

Zadanie **4.** Ciąg (c_n) jest określony rekurencyjnie wzorami

$$c_0 = 0, \;\; c_1 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad c_n = a(c_{n-1} + c_{n-2}) \qquad (n \geq 2),$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie wartości parametru a, że dla każdego n zachodzi nierówność $c_n < 10^n$.

Rozwiązanie

Rozwiązując daną rekurencję otrzymujemy następujący wzór ogólny na

n-ty wyraz ciągu (c_n) (zob. dodatek A):

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+4a}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)^n\right).$$

Jeżeli $x_1 = \frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4a}) > 10$, to

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = x_1 > 10.$$

Wówczas dla pewnego n liczba c_n osiągnie wartość większą od 10^n.

Przyjmijmy więc, że $x_1 \leq 10$. Rozwiązując tę nierówność przy założeniu, że a jest liczbą dodatnią dostajemy $a \leq \frac{100}{11} = 9{,}090909\ldots$. Wówczas

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+4a}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)^n\right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{a^2+4a}}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)^n = \frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{\sqrt{a^2+4a}}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)^{n-1} \leq$$

$$\leq 2\cdot 10^{n-1} < 10^n .$$

Zatem nierówność $c_n < 10^n$ zachodzi dla dowolnego n wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leq \frac{100}{11} = 9{,}090909\ldots$.

Uwaga: Dla wartości parametru a większych od $9{,}090909\ldots$ przekroczenie przez liczbę c_n wielkości 10^n jest nieuniknione, chociaż może być nierychliwe. Na przykład przy $a = 9{,}1$ nierówność $c_n < 10^n$ jest prawdziwa dla $n \leq 2608$.

Zadanie **5.** Na płaszczyźnie dany jest zbiór E oraz takie koła otwarte (tzn. bez brzegu) $K_1, K_2, \ldots, K_n$, że $E \subseteq K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$. Udowodnić, że spośród tych kół można wybrać takie parami rozłączne koła $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_\ell}$, że

$$E \subseteq 3K_{i_1} \cup 3K_{i_2} \cup \ldots \cup 3K_{i_\ell}.$$

Uwaga: Jeśli K jest kołem o środku X i promieniu r, to $3K$ jest kołem o środku X i promieniu $3r$.

Rozwiązanie

Koła $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_\ell}$ można wybrać stosując następujący algorytm:

Najpierw wybieramy największe koło spośród danych kół. Powiedzmy, że jest nim K_{i_1}. Następnie znajdujemy koło K_{i_2}, które jest największe wśród tych kół, które są rozłączne z kołem K_{i_1}. Dalej wybieramy koło K_{i_3} jako największe spośród tych kół, które są rozłączne z kołami K_{i_1} i K_{i_2}, itd. Postępowanie kończymy za ℓ-tym razem, gdy już nie istnieje koło rozłączne z wybranymi kołami.

Ze sposobu działania powyższego algorytmu wynika, że każde koło B_j, które nie zostało wybrane ma punkt wspólny z pewnym wybranym kołem B_{i_s}, które jest od niego nie mniejsze. Zatem $B_j \subseteq 3B_{i_s}$. Stąd

$$K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n \subseteq 3K_{i_1} \cup 3K_{i_2} \cup \ldots \cup 3K_{i_\ell},$$

a więc również

$$E \subseteq 3K_{i_1} \cup 3K_{i_2} \cup \ldots \cup 3K_{i_\ell}.$$

Zadanie **6.** Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Punkt P, różny od wierzchołków trójkąta ABC, leży na tym łuku AB okręgu o, do którego należy punkt C. Punkty X i Y leżą odpowiednio na półprostych $AP^{\rightarrow}$, $BP^{\rightarrow}$, przy czym $AX = AC$ i $BY = BC$. Udowodnić, że wszystkie proste XY, wyznaczone przez różne położenia punktu P, mają punkt wspólny.

Rozwiązanie

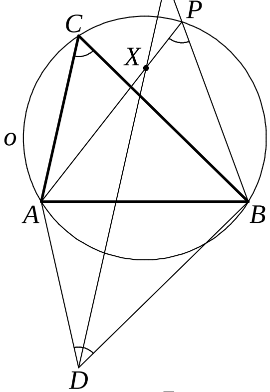
Oznaczmy przez D punkt symetryczny do punktu C względem prostej AB (rys. 7). Wykażemy, że wszystkie proste XY przechodzą przez punkt D.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkt P leży na łuku BC okręgu o.

Oznaczmy przez Y' punkt przecięcia prostej DX z prostą BP. Należy wykazać, że $Y' = Y$, czyli że $BY' = BC$. Ponieważ

$$AX = AC = AD,$$

więc $\sphericalangle AXD = \sphericalangle ADX$. Zatem



rys. 7

$$\sphericalangle DY'B = \sphericalangle APB - \sphericalangle Y'XP = \sphericalangle ACB - \sphericalangle AXD =$$
$$= \sphericalangle ADB - \sphericalangle ADX = \sphericalangle Y'DB,$$

skąd $BY' = BD = BC$.

Zadanie **7.** Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne a, dla których jest prawdziwe następujące zdanie:

$(*)$ *Dla dowolnej liczby naturalnej m, liczba* $(1+a)^{a^{m-1}} - 1 - a^m$ *jest podzielna przez* a^{m+1}.

Rozwiązanie

Zdanie $(*)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy a jest liczbą nieparzystą.

Dowód:

$(\Rightarrow)$ Dla $m=2$ otrzymujemy

$$(1+a)^a - 1 - a^2 = \sum_{k=2}^{a} \binom{a}{k} a^k = \binom{a}{2} a^2 + ba^3 \qquad (b \in \mathbb{Z}).$$

Powyższa liczba jest podzielna przez a^3 wtedy i tylko wtedy, gdy a jest liczbą nieparzystą.

$(\Leftarrow)$ Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $m=1$ zdanie $(*)$ jest prawdziwe. Załóżmy, więc że dla pewnego $m \geq 1$ zachodzi równość

$$(1+a)^{a^{m-1}} - 1 - a^m = qa^{m+1} \qquad (q \in \mathbb{Z}).$$

Na mocy nierówności $km \geq m+2$ dla $k \geq 3$, otrzymujemy

$$(1+a)^{a^m} = (1+a^m+qa^{m+1})^a = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (a^m+qa^{m+1})^k \equiv$$

$$\equiv 1 + a(a^m+qa^{m+1}) + \tfrac{1}{2}(a-1)a(a^m+qa^{m+1})^2 \qquad (\mathrm{mod}\ a^{m+2}).$$

Ponieważ $\frac{1}{2}(a-1)$ jest liczbą całkowitą, więc ostatni składnik powyższej sumy jest podzielny przez a^{2m+1}, zatem również przez a^{m+2}. Stąd

$$(1+a)^{a^m} \equiv 1+a^{m+1} \qquad (\mathrm{mod}\ a^{m+2}),$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **8.** Dany jest skończony zbiór A liczb naturalnych. Dowieść, że istnieje taki skończony zbiór B liczb naturalnych, że $B \supseteq A$ oraz

$$\prod_{x\in B} x = \sum_{x\in B} x^2.$$

Rozwiązanie

Dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m prawdziwa jest inkluzja $A \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$. Wystarczy więc wykazać, że istnieje taki skończony zbiór B liczb całkowitych dodatnich, że $\{1,2,\ldots,m\} \subseteq B$ oraz

$$\prod_{x\in B} x \;=\; \sum_{x\in B} x^2.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $m \geq 5$. Definiujemy ciąg (x_n) wzorami:

$$x_0 = 1, \qquad x_n = m!\,x_0\ldots x_{n-1} - 1 \qquad \text{dla } n \geq 1.$$

Niech $k = m! - (1^2 + 2^2 + \ldots + m^2)$. Ponieważ $m \geq 5$, więc $k > 0$. Ponadto $m < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$B_0 = \{1,2,\ldots,m\} \qquad \text{oraz} \qquad B_i = \{1,2,\ldots m, x_1,\ldots,x_i\} \quad \text{dla } i \geq 1.$$

Udowodnimy indukcyjnie względem i, że

$$\prod_{x\in B_i} x - \sum_{x\in B_i} x^2 \;=\; k - i. \tag{1}$$

Dla $i = 0$ powyższa równość jest prawdziwa. Załóżmy więc, że równość (1) jest prawdziwa dla pewnego i. Wtedy

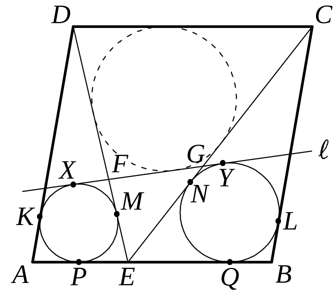
$$\begin{aligned}
\prod_{x\in B_{i+1}} x - \sum_{x\in B_{i+1}} x^2 &= (m!x_0\ldots x_i - 1)\prod_{x\in B_i} x - (m!x_0\ldots x_i - 1)^2 - \sum_{x\in B_i} x^2 = \\
&= (m!x_0\ldots x_i - 1)^2 + (m!x_0\ldots x_i - 1) \\
&\qquad\qquad - (m!x_0\ldots x_i - 1)^2 - \sum_{x\in B_i} x^2 = \\
&= \prod_{x\in B_i} x - \sum_{x\in B_i} x^2 - 1 = k - (i+1),
\end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny. Dla $B = B_k$, otrzymujemy tezę.

Zadanie **9.** Punkt E leży na boku AB rombu $ABCD$. Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty ADE, DEC, CEB mają wspólną styczną.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez ℓ wspólną styczną zewnętrzną poprowadzoną do okręgów wpisanych w trójkąty ADE i CEB, różną od prostej AB. Należy udowodnić, że w czworokąt $DFGC$ można wpisać okrąg (zob. oznaczenia na rys. 8).



rys. 8

Ponieważ $FM = FX$ oraz $GN = GY$, więc wystarczy dowieść, że

$$DM + CN = XY + CD.$$

Dla dowodu wystarczy założyć, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, czyli, że

$$AD + BC = AB + CD.$$

Stąd mamy: $AK + DM + BL + CN = AP + PQ + QB + CD$, a stąd

$$DM + CN = XY + CD.$$

Zadanie **10.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia ε, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12} \in (0, \varepsilon)$ zachodzi nierówność

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{12} > \frac{x_1 x_2 x_3 \ldots x_{12}}{x_1^{10} + x_2^{11} + x_3^{12} + \ldots + x_{12}^{21}} .$$

Rozwiązanie

Zbadamy zachowanie danej nierówności na takiej krzywej w $\mathbb{R}^{12}$, na której wszystkie składniki w mianowniku prawej strony nierówności (1) są równe. W tym celu podstawmy

$$x_1 = t^{1””10}, \quad x_2 = t^{1””11}, \quad \ldots, \quad x_{12} = t^{1””21} \qquad (t > 0).$$

Wówczas prawa strona sprowadza się do postaci $\dfrac{t^w}{12t}$, gdzie

$$w = \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} < \tfrac{5}{10} + \tfrac{7}{15} < 1,$$

skąd wynika, że wartość wyrażenia $\dfrac{t^w}{12t}$ dąży do nieskończoności przy t dążącym do 0.

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ prawa strona nierówności (1) jest nieograniczona przy $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12}$ należących do przedziału $(0,\varepsilon)$. Natomiast lewa strona nierówności (1) jest mniejsza od 12ε.

Tak więc liczba ε o żądanej własności nie istnieje.

* * *

Uwaga: Bardzo sugestywne jest następujące błędne rozwiązanie.

Zbadamy zachowanie nierówności (1) na półprostej przechodzącej przez punkt $(0,0,\ldots,0)$ w $\mathbb{R}^{12}$. Podstawmy

$$x_1 = a_1 t, \quad x_2 = a_2 t, \quad \ldots, \quad x_{12} = a_{12} t, \qquad (t > 0)$$

gdzie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ są dodatnie. Wówczas nierówność (1) przyjmuje postać

$$t(a_1 + a_2 + \ldots + a_{12}) > \frac{t^{12} a_1 a_2 \ldots a_{12}}{t^{10} a_1^{10} + t^{11} a_2^{11} + \ldots + t^{21} a_{12}^{21}},$$

czyli
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} > \frac{t a_1 a_2 \ldots a_{12}}{a_1^{10} + t^1 a_2^{11} + \ldots + t^{11} a_{12}^{21}}.$$

Ponieważ lewa strona tej nierówności jest stałą dodatnią, a prawa dąży do 0 przy t dążącym do 0, więc dla małych t jest ona prawdziwa. To pozwala dobrać liczbę ε o żądanej własności.

* * *

Liczbę ε, i owszem, dobrać się udało, ale inną dla każdej półprostej. Widzimy jednak w poprawnym rozwiązaniu, że dobór ε dobrego jednocześnie dla wszystkich półprostych nie jest możliwy.

Zadanie **11.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$\big(f(x) f(y)\big)^2 = f(x-y) f(x+y),$$

a ponadto $f(0) = f(1) = 1$ i $f\left(\frac{1}{3}\right) \neq 1$.

Rozwiązanie

Taka funkcja istnieje. Niech bowiem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{D} \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{D} \end{cases},$$

gdzie $\mathbb{D}$ jest zbiorem liczb dwójkowo wymiernych, tzn. liczb postaci $\frac{m}{2^n}$, gdzie m jest liczbą całkowitą, a n naturalną.

Wśród liczb x, y, $x-y$ i $x+y$ mogą być 0, 1 lub cztery liczby dwójkowo wymierne. W każdym z tych przypadków dane równanie jest spełnione.

Pozostaje zauważyć, że $f(0)=f(1)=1$ i $f\left(\frac{1}{3}\right)=0$.

Zadanie **12.** W Lolandii ku czci króla Lolisława Drugiego postawiono 66 pomników. Między każdymi dwoma pomnikami istnieje połączenie pasażerskie PKP, PKS, LOT lub Żeglugi Śródlądowej.
Dowieść, że istnieją takie trzy pomniki, między którymi połączenia pasażerskie obsługuje ten sam przewoźnik.

Rozwiązanie

Teza zadania wynika z twierdzenia Ramsey'a (dodatek C).

Zadanie **13.** Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Okrąg p jest styczny do odcinków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q oraz jest styczny do okręgu o. Dowieść, że środek odcinka PQ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Rozwiązanie

Niech s będzie okręgiem wpisanym w trójkąt ABC, zaś S jego środkiem (rys. 9). Oznaczmy przez K i L punkty styczności okręgu s odpowiednio z bokami AB i AC. Ponadto niech $P'Q'$ będzie prostą prostopadłą do AS przechodzącą przez punkt S, oraz niech XY będzie taką styczną do okręgu s, że $\sphericalangle AXY = \sphericalangle ACB$. (Punkty P', X leżą na boku AB; zaś punkty Q', Y znajdują się na boku AC.)

Wystarczy udowodnić, że okrąg, który jest styczny do prostych AB i AC odpowiednio w punktach P' i Q' jest również styczny do okręgu o.

Trójkąty prostokątne AKS i ASP' są podobne, skąd otrzymujemy

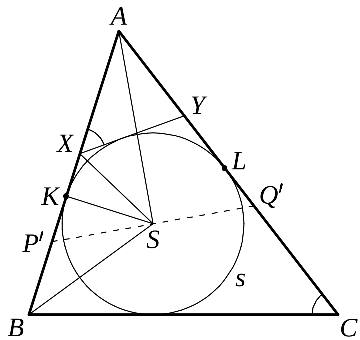
$$(1)\qquad AK\cdot AP' = AS^2. \qquad \text{Analogicznie:} \quad AL\cdot AQ' = AS^2.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\sphericalangle AXS &= \sphericalangle AXY + \sphericalangle YXS = \sphericalangle AXY + \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AXY) = \\ &= 90^\circ + \tfrac{1}{2}\sphericalangle AXY = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\sphericalangle ACB = \\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC - \tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ABS - \sphericalangle BAS = \\ &= \sphericalangle ASB,\end{aligned}$$

co dowodzi, że trójkąty AXS oraz ASB są podobne. Dostajemy zatem związek

(2) $$AX \cdot AB = AS^2. \quad \text{Analogicznie:} \quad AY \cdot AC = AS^2.$$



rys. 9

Z równości (1) wynika, że inwersja i o środku A i promieniu AS przeprowadza punkt K na punkt P' oraz punkt L na punkt Q'. Zatem obrazem okręgu s w tej inwersji jest okrąg styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P' i Q'. Z równości (2) wynika natomiast, że $i(X) = B$ oraz $i(Y) = C$, co oznacza, że obrazem prostej XY w inwersji i jest okrąg o. Ponieważ prosta XY jest styczna do okręgu s, więc okrąg, który jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P' i Q' jest również styczny do okręgu o.

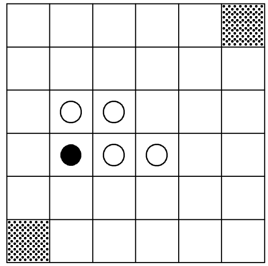
Zadanie **14.** Zbiór $\{1,2,3,\ldots,65\}$ podzielono na cztery rozłączne zbiory. Dowieść, że istnieją takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne) należące do jednego z tych zbiorów, że $a+b=c$.

Rozwiązanie

Przyporządkujmy każdemu z czterech zbiorów inny kolor. Obierzmy 66 punktów i ponumerujmy je liczbami od 1 do 66. Każde dwa spośród tych punktów połączmy drogą i pomalujmy ją kolorem przyporządkowanym zbiorowi, do którego należy różnica ich numerów.

Z twierdzenia Ramsey'a (dodatek C) wynika, że 3 z tych punktów (ponumerowane liczbami $x<y<z$) są połączone tym samym kolorem. Wówczas liczby $a=y-x$, $b=z-y$ oraz $c=z-x$ należą do jednego z czterech danych zbiorów oraz $a+b=c$.

Zadanie **15.** Na szachownicy $2n \times 2n$ stoi król Roszadniknaprawowpróżni. W pojedynczym ruchu może on przesunąć się o jedno lub dwa pola w prawo, o jedno pole w górę lub o jedno pole po skosie w prawo w górę (zob. rysunek).



Na ile sposobów król ten może pokonać drogę od lewego dolnego do prawego górnego rogu szachownicy w dokładnie $3n$ ruchach?

Rozwiązanie

W każde pole szachownicy wpisujemy jednomian, tak jak na rysunku.

y^5	xy^5	x^2y^5	x^3y^5	x^4y^5	x^5y^5
y^4	xy^4	x^2y^4	x^3y^4	x^4y^4	x^5y^4
y^3	xy^3	x^2y^3	x^3y^3	x^4y^3	x^5y^3
y^2	xy^2	x^2y^2	x^3y^2	x^4y^2	x^5y^2
y	xy	x^2y	x^3y	x^4y	x^5y
1	x	x^2	x^3	x^4	x^5

W lewym dolnym rogu jest wpisana liczba 1, a w prawym górnym jednomian $x^{2n-1}y^{2n-1}$. Wykonanie ruchu odpowiada wybraniu jednego z czterech jednomianów x, y, xy, x^2 (nazwiemy je *jednomianami elementarnymi*), a następnie przemnożeniu go przez jednomian z pola, na którym znajduje się król. Wynik wskazuje, na które pole przesuwa się król.

Zatem zadanie polega na wyznaczeniu liczby r_n, która jest równa liczbie ciągów długości $3n$ złożonych z *jednomianów elementarnych* o iloczynie równym $x^{2n-1}y^{2n-1}$. Liczba ta jest równa współczynnikowi stojącemu przy $x^{2n-1}y^{2n-1}$ w wielomianie

$$\left(x+y+xy+x^2\right)^{3n} = (x+y)^{3n}(x+1)^{3n} .$$

Współczynnik ten jest równy współczynnikowi przy $x^{n+1}y^{2n-1}$ w wielomianie $(x+y)^{3n}$ pomnożonemu przez współczynnik przy x^{n-2} w wielomianie $(x+1)^{3n}$. Stąd

$$r_n = \binom{3n}{n+1} \cdot \binom{3n}{n-2} .$$

* * *

Uwaga: Dla początkowych wartości n liczba r_n jest równa:

n	r_n
2	20
3	1134
4	52272
5	2277275
6	97381440
7	4140818010
8	175984808384
9	7491674168550
10	319729489852500

Zadanie **16.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n iloczyn wszystkich takich liczb pierwszych p, które spełniają nierówność $n < p \le 2n$, jest mniejszy od 4^n.

Rozwiązanie

Ponieważ każda liczba pierwsza spełniająca nierówności $n < p \le 2n$ jest dzielnikiem liczby $\binom{2n}{n}$, więc iloczyn wszystkich takich liczb pierwszych nie przekracza

$$\binom{2n}{n} < (1+1)^{2n} = 4^n .$$

Zadanie **17.** Na zewnątrz trójkąta ABC są zbudowane trzy podobne trójkąty DBC, ECA, FAB, przy czym

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ECA = \sphericalangle FAB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DCB = \sphericalangle EAC = \sphericalangle FBA .$$

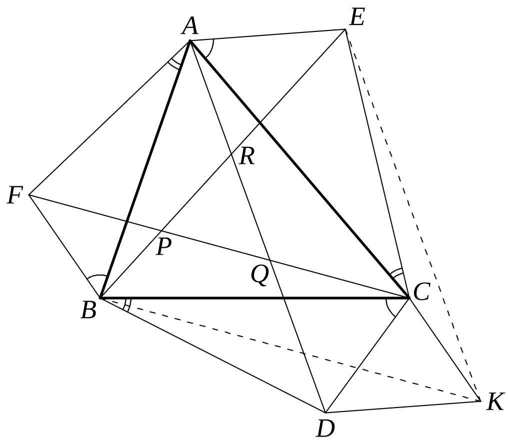
Niech $P = BE \cap CF$, $Q = CF \cap AD$, $R = AD \cap BE$, gdzie $k \cap \ell$ oznacza punkt przecięcia prostych k i ℓ. Dowieść, że

$$\frac{QR}{AD} = \frac{RP}{BE} = \frac{PQ}{CF} .$$

Rozwiązanie

Na zewnątrz trójkąta BCD budujemy taki trójkąt CDK, że

(1) $$CK = FB \quad \text{oraz} \quad DK = AE \qquad \text{(zob. rys. 10).}$$



rys. 10

Ponieważ $AB:BC:CA = FB:DC:EA = CK:DC:KD$, więc trójkąty ABC oraz KCD są podobne. Wobec tego $\sphericalangle FBC = \sphericalangle BCK$, a stąd wynika, że odcinki FB i CK są równoległe. Ponieważ w pięciokącie $DKCEA$ suma kątów wewnętrznych przy wierzchołkach K, C i E jest równa 360°, więc odcinki AE i DK są równoległe.

Zatem na mocy równości (1) czworokąty $AEKD$ oraz $FBKC$ są równoległobokami. Stąd wynika, że trójkąty PQR i BEK są jednokładne. Wobec tego otrzymujemy

$$\frac{RP}{BE} = \frac{PQ}{BK} = \frac{QR}{KE} ,$$

czyli

$$\frac{RP}{BE} = \frac{PQ}{FC} = \frac{QR}{AD}\,.$$

Zadanie **18.** Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\left(\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}\right)^2 \geq$$
$$\geq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)\cdot\left(\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}\right).$$

Rozwiązanie

Udowodnimy, że dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d.

Rozpatrzmy wielomian

$$w(t) = (t+a)(t+b)(t+c)(t+d) = t^4 + s_1 t^3 + s_2 t^2 + s_3 t + s_4$$

oraz wprowadźmy oznaczenie

$$p_i = \frac{s_i}{\binom{4}{i}}\,.$$

Nierówność, którą mamy udowodnić, przybiera postać

(1) $$p_2^2 \geq p_1 p_3\,.$$

Ponieważ wielomian w ma cztery pierwiastki rzeczywiste, więc pochodna tego wielomianu ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Stąd

$$w'(t) = 4t^3 + 3s_1 t^2 + 2s_2 t + s_3 = 4(t+p)(t+q)(t+r)\,,$$

gdzie $p,q,r \in \mathbb{R}$. Porównując współczynniki wielomianu w' otrzymujemy równości

$$p_1 = \tfrac{1}{4}s_1 = \tfrac{1}{3}(p+q+r)\,, \quad p_2 = \tfrac{1}{6}s_2 = \tfrac{1}{3}(pq+qr+rp)\,, \quad p_3 = \tfrac{1}{4}s_3 = pqr\,.$$

Podstawiając otrzymane zależności do nierówności (1) dostajemy

(2) $$(pq+qr+rp)^2 \geq 3pqr(p+q+r)\,.$$

Jeśli chociaż jedna z liczb p, q, r jest równa 0, to nierówność (2) jest spełniona. Podstawmy więc w nierówności (2): $x = 1$””p, $y = 1$””q, $z = 1$”ř. Wówczas nierówność, którą mamy dowieść przybiera postać

(3) $$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)\,.$$

Otrzymana nierówność jest równoważna nierówności

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx,$$

która jest prawdziwa.

* * *

Uwaga: W analogiczny sposób można dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq 2n\left(\sum_{i<j} a_i a_j\right).$$

Jest to uogólnienie nierówności (3).

Opierając się na powyższej nierówności oraz naśladując metodę dowodu nierówności (1) można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie:

Załóżmy, że wielomian

$$w(x) = x^n + s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} + \ldots + s_{n-1}x + s_n$$

ma n pierwiastków rzeczywistych $(n \geq 2)$. Wprowadźmy następujące oznaczenie

$$p_i = \frac{s_i}{\binom{n}{i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

oraz przyjmijmy, że $p_0 = 1$. Wówczas

(4) $$p_i^2 \geq p_{i-1} p_{i+1} \qquad \text{dla } i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Zadanie **19.** Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Znaleźć wszystkie takie funkcje f przekształcające zbiór $\mathbb{N}$ na zbiór $\mathbb{N}$, które spełniają warunek:

(1) $$n \mid m \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \mid f(m).$$

Rozwiązanie

Jeśli $f(m) = f(n)$, to $m|n$ oraz $n|m$, skąd $m = n$. Zatem funkcja f jest różnowartościowa, a więc jest bijekcją. Stąd oraz z warunku (1) wynika, że liczby a i $f(a)$ mają tą samą liczbę różnych dzielników. W szczególności $f(1) = 1$ oraz $f(p_1), f(p_2), f(p_3), \ldots$ jest permutacją ciągu liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3, \ldots$. Oznaczmy $f(p_i) = q_i$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Załóżmy, że liczba pierwsza q_j jest dzielnikiem liczby $f(p_i^k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$f(p_j) \mid f(p_i^k) \quad \Rightarrow \quad p_j \mid p_i^k \quad \Rightarrow \quad p_j = p_i .$$

Zatem jedynym dzielnikiem pierwszym liczby $f(p_i^k)$ jest liczba q_i. Stąd $f(p_i^k) = q_i^l$, a ponieważ liczby p_i^k i $f(p_i^k)$ mają tyle samo różnych dzielników, więc $k = l$. Innymi słowy $f(p_i^k) = q_i^k$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Niech $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ będzie rozkładem liczby a na czynniki pierwsze. Wtedy $q_i^{k_i} \mid f(a)$, skąd $q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_n^{k_n} \mid f(a)$. Ponieważ liczba $f(a)$ ma tyle samo różnych dzielników co liczba a, więc musi być $f(a) = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_n^{k_n}$.

Ostatecznie jedynymi funkcjami spełniającymi warunki zadania są takie funkcje f, że

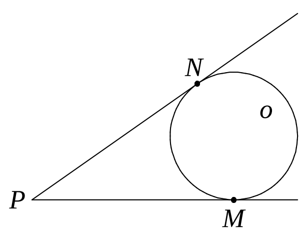
$$f(1) = 1, \qquad f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}) = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_n^{k_n},$$

gdzie $q_1, q_2, q_3, \dots$ jest z góry zadaną permutacją ciągu liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3, \dots$.

Zadanie **20.** Dany jest trójkąt ABC. Punkt X leży na boku AB tego trójkąta. Prosta ℓ, różna od prostej AB, jest styczna zewnętrznie do okręgów wpisanych w trójkąty ACX i BCX. Wyznaczyć zbiór punktów przecięcia prostych ℓ i CX dla wszystkich punktów X leżących na odcinku AB.

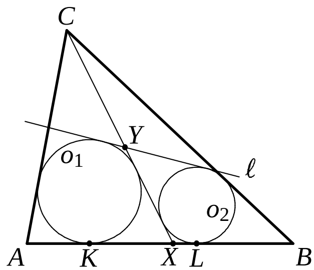
Rozwiązanie

Jeżeli proste PM i PN są styczne do okręgu o w punktach odpowiednio M i N, to oznaczamy: $Po = PM = PN$ (rys. 11).



rys. 11

Niech Y będzie punktem przecięcia prostej ℓ z odcinkiem CX. Wprowadźmy następujące oznaczenia: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.



rys. 12

Przyjmijmy, że okręgi o_1 i o_2 wpisane odpowiednio w trójkąty ACX i BCX są styczne do boku AB odpowiednio w punktach K, L (rys. 12).

Wówczas

$$a + b = Bo_2 + Co_2 + Ao_1 + Co_1 =$$

$$= (Ao_1 + Bo_2 + KL) + (Co_1 + Co_2 - XY) = c + 2CY \ ,$$

skąd

$$CY = \tfrac{1}{2}(a + b - c).$$

Zatem punkt Y leży na okręgu o środku C i promieniu $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

Szukanym zbiorem punktów Y jest więc łuk okręgu o środku C i promieniu $\frac{1}{2}(a+b-c)$ zawarty wewnątrz trójkąta ABC.

Zadanie **21.** Załóżmy, że wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma cztery pierwiastki dodatnie. Dowieść, że jeżeli $c + d = 0$, to $a + b \geq 80$.

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \tfrac{1}{4}a, \quad p_2 = \tfrac{1}{6}b, \quad p_3 = \tfrac{1}{4}c, \quad p_4 = d.$$

Ponieważ pierwiastki wielomianu w są dodatnie, więc $p_0, p_2, p_4 > 0$ oraz $p_1, p_3 < 0$. Na mocy nierówności (4) ze strony 35 otrzymujemy

$$p_2^2 \geq p_1 p_3 \qquad \text{oraz} \qquad p_3^2 \geq p_2 p_4 .$$

Prawe strony powyższych nierówności są dodatnie, więc mnożymy je stronami. Ponieważ jednocześnie $p_2p_3 < 0$, więc dostajemy $p_2p_3 \le p_1p_4$. Stąd $bc \le 6ad$. Ponieważ $d = -c > 0$, więc $-b \le 6a$, czyli

$$a+b \ge -5a. \tag{1}$$

Analogicznie, korzystając z nierówności (4) na stronie 35, otrzymujemy $p_1p_3 \ge p_0p_4$. Stąd mamy $ac \ge 16d$, a więc po uwzględnieniu zależności $d = -c > 0$ dostajemy $-a \ge 16$. Z tej nierówności oraz z (1) otrzymujemy $a+b \ge 80$.

Zadanie **22.** Wyznaczyć wszystkie takie funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje taka nieparzysta liczba naturalna n, że

$$f^n(x) = x\,.$$

Uwaga: $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}(x)$.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że funkcja f jest różnowartościowa, a ponieważ jest ciągła, więc jest monotoniczna. Zatem funkcja f^2 jest rosnąca. Wykażemy, że f^2 jest funkcją identycznościową.

Gdyby bowiem dla pewnego x była prawdziwa nierówność $f^2(x) > x$, to mielibyśmy

$$f^{2k+2}(x) = f^{2k}\left(f^2(x)\right) > f^{2k}(x),$$

co (przez indukcję) daje $f^{2k}(x) > x$ dla dowolnego k. Jednak dla pewnego nieparzystego n, zależnego do x, mamy

$$f^{2n}(x) = f^n(f^n(x)) = x.$$

Analogicznie wykluczamy nierówność $f^2(x) < x$.

Zatem dla każdego x mamy $f(x) = f(f^{2k}(x)) = x$, skąd wynika, że jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest funkcja $f(x) = x$.

Zadanie **23.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele nieprzystających trójkątów prostokątnych, których boki mają długości całkowite, a długości przyprostokątnych różnią się o 1.

Rozwiązanie

Mamy wykazać, że równanie

$$a^2 + (a+1)^2 = c^2 \tag{1}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych a, b. Przekształcając je, otrzymujemy

$$(2a+1)^2 = 2c^2 - 1\ .$$

Ponieważ równanie

$$d^2 = 2c^2 - 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań (zob. dodatek D), a w każdym z nich liczba d musi być nieparzysta, więc równanie (1) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

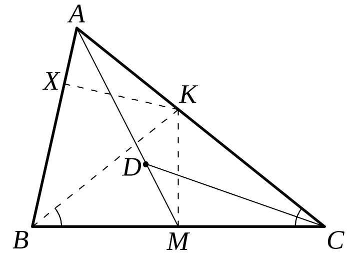
Boki najmniejszych trójkątów spełniających warunki zadania podane są w tabeli.

a	$b = a+1$	c
3	4	5
20	21	29
119	120	169
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461
137903	137904	195025
803760	803761	1136689
4684659	4684660	6625109
27304196	27304197	38613965
159140519	159140520	225058681
927538920	927538921	1311738121
5406093003	5406093004	7645370045
31509019100	31509019101	44560482149
183648021599	183648021600	259717522849
1070379110496	1070379110497	1513744654945
6238626641379	6238626641380	8822750406821
36361380737780	36361380737781	51422757785981
211929657785303	211929657785304	299713796309065
1235216565974040	1235216565974041	1746860020068409

Zadanie **24.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle ABC = 2\cdot\measuredangle ACB$. Punkt M jest środkiem boku BC. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinek AM w punkcie D. Udowodnić, że $\measuredangle MDC \le 45°$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez K punkt przecięcia dwusiecznej kąta ABC z bokiem AC. Niech X będzie rzutem prostokątnym punktu K na prostą AB (rys. 13). Wówczas na mocy warunków zadania $KM = KX$, skąd wynika, że $KM \le AK$. Zatem $\measuredangle KAM \le \measuredangle AMK$. Korzystając z tej nierówności otrzymujemy:



rys. 13

$$2\measuredangle MDC = 2\measuredangle KAM + 2\measuredangle ACD \le \measuredangle KAM + \measuredangle AMK + \measuredangle ACB =$$
$$= \measuredangle MKC + \measuredangle KCM = 90°,$$

a stąd $\measuredangle MDC \le 45°$.

Zadanie **25.** Dowieść, że dla dowolnego k zbiór wszystkich liczb zapisywalnych w układzie siódemkowym przy pomocy $2k$ cyfr (dopuszczamy zera początkowe), z których k cyfr to zera i trójki, a pozostałe k cyfr to jedynki i dwójki, nie zawiera żadnego postępu arytmetycznego trójwyrazowego.

Rozwiązanie

Niech a, b, c będą liczbami ze zbioru opisanego w treści zadania, tworzącymi postęp arytmetyczny. Wykażemy, że $a = b = c$. Niech

$$a = \sum_{i=0}^{2k-1} a_i 7^i\,,\quad b = \sum_{i=0}^{2k-1} b_i 7^i \quad \text{oraz} \quad c = \sum_{i=0}^{2k-1} c_i 7^i\,,$$

gdzie $0 \le a_i \le 3$, $0 \le b_i \le 3$, $0 \le c_i \le 3$.

Z równości $a + c = 2b$, czyli

$$\sum_{i=0}^{2k-1} (a_i + c_i)7^i = \sum_{i=0}^{2k-1} (2b_i)7^i \tag{1}$$

wynikają równości

$$a_i + c_i = 2b_i \quad \text{dla } i = 0,1,2,\ldots,2k-1,$$

gdyż we wzorze (1) wszystkie liczby w nawiasach należą do zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Warunek $b_i \in \{0,3\}$ spełnia dokładnie k indeksów i. Pociąga on za sobą równości $a_i = c_i = b_i$. Wobec tego dla pozostałych indeksów i otrzymujemy $a_i, b_i, c_i \in \{1,2\}$, co również pociąga równości $a_i = c_i = b_i$. Stąd ostatecznie $a = b = c$.

Zadanie **26.** Koledzy Fredka mieszkają na okręgu o promieniu 541 km. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży.

Wszyscy koledzy mają w sumie tyle paliwa, aby wystarczyło Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu.

Dowieść, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc przeciwzegarowo po okręgu i tankując po drodze odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie

Najpierw Fredek wybiera dowolnego kolegę i przeprowadza symulację podróży przyjmując, że w trakcie jej trwania może mieć ujemną ilość paliwa.

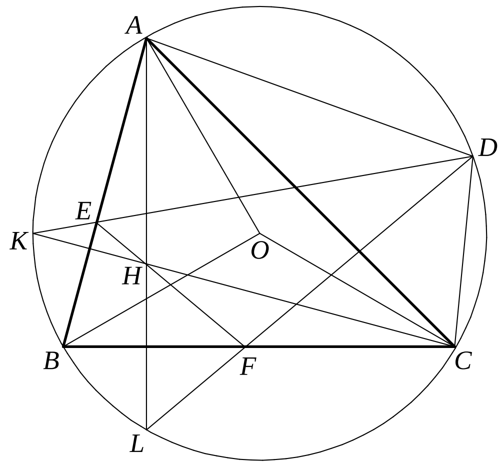
Następnie wybiera się on w prawdziwą podróż rozpoczynając ją od tego z kolegów, u którego w czasie symulacji miał najmniej paliwa przed tankowaniem.

Zagadka na bis.

Jaką ciekawą własność ma liczba 541 ?

Zadanie **27.** Punkt O jest środkiem okręgu o, opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Punkt D, różny od punktów A i C leży na tym łuku AC okręgu o, który nie zawiera punktu B. Punkt E leży na boku AB, przy czym $\sphericalangle ADE = \sphericalangle OBC$, zaś punkt F leży na boku BC i spełnia równość $\sphericalangle CDF = \sphericalangle OBA$. Dowieść, że $\sphericalangle DEF = \sphericalangle DOC$ oraz $\sphericalangle DFE = \sphericalangle DOA$.

Rozwiązanie



Załóżmy, że proste DE i DF przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach K i L (zob. rysunek). Wówczas

$$\sphericalangle ACK = \sphericalangle ADK = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB,$$

co oznacza, że proste CK i AB są prostopadłe. Analogicznie dowodzimy, że proste AL i BC są prostopadłe. Zatem $H = CK \cap AL$ punktem przecięcia wysokości w trójkącie ABC. Stosując twierdzenie Pascala dla „sześciokąta” $BCKDLA$, otrzymujemy, że punkty E, H i F są współliniowe. Ponadto prosta AB jest symetralną odcinka HK, co oznacza, że trójkąt KHE jest równoramienny. Stąd

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle HED = 2\sphericalangle HKE = 2\sphericalangle CKD = \sphericalangle DOC.$$

W ten sam sposób dowodzimy, że $\sphericalangle DFE = \sphericalangle DOA$.

Zadanie **28.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna n, że ze zbioru

$$\left\{0,1,2,3,\ldots,\tfrac{1}{2}(3^n-1)\right\}$$

można wybrać (2^n+1)-elementowy podzbiór nie zawierający żadnego trójwyrazowego postępu arytmetycznego.

Rozwiązanie

Wykażemy, że taka liczba naturalna n istnieje.

Wiemy, że dla każdego k ze zbioru liczb całkowitych od 0 do $\frac{1}{2}(7^{2k}-1)$ można wybrać $4^k\binom{2k}{k}$-elementowy podzbiór bez trójwyrazowych postępów arytmetycznych (zob. zadanie 25). Zadanie będzie więc rozwiązane, jeśli wykażemy, że istnieją takie liczby naturalne k i n, że

$$\text{(1)}\qquad \frac{7^{2k}-1}{2}\le\frac{3^n-1}{2}\quad\text{oraz}\quad 4^k\binom{2k}{k}\ge 2^n+1\,.$$

Pierwsza nierówność jest równoważna nierówności $7^{2k}\le 3^n$, czyli nierówności $n\ge k\log_3 49$. Wybierzmy liczbę wymierną z przedziału $(\log_3 49,4)$, np. 11””3. Wówczas dla $k=3l$ i $n=11l$, gdzie l jest liczbą naturalną, mamy

$$\frac{7^{2k}-1}{2}\le\frac{3^n-1}{2}$$

oraz

$$\frac{4^{3l}\binom{6l}{3l}}{2^{11l}+1}\ge\frac{4^{3l}\cdot\frac{2^{6l}}{6l+1}}{2^{11l}+1}=\frac{2^l}{(6l+1)\left(1+\frac{1}{2^{11l}}\right)}\,.$$

Wartość ostatniego wyrażenia dąży do nieskończoności przy l dążącym do nieskończoności. Dobierając taką liczbę l, że

$$\frac{4^{3l}\binom{6l}{3l}}{2^{11l}+1}\ge 1$$

otrzymujemy k i n spełniające nierówności (1).

* * *

Uwaga 1: W oszacowaniach wykorzystaliśmy nierówność

$$\binom{2m}{m}\ge\frac{1}{2m+1}\sum_{j=0}^{2m}\binom{2m}{j}=\frac{2^{2m}}{2m+1}\,.$$

Uwaga 2: Bezpośrednie obliczenia pokazują, że $k = 7$ i $n = 25$ są najmniejszymi liczbami spełniającymi nierówności (1).

Zadanie **1.** Rodzina gra w karty. Jak zwykle tasuje ojciec. Przeważnie robi to w następujący sposób. Bierze talię kart w prawą rękę i przerzuca do lewej ręki po kilka kart, raz na wierzch, raz pod spód. Jednak dziś gra toczy się o wysoką stawkę i ojciec ma spocone ręce. Dlatego też musi dołożyć szczególnej staranności przy tasowaniu, aby karty się nie sklejały. Tasuje więc z pełną pedanterią, przerzucając do lewej ręki po jednej karcie. Jak wygląda dziś jego tasowanie? (Dla uproszczenia powiedzmy, że ojciec ma 10 kart.)

Najpierw ojciec przerzuca do lewej ręki pierwszą kartę z wierzchu, potem drugą kartę wrzuca na wierzch pierwszej, trzecią pod spód, czwartą na wierzch, piątą pod spód, ... , dziesiątą na wierzch. Jeśli ojciec przejrzy teraz potasowane karty, zobaczy, że ułożyły się one w następującej kolejności (patrząc od wierzchu):

$$10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$$

(numery odnoszą się do pozycji kart przed tasowaniem).

Udowodnić, że dla dowolnego k, przy wielokrotnym tasowaniu talii k kart wszystkie karty wrócą **jednocześnie** na swoje pierwotne położenie po nie więcej niż k tasowaniach.

Rozwiązanie

Gdy k jest nieparzyste, ostatnia karta nie zmienia swojej pozycji, można ją więc wyłączyć z rozważań. Przyjmijmy więc $k=2n$.

Napiszmy na kartach po dwie liczby według następującego przepisu:

$2n$	$2n-1$	$2n-2$		$n+1$	n		2	1
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$\cdots$	$3n$	$3n+1$	$\cdots$	$4n-1$	$4n$

Na każdej karcie suma napisanych liczb jest równa $4n+1$. Następnie popatrzymy na jedną pozycję i notujmy karty, które pojawiają się na niej po kolejnych tasowaniach.

Po jednokrotnym przetasowaniu otrzymamy:

1	3	5	$\dots$	$2n-1$	$2n$	$\dots$	4	2
$4n$	$4n-2$	$4n-4$		$2n+2$	$2n+1$		$4n-3$	$4n-1$

Widzimy, że na każdą pozycję trafiła karta z liczbami pomnożonymi przez 2 $(\bmod 4n+1)$. To samo stanie się przy kolejnych tasowaniach. Jeśli bowiem po pierwszym tasowaniu na pozycję karty $\pm k (\bmod 4n+1)$ weszła karta $\pm 2k (\bmod 4n+1)$, to po drugim tasowaniu pojawi się tam karta, która zajęła po pierwszym tasowaniu miejsce karty
$\pm 2k (\bmod 4n+1)$, czyli karta $\pm 4k (\bmod 4n+1)$.

Pierwsza karta (a także wszystkie inne karty) trafi na swoje miejsce po t tasowaniach, gdy $2^t \equiv \pm 1 (\bmod 4n+1)$. Do rozwiązania zadania wystarczy zastosować wniosek z dodatku B, z którego wynika, że można przyjąć $t = \frac{\varphi(4n+1)}{2} \leq 2n$.

Uwagi:

Zawsze można przyjąć $t = \psi(4n+1)$.

Gdy n jest parzyste, a $4n+1$ pierwsze, wystarczy n tasowań. Wynika to ze znanego w teorii liczb faktu, że wówczas 2 jest resztą kwadratową $(\bmod 4n+1)$, tzn. $2^{2n} \equiv 1 (\bmod 4n+1)$. Te wartości n podane są w czwartej kolumnie tabeli.

Najmniejsza liczba tasowań potrzebna do powrotu kart na swoje miejsca jest dzielnikiem liczb podanych powyżej (tzn. $\frac{\varphi(4n+1)}{2}$, $\psi(4n+1)$ oraz, w opisanym wyżej przypadku, n).

Gdy $n = 2^m$, wszystkie karty wrócą jednocześnie na swoje miejsca po raz pierwszy po $m+2$ tasowaniach.

Poniżej podane są liczby tasowań potrzebne do powrotu kart na swoje miejsce zgodnie z powyższymi wzorami oraz najmniejsza liczba tasowań *Min*.

$k=2n$	$\frac{\phi(4n+1)}{2}$	$\psi(4n+1)$	n	Min
2	2	4		2
4	3	6		3
6	6	12		6
8	8	16	4	4
10	6	6		6
12	10	20		10
14	14	28		14
16	10	10		5
18	18	36		18
20	20	40	10	10
22	12	12		12
24	21	42		21
26	26	52		26
28	18	18		9
30	30	60		30
32	24	12		6
34	22	22		22
36	36	72	18	9
38	30	30		30
40	27	54		27
42	32	16		8
44	44	88	22	11
46	30	30		10
48	48	96	24	24
50	50	100		50
52	24	12		12
54	54	108		18
56	56	112	28	14
58	36	12		12
60	55	110		55

$k=2n$	$\frac{\phi(4n+1)}{2}$	$\psi(4n+1)$	n	Min
62	50	100		50
64	42	42		7
66	54	18		18
68	68	136	34	34
70	46	46		46
72	56	28		14
74	74	148		74
76	48	48		24
78	78	156		26
80	66	66		33
82	40	20		20
84	78	156		78
86	86	172		86
88	58	58		29
90	90	180		90
92	72	36		18
94	54	18		18
96	96	192	48	48
98	98	196		98
100	66	66		33
102	80	40		10
104	90	90		45
106	70	70		70
108	90	30		15
110	96	48		24
112	60	60		60
114	114	228		38
116	116	232	58	29
118	78	78		78
120	120	240	60	12

$k=2n$	$\frac{\phi(4n+1)}{2}$	$\psi(4n+1)$	n	Min
122	84	84		84
124	82	82		41
126	110	110		110
128	128	256	64	8
130	84	84		84
132	104	52		26
134	134	268		134
136	72	12		12
138	138	276		46
140	140	280	70	35
142	72	36		36
144	136	272		68
146	146	292		146
148	90	90		45
150	126	42		42
152	120	60		30
154	102	102		102
156	156	312	78	78
158	158	316		158
160	106	106		53
162	120	60		30
164	138	138		69
166	108	36		36
168	168	336	84	21
170	150	30		10
172	88	44		44
174	174	348		174
176	176	352	88	44
178	96	48		24
180	171	342		171

$k=2n$	$\frac{\phi(4n+1)}{2}$	$\psi(4n+1)$	n	Min
182	144	72		36
184	120	120		60
186	186	372		186
188	168	84		42
190	126	126		14
192	120	60		60
194	194	388		194
196	130	130		65
198	198	396		22
200	200	400	100	100

Zadanie **2.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna *n*, że ze zbioru

$$\left\{0,1,2,3,\ldots,\tfrac{1}{2}(3^n-1)\right\}$$

można wybrać (2^n+1)-elementowy podzbiór nie zawierający żadnego trójwyrazowego postępu arytmetycznego.

Rozwiązanie

Wypisując małe zbiory bez postępów arytmetycznych zauważamy, że najbardziej efektywne jest wzięcie liczb, które w układzie trójkowym zapisują się przy użyciu zer i jedynek, tzn liczb 0, 1, 3, 4, 9...

Wprawdzie 5 liczb bez postępów arytmetycznych można wybrać spośród liczb od 0 do 8 (np. 0, 1, 3, 7, 8), ale w wyborze 6, 7 lub 8 liczb podana wyżej reguła jest najbardziej optymalna.

9 liczb bez postępów można wybrać z 20 kolejnych liczb całkowitych, 10 z 24, 11 z 26, 12 z 30.

Wydaje się jednak, że podany ciąg jest bezkonkurencyjny w wyborze 2^n liczb bez postępów, do czego potrzeba wykorzystać $\frac{3^n+1}{2}$ kolejnych liczb całkowitych.

Taka hipoteza została sformułowana przez zawodników wszystkich drużyn, ale nie została udowodniona.

Zadanie zostało powtórzone jako zadanie 28 w zawodach indywidualnych.

Zadanie **3.** Niech α, β, γ będą miarami kątów leżących naprzeciwko boków a, b, c pewnego trójkąta. Udowodnić, że

$$\frac{a}{\alpha(b+c-a)}+\frac{b}{\beta(c+a-b)}+\frac{c}{\gamma(a+b-c)}\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\,.$$

Rozwiązanie

Niech p oznacza połowę obwodu, zaś r promień okręgu wpisanego w dany trójkąt. Udowodnimy najpierw lemat.

Lemat: $\quad a\geq b \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{\alpha(p-a)}\geq\dfrac{1}{\beta(p-b)}\,.$

Dowód:

Funkcja $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ jest rosnąca na przedziale $(0,\frac{\pi}{2})$, gdyż

$$f'(x)=\frac{2x-2\sin x\cos x}{2x^2\cos^2 x}=\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}>0.$$

Zatem

$$a\geq b \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac12\alpha\geq\tfrac12\beta \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\operatorname{tg}\frac12\alpha}{\frac12\alpha}\geq\frac{\operatorname{tg}\frac12\beta}{\frac12\beta} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{r}{\alpha(p-a)}\geq\frac{r}{\beta(p-b)} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\alpha(p-a)}\geq\frac{1}{\beta(p-b)}\,.$$

Przystępujemy do dowodu danej nierówności. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a\geq b\geq c$. Wtedy na mocy lematu

$$p-a\leq p-b\leq p-c \qquad\text{oraz}\qquad \frac{1}{\alpha(p-a)}\geq\frac{1}{\beta(p-b)}\geq\frac{1}{\gamma(p-c)}\,.$$

Zatem

$$((p-a)+(p-b)+(p-c))\cdot\left(\frac{1}{\alpha(p-a)}+\frac{1}{\beta(p-b)}+\frac{1}{\gamma(p-c)}\right)\geq 3\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\,.$$

Stąd

$$\left(\frac{a}{\alpha(p-a)}+\frac{b}{\beta(p-b)}+\frac{c}{\gamma(p-c)}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=$$

$$=\frac{p}{\alpha(p-a)}+\frac{p}{\beta(p-b)}+\frac{p}{\gamma(p-c)}\geq 3\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\,,$$

czyli

$$\frac{a}{\alpha(b+c-a)}+\frac{b}{\beta(c+a-b)}+\frac{c}{\gamma(a+b-c)}\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\,.$$

Zadanie **4.** Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano (po jego zewnętrznej stronie) trójkąty BCD i ACE, przy czym

$$AE = BD \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle BDC + \sphericalangle AEC = 180^\circ.$$

Punkt F leży na boku AB i jest wyznaczony przez warunek

$$\frac{AF}{FB} = \frac{DC}{CE}.$$

Dowieść, że z odcinków o długościach $CD+CE$, BC, AC można zbudować trójkąt i że jest on podobny do trójkąta DEF.

Rozwiązanie

Niech N będzie takim punktem leżącym na prostej AE,że

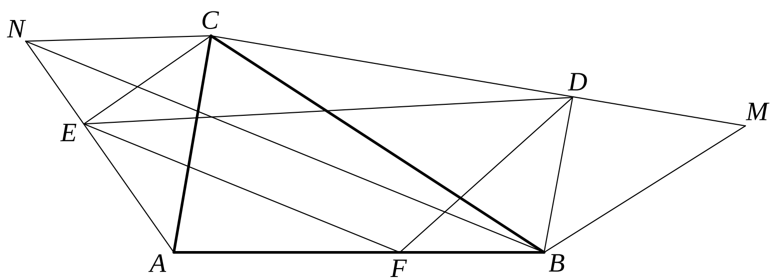
$$\sphericalangle ECN = \sphericalangle BCD \qquad \text{(rys. 14)}.$$

Na mocy założeń, trójkąty BCD oraz NCE są podobne. Mamy następujące równości:

$$\frac{AE}{EN} = \frac{BD}{EN} = \frac{DC}{CE} = \frac{AF}{FB},$$

co oznacza, że proste FE i BN są równoległe. Zatem

$$\frac{EF}{NB} = \frac{AF}{AF+FB} = \frac{1}{1+\frac{FB}{AF}} = \frac{1}{1+\frac{CE}{CD}} = \frac{CD}{CD+CE}. \tag{1}$$



rys. 14

Ponieważ $\sphericalangle BCN = \sphericalangle DCE$ oraz $\dfrac{NC}{CB} = \dfrac{EC}{CD}$, więc trójkąty BCN oraz DCE są podobne. Stąd otrzymujemy równość

$$\frac{NB}{ED} = \frac{BC}{CD}, \tag{2}$$

jak również

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DCB \tag{3}$$

(bowiem po obrocie prostej ED o kąt $\sphericalangle DCB$, otrzymamy prostą równoległą do prostej EF).

Niech M będzie takim punktem leżącym na prostej CD, że $EC = DM$ (rys. 14). Wtedy trójkąty BDM i AEC bedą przystające. Mnożąc stronami równości (1) i (2) dostajemy

$$\frac{EF}{ED} = \frac{BC}{CD+CE} = \frac{BC}{CM},$$

co na mocy równości (3) dowodzi, że trójkąty DEF i MCB są podobne. Pozostaje zauważyć, że trójkąt MCB jest zbudowany z odcinków o długościach $CD+CE$, BC, AC.

Zadanie **5.** Niech $B_1, B_2, \ldots, B_b$ będą takimi k-elementowymi podzbiorami zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, że $|B_i \cap B_j| \leq 1$ dla wszystkich $i \neq j$. Dowieść, że

$$b \leq \left[\frac{n}{k}\left[\frac{n-1}{k-1}\right]\right].$$

($|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X.)

Rozwiązanie

Niech $\mathcal{B}_m$ $(m = 1,2,\ldots,n)$ będzie rodziną tych podzbiorów spośród B_i, które zawierają m. Jeśli $B_i, B_j \in \mathcal{B}_m$, to zbiory $B_i \setminus \{m\}$ i $B_j \setminus \{m\}$ są rozłączne i każdy z nich zawiera dokładnie $k-1$ elementów, z których żaden nie jest równy m. Zatem

$$|\mathcal{B}_m| \leq \left[\frac{n-1}{k-1}\right],$$

gdzie $|\mathcal{B}_m|$ jest liczbą podzbiorów B_j należących do rodziny $\mathcal{B}_m$.
Z drugiej strony

$$\sum_{m=1}^{n} |\mathcal{B}_m| = kb\,,$$

gdyż każdy z b podzbiorów B_j $(j = 1,2,\ldots,b)$ zawiera dokładnie k elementów. Stąd

$$kb = \sum_{m=1}^{n} |\mathcal{B}_m| \leq n \cdot \left[\frac{n-1}{k-1}\right],$$

czyli ostatecznie

$$b \le \left[\frac{n}{k}\left[\frac{n-1}{k-1}\right]\right].$$

Zadanie **6.** Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|12^k - 5^n|$, gdzie k, n są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Rozwiązanie

Dla $k = n = 1$ wartość wyrażenia danego w zadaniu wynosi 7. Wykażemy, że dla żadnych k, n nie osiąga ono mniejszej wartości. Ponieważ liczba $|12^k - 5^n|$ nie dzieli się przez 2, 3 ani 5, więc możemy wykluczyć na tej podstawie liczby 0, 2, 3, 4, 5, 6 jako możliwe jej wartości.

Pozostaje wykazać, że $12^k - 5^n \neq \pm 1$.

Można tego dowieść dwoma sposobami: rozważając reszty z dzielenia przez 11 lub przez 13.

Sposób I:

Przy dzieleniu przez 11 liczba 12^k daje resztę 1, natomiast liczba 5^n jedną z reszt 5, 3, 4, 9, 1.

Sposób II:

Przy dzieleniu przez 13 liczba 12^k daje resztę 1 lub 12, natomiast liczba 5^n jedną z reszt 5, 12, 8, 1.

Zadanie **1.** Znaleźć wszystkie takie funkcje ciągłe $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$(f(x)f(y))^2 = f(x-y)f(x+y)\ .$$

Rozwiązanie

Dla $x=y=0$ otrzymujemy $f^4(0)=f^2(0)$, skąd mamy $f(0)=0$ lub $f(0)=\pm1$.

Dla $x=y$ dostajemy $f^4(x)=f(0)f(2x)$, co w przypadku $f(0)=0$ daje $f\equiv 0$.

Wystarczy więc zająć się przypadkiem, gdy $f(0)=1$ (bowiem jeżeli $f(0)=-1$, to funkcja $-f$ także spełnia dane równanie funkcyjne). Ponieważ $f^4(x)=f(2x)$, więc gdyby dla pewnego x było $f(x)=0$, to mielibyśmy $f\left(\frac{x}{2^n}\right)=0$ dla wszystkich n naturalnych, co stoi w sprzeczności z ciągłością funkcji f oraz warunkiem $f(0)=1$. Zatem funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie. Łatwo sprawdzić, że funkcja g określona wzorem

$$g(x)=\frac{f(x)}{(f(1))^{x^2}}$$

spełnia dane równanie funkcyjne oraz, że $g(0)=g(1)=1$.

Podstawiając $x=n$, $y=1$ otrzymujemy $g^2(n)=g(n-1)g(n+1)$. Zatem $g(n)=1$ dla n naturalnych. Z kolei podstawienie $x=0$ daje $g^2(y)=$ $=g(-y)g(y)$, skąd otrzymujemy parzystość funkcji g, a więc równość $g(n)=1$ dla n całkowitych. Równość $g(x)=g^4\left(\frac{x}{2}\right)$ daje $g(x)=1$ dla liczb x dwójkowo wymiernych (zob. zad. 11 z zawodów indywidualnych), skąd na mocy ciągłości funkcji g dostajemy $g(x)=1$ dla wszystkich x rzeczywistych.

Ostatecznie dane równanie funkcyjne spełnia funkcja zerowa oraz funkcje postaci

$$f(x)=\pm a^{x^2}\ ,$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Zadanie **2.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n iloczyn wszystkich takich liczb pierwszych p, które spełniają nierówność $n<p\le 2n$, jest mniejszy od 4^n.

Rozwiązanie

Zadanie nie zostało rozwiązane przez uczestników i zostało powtórzone na zawodach indywidualnych jako zadanie 16.

Zadanie **3.** Zbiór $\{1,2,3,\ldots,65\}$ podzielono na 4 rozłączne zbiory. Dowieść, że znajdą się takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne) należące do jednego zbioru, że $a+b=c$.

Rozwiązanie

Zadanie nie zostało rozwiązane przez uczestników i zostało powtórzone na zawodach indywidualnych jako zadanie 14.

Zadanie **4.** Rozważamy wszystkie trójkąty równoramienne o wierzchołkach będących wierzchołkami danego n-kąta foremnego. Dla jakich n dokładnie połowa tych trójkątów to trójkąty ostrokątne?

Rozwiązanie

Liczymy, ile jest trójkątów równoramiennych wpisanych w dany n-kąt foremny. Każdy wierzchołek n-kąta jest wierzchołkiem przy równych ramionach w $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ takich trójkątach. Łącznie doliczymy się więc $n\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]$ trójkątów równoramiennych, przy czym trójkąty równoboczne (które występują tylko przy $3|n$ i jest ich $\frac{n}{3}$) są liczone potrójnie. Zatem szukana liczba trójkątów równoramiennych wynosi

$$n\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right], \quad \text{gdy } 3\nmid n$$

oraz

$$n\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]-\frac{2n}{3}, \quad \text{gdy } 3|n\,.$$

Każdy wierzchołek n-kąta jest wierzchołkiem przy równych ramionach w $\left[\frac{n}{4}\right]$ trójkątach równoramiennych nieostrokątnych. Stąd łączna liczba takich trójkątów wynosi

$$n\cdot\left[\frac{n}{4}\right]\,.$$

Mamy wyznaczyć takie n, że

$$2n\cdot\left[\frac{n}{4}\right]=n\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right], \quad \text{gdy } 3\nmid n$$

oraz

$$2n\cdot\left[\frac{n}{4}\right]=n\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]-\frac{2n}{3},\quad \text{gdy } 3|n\,.$$

Dzieląc powyższe równości stronami przez n otrzymujemy

$$2\left[\frac{n}{4}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right],\quad \text{gdy } 3\not| n$$

oraz

$$2\left[\frac{n}{4}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]-\frac{2}{3},\quad \text{gdy } 3|n\,.$$

Druga z równości nie może zachodzić, gdyż jej prawa strona nie jest całkowita. Natomiast pierwsza równość jest spełniona dla liczb n dających z dzielenia przez 4 resztę 1 lub 2.

Ostatecznie szukanymi liczbami są liczby dające z dzielenia przez 12 resztę 1, 2, 5 lub 10.

Zadanie **5.** Wśród $n\geq 2$ osób niektóre się ze sobą kolegują. Zakładamy, że jeśli osoba A uważa B za swojego kolegę, to B także uważa A za swojego kolegę. Jest od tego wszakże jeden wyjątek. Fredek uważa wszystkich za swoich kolegów niezależnie od tego, czy oni uważają go za swojego kolegę, czy też nie. Dla jakich n może się zdarzyć, że każda osoba twierdzi, że ma inną liczbę kolegów?

Rozwiązanie

Tak może się zdarzyć dla dowolnego n. Wskażemy układ koleżeństwa, przy którym każda osoba ma inną liczbę kolegów. Ponumerujemy $n-1$ osób (Fredka nie numerujemy) liczbami od 0 do $n-2$. Przyjmiemy, że dwie osoby kolegują się, jeśli suma przypisanych im numerów jest większa od $n-2$. Założymy ponadto, że osoby o numerach większych od $\left[\frac{n-2}{2}\right]$ uważają Fredka za swojego kolegę. Z założeń zadania wynika, że Fredek ma $n-1$ kolegów. Wykażemy, że osoba o numerze k ma dokładnie k kolegów.

Dla $k\leq\left[\frac{n-2}{2}\right]$ tymi kolegami są osoby o numerach od $n-1-k$ do $n-2$. Zauważamy przy tym, że $k<n-1-k$. Liczba kolegów osoby o numerze k wynosi więc k.

Dla $k\geq\left[\frac{n}{2}\right]$ kolegami są osoby o numerach od $n-1-k$ do $n-2$ bez k oraz Fredek. Zauważamy, że $k\geq n-1-k$. Także i w tym przypadku osoba o numerze k ma k kolegów.

Zadanie **6.** Długości przekątnych trapezu są równe 13 oraz 15, zaś jego wysokość jest równa 5. Wyznaczyć pole tego trapezu.

Rozwiązanie

Wbrew pozorom istnieją dwa możliwe rozwiązania: $25\sqrt{2}+30$ oraz $25\sqrt{2}-30$.

Zadanie **7.** Która liczba jest większa:

$$\sin^2 17^\circ + \sin^2 67^\circ + 2\sin 17^\circ \sin 67^\circ \sin 6^\circ \quad \text{czy} \quad \sin^2 84^\circ\ ?$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że obie liczby są równe.

Sposób I: Rozpatrzmy trójkąt o kątach 17°, 67°, 96° leżących odpowiednio naprzeciwko boków długości a, b, c. Na mocy twierdzenia cosinusów

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 96^\circ = a^2 + b^2 + 2ab\sin 6^\circ. \tag{1}$$

Natomiast z twierdzenia sinusów mamy $a = 2R\sin 17^\circ$, $b = 2R\sin 67^\circ$, $c = 2R\sin 84^\circ$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na rozważanym trójkącie. Powyższe równości oraz równość (1) dają tezę.

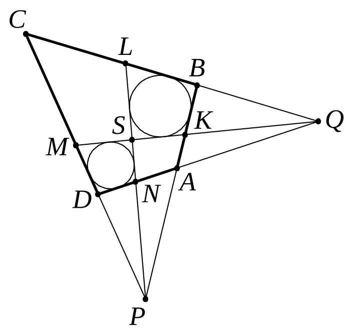
Sposób II: Mamy następujące równości:

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha+\beta) &= (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)^2 = \\
&= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha = \\
&= \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) + \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha) + \\
&\qquad\qquad + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = \\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta = \\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).
\end{aligned}$$

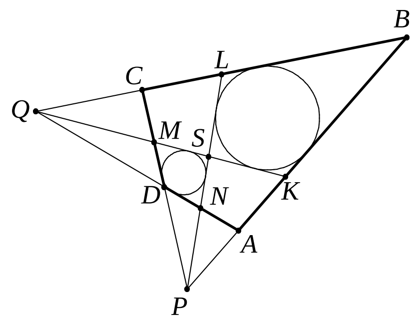
Podstawiając $\alpha = 17^\circ$, $\beta = 67^\circ$ dostajemy tezę.

Zadanie **8.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ nie będący trapezem. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA. Odcinki KM i NL przecinają się w punkcie S. Proste AB, CD oraz NL przecinają się w jednym punkcie. Również proste AD, BC oraz KM przecinają się w jednym punkcie. Udowodnić, że jeżeli w każdy z czworokątów $KBLS$, $NSMD$ można wpisać okrąg, to w czworokąt $ABCD$ można również wpisać okrąg.

Rozwiązanie



rys. 15



rys. 16

Możliwe są dwa przypadki.

W pierwszym przypadku (rys. 15) z możliwości wpisania okręgów w czworokąty $KBLS$ i $NSMD$ wynika, że $BQ+BP=SQ+SP$ oraz $SQ+SP=DQ+DP$, a stąd, że $BQ+BP=DQ+DP$.

W drugim natomiast przypadku (rys. 16) z tych samych założeń wynika, że $BP+QS=BQ+PS$ i $QD+PS=PD+QS$, a stąd, że
$BP+QD=BQ+PD$.

Zadanie **9.** Znaleźć największą liczbę naturalną k, przez którą podzielna jest każda z liczb $n^{16}-n^4$, gdzie $n=2,3,4,5,\ldots$.

Rozwiązanie

Ponieważ $k \mid 2^{16}-2^4=65520$, więc musi być $k \leq 65520$. Wykażemy, że $65520 \mid n^{16}-n^4$ dla każdego n.

Zauważmy, że $65520=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$. Podzielność liczby $n^{16}-n^4$ przez 65520 wynika z jej podzielności przez liczby 16, 9, 5, 7 i 13.

Podzielność przez 16 jest oczywista dla n parzystych. Natomiast dla n nieparzystych wynika ona z tego, że czwarta potęga liczby nieparzystej daje z dzielenia przez 16 z resztę 1.

Podzielność przez 9 wynika z twierdzenia Eulera (zob. dodatek B).

Podzielności przez 5, 7 i 13 wynikają z małego twierdzenia Fermata.

Zadanie **10.** Dany jest trójkąt ABC. Niech ABX oraz ACY będą takimi trójkątami zbudowanymi na zewnątrz trójkąta ABC, że

$$\sphericalangle XBA + \sphericalangle YCA = 180^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle XAB = \sphericalangle YAC = 15^\circ .$$

Udowodnić, że wszystkie proste XY, odpowiadające różnym położeniom punktów X i Y, mają punkt wspólny.

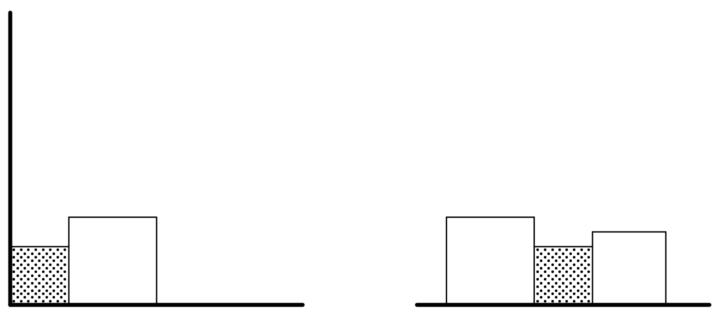
Rozwiązanie

Proste XB i YC przecinają się w punkcie P należącym do okręgu o, opisanego na trójkącie ABC. Niech punkty K i L będą odpowiednio punktami przecięcia okręgu o z prostymi AX i AY. Wówczas na mocy twierdzenia Pascala zastosowanego do „sześciokąta” $KCPBLA$, prosta XY przechodzi przez punkt przecięcia prostych CK i BL, który nie zależy od wyboru punktów X i Y.

Zadanie **11.** Czy sześcian można podzielić na różne sześciany w liczbie większej niż jeden sześcian?

Uwaga: Sformułowanie zadania jest zainspirowane przez przepisy wrocławskiego MPK, zgodnie z którymi *dozwolony jest przewóz psów w liczbie nie większej niż jeden pies.*

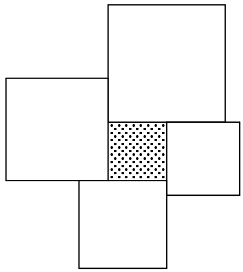
Rozwiązanie

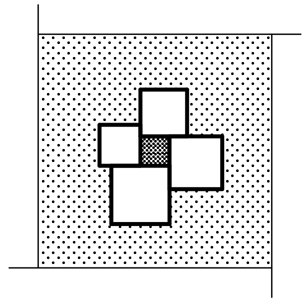


Zauważmy, że przy podziale kwadratu na różne kwadraty, najmniejszy kwadrat podziału nie może znajdować się ani w rogu, ani przy boku dużego kwadratu.

Załóżmy, że sześcian S podzielono na skończoną (i większą od 1) liczbę różnych sześcianów. Wyróżnijmy kierunek pionowy tak, aby o każdej ścianie sześcianu można było powiedzieć, czy jest górna, dolna, czy boczna.

Niech S_1 będzie najmniejszym spośród tych sześcianów podziału, których dolna ściana leży na dolnej ścianie sześcianu S. Ponieważ sześciany podziału wyznaczają na dolnej ścianie sześcianu S podział kwadratu na różne kwadraty, sześcian S_1 nie może dotykać bocznych ścian sześcianu S. Zatem S_1 jest otoczony sześcianami większymi od niego (widok z góry).





Górna ściana sześcianu S_1 leży więc poniżej górnych ścian sześcianów sąsiednich. Jeśli więc dolna ściana jakiegokolwiek sześcianu podziału ma punkty wspólne z górną ścianą sześcianu S_1, to jest w niej całkowicie zawarta. Wśród takich sześcianów znajdzie się najmniejszy sześcian S_2. Dolna ściana S_2 nie dotyka boków górnej ściany sześcianu S_1, zatem S_2 jest otoczony sześcianami od niego większymi.

Podobnie znajdujemy S_3 jako najmniejszy sześcian, którego dolna ściana leży na górnej ścianie sześcianu S_2. W ten sposób wskazujemy nieskończony ciąg sześcianów. Zatem podział sześcianu na skończoną liczbę różnych sześcianów nie jest możliwy.

Zadanie **12.** Znaleźć pierwszą cyfrę po przecinku i ostatnią przed przecinkiem w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2000} .$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że liczba

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2000}+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2000}$$

jest całkowita.

Ponadto

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2000}<(1{,}8-1{,}4)^{2000}<0{,}4^3<0{,}1 .$$

Zatem pierwsza cyfra po przecinku w rozwinięciu liczby $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2000}$ jest równa 9.

Zauważmy, że liczba $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2-10x+1$. Zatem ciąg

$$c_n=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n}+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2n}$$

spełnia rekurencję liniową

$$c_{n+2}=10c_{n+1}-c_n ,$$

skąd $c_{n+2}\equiv -c_n(\bmod 10)$ oraz $c_{n+4}\equiv c_n(\bmod 10)$. W szczególności

$$c_{1000}\equiv c_0=2(\bmod 10) ,$$

skąd wynika, że ostatnią cyfrą przed przecinkiem w rozwinięciu liczby danej w zadaniu jest 1.

Uwaga: Liczba $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2000}$ jest bardzo mała i dlatego dana w zadaniu liczba ma znacznie więcej niż jedną dziewiątkę po przecinku. Dokładne obliczenia pokazują, że dziewiątek jest 995.

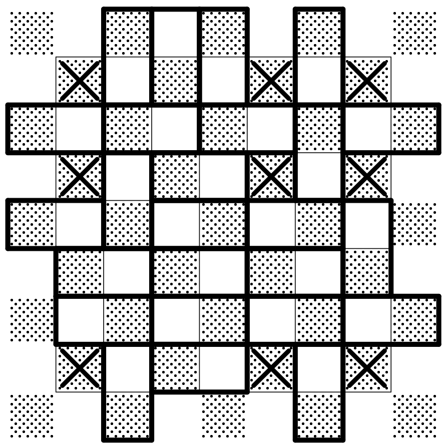
Zadanie **13.** Liczbą *bip* nazwiemy każdą liczbę postaci $\binom{2n}{n}$, gdzie $n\geq 1$. Liczbą *bip-bip* nazwiemy każdą liczbę *bip* lub sumę co najmniej dwóch różnych liczb *bip*.

Na nieskończonej szachownicy wprowadzono układ współrzędnych, którego punkty kratowe pokrywają się ze środkami pól danej szachownicy. Następnie usunięto z szachownicy wszystkie te pola, których środki mają współrzędne będącymi liczbami *bip-bip*. Czy tak powstałą figurę można pokryć kostkami domina?

Rozwiązanie

Pomalujmy na czarno pola o parzystej sumie współrzędnych, a pozostałe pola na biało.

Rozważmy kwadrat złożony z pól o obu współrzędnych będących liczbami od 2 do 98. Ponieważ wśród tych liczb jest 15 liczb *bip-bip*, a wszystkie liczby *bip-bip* są parzyste, więc z tego kwadratu usunięto 225 pól czarnych. Załóżmy, że dana w zadaniu figura została pokryta kostkami domina. Wówczas mamy także pokrycie wybranego kwadratu z usuniętymi polami, przy czym niektóre kostki biorące udział w tym pokryciu mogą mieć jedno pole poza kwadratem (rysunek poniżej przedstawia sytuację dla kwadratu złożonego z pól o współrzędnych od 2 do 8).



Dołączmy więc do kwadratu te pola, które są pokryte przez kostki pokrywające jedno pole wewnątrz kwadratu. Tak powstała figura składa się z co najmniej $\frac{97^2-1}{2}=4704$ pól białych i co najwyżej $\frac{97^2+1}{2}-225+192=4672$ pól czarnych, nie może więc być pokryta dokładnie kostkami domina, gdyż każda kostka pokrywa jedno pole czarne i jedno białe.

Zadanie **14.** Niech

$$K(n)=\sqrt{\left(\left\lceil\sqrt{n}\right\rceil\right)^2-n}\,.$$

Dowieść, że w ciągu $a_n=K(10080n)$ występuje 100 kolejnych liczb całkowitych.

Uwaga: $\lceil x\rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x.

Rozwiązanie

Niech $n=2520+k$, gdzie $0\le k\le 101$. Wówczas

$$a_n=\sqrt{\left(\left\lceil\sqrt{5040^2+2\cdot 5040k}\right\rceil\right)^2-5040^2-2\cdot 5040k}\,.$$

Ponieważ

$$(5040+k-1)^2=5040^2+2\cdot 5040k-10080+(k-1)^2<$$
$$<5040^2+2\cdot 5040k\le 5040^2+2\cdot 5040k+k^2=(5040+k)^2\,,$$

więc mamy

$$\left\lceil\sqrt{5040^2+2\cdot 5040k}\right\rceil=5040+k\,,$$

skąd

$$a_n=\sqrt{(5040+k)^2-5040^2-2\cdot 5040k}=\sqrt{k^2}=k\,.$$

Uwaga: Bezpośrednie wyliczenie pokazuje pewną ciekawą własność ciągu (a_n), a mianowicie, że $a_n\in\mathbb{Z}$ dla $1\le n\le 57$, ale $a_{58}\notin\mathbb{Z}$. Jednak nic z tej obserwacji dla tezy zadania nie wynika.

Zadanie **15.** Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Pewien okrąg o środku I jest styczny do trzech okręgów dopisanych do trójkąta ABC. Czy stąd wynika, że trójkąt ABC jest równoboczny?

Rozwiązanie

Nie. Warunki zadania spełnia trójkąt o bokach długości 2, 9, 9.

Zadanie **16.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których istnieje nieskończenie wiele takich par liczb naturalnych (a,b), że

$$a\mid b^k+1 \qquad \text{oraz} \qquad b\mid a^k+1.$$

Rozwiązanie

Dla $k=1$ otrzymujemy $a \mid b+1$ oraz $b \mid a+1$, a stąd

$$a \leq b+1 \leq a+2\,.$$

Wobec tego jedynymi parami (a,b) takimi, że $a \mid b+1$ oraz $b \mid a+1$ są $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$. Jest więc ich skończenie wiele.

Załóżmy z kolei, że $k \geq 2$. Definiujemy ciąg (x_n) rekurencyjnie

$$x_0 = x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^k+1}{x_{n-1}}\,.$$

Wówczas ciąg (x_n) jest rosnący oraz liczby x_0, x_1, x_2, x_3 są całkowite. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdego n, liczba x_n jest całkowita.

Istotnie, z założenia, że liczby x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} są całkowite, otrzymujemy

$$x_n x_{n-2} = x_{n-1}^k + 1 \qquad \text{oraz} \qquad x_{n+1}x_{n-1} = x_n^k + 1.$$

Podnosząc drugie równanie do k-tej potęgi, a następnie wyznaczając x_{n-1}^k z pierwszego równania i podstawiając wynik do drugiego związku dostajemy równość postaci

$$x_{n+1}^k + 1 = x_n \cdot (\text{liczba całkowita}),$$

co dowodzi, że x_{n+2} jest liczbą całkowitą.

Pozostaje zauważyć, że każda para (a,b) postaci (x_k, x_{k+1}), gdzie $k=0,1,2,\ldots$, spełnia warunki

$$a \mid b^k + 1 \qquad \text{oraz} \qquad b \mid a^k + 1.$$

Zadanie **17.** Rozstrzygnąć, czy istnieją takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{364}$ zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 17\}$, że $|A_i \cap A_j| \leq 3$ dla wszystkich $i \neq j$. ($|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X.)

Rozwiązanie

Takie podzbiory istnieją.

Rodzinę X wszystkich pięcioelementowych podzbiorów danego zbioru $\{1, 2, \ldots, 17\}$ rozbijamy na 17 podrodzin $X_1, X_2, \ldots, X_{17}$:

$$X_k = \{\ \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}\ :\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv k \pmod{17}\ \}.$$

W jednej z tych podrodzin są co najmniej $\frac{\binom{17}{5}}{17} = 364$ podzbiory.
Podzbiory te spełniają warunki zadania.

Zadanie **18.** Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Dowieść, że środki okręgów wpisanych w trójkąty AML, BKM, CLK leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.

Rozwiązanie

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Ponadto niech odcinek AI przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punkcie J. Ponieważ prosta AM jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC, więc $\sphericalangle AMJ = \sphericalangle JLM$. Ponadto ze względu na symetrię otrzymujemy $\sphericalangle JLM = \sphericalangle JML$. Zatem MJ jest dwusieczną kąta AML. To oznacza, że J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt AML. Analogicznie dowodzimy, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BKM, CLK leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.

Zadanie **19.** Niech h_a, h_b, h_c będą wysokościami, zaś r promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Czy z własności

$$h_a + h_b + h_c = 9r$$

wynika, że trójkąt ABC jest równoboczny?

Rozwiązanie

Tak. Z równości $(a+b+c)r = ah_a = bh_b = ch_c$, otrzymujemy

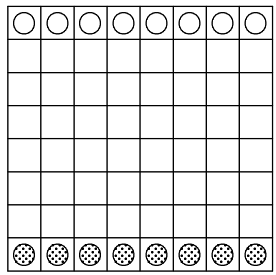
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Zatem

$$\frac{3}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} = 3r = \frac{h_a+h_b+h_c}{3}.$$

Na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i harmoniczną musi być $h_a = h_b = h_c$, skąd $a = b = c$.

Zadanie **20.** Na szachownicy ustawionych jest 8 pionków białych i 8 czarnych, jak na rysunku.



Jeden z graczy gra pionkami białymi, drugi czarnymi. Gracze wykonują ruchy na przemian poczynając od gracza grającego białymi. Dozwolony ruch polega na przesunięciu własnego pionka w pionie na wolne pole tak, aby nie przeskakiwać pionka przeciwnika. Wygrywa ten, kto uniemożliwi przeciwnikowi wykonanie ruchu. Rozstrzygnąć, czy jeden z graczy ma strategię wygrywającą. Jeśli tak, to który?

Rozwiązanie

Gracz grający czarnymi pionkami może zapewnić sobie zwycięstwo. W tym celu musi kopiować ruchy przeciwnika, gdy ten przesuwa białe piony ku dołowi, a niwelować je, gdy gracz biały wykonuje ruch do góry. Kopiowanie ruchu białych o k pól w dół w n-tej kolumnie polega na przesunięciu w górę o k pól czarnego piona w $(9-n)$-tej kolumnie. Niwelowanie ruchu białych w górę polega na przesunięciu czarnego piona o tyle samo pól w górę i w tej samej kolumnie. Mówiąc dokładniej, gracz czarny powinien kierować się przy wyborze ruchu dwiema zasadami:

1. Wykonywać ruchy tylko ku górze (to zapewnia zakończenie gry po skończenie wielu posunięciach.

2. Podawać przeciwnikowi pozycje, w których liczby pól pomiędzy pionkami w poszczególnych kolumnach szachownicy tworzą 4 pary liczb równych (to zapewnia utrzymanie się na pozycji wygrywającej).

Uwaga: Pozycja początkowa gry opisana w zadaniu pozwala uniknąć konieczności analizowania ogólnej strategii w grze.

Ogólna strategia jest dalece mniej oczywista. Aby ją zgrabnie sformułować musimy najpierw zdefiniować dodawanie dwójkowe. Mówiąc najbardziej obrazowo, dodawanie dwójkowe polega na zapisaniu liczb w układzie dwójkowym, a następnie pisemnym dodaniu ich ”bez przenoszenia”.

Bardziej ściśle, dla $c_0, c_1, \ldots, c_k, d_0, d_1, \ldots, d_k \in \{0,1\}$ definiujemy

$$\sum_{i=0}^{k} c_i 2^i +_2 \sum_{i=0}^{k} d_i 2^i = \sum_{i=0}^{k} (c_i +_2 d_i) 2^i,$$

gdzie $0 +_2 0 = 1 +_2 1 = 0$ oraz $1 +_2 0 = 0 +_2 1 = 1$.

W praktyce przy dodawaniu dwójkowym rozkładamy każdy ze składników na sumę różnych potęg dwójki, a następnie dodajemy, pamiętając, że różne potęgi dwójki dodaje się w zwykły sposób, a równe potęgi dwójki przy dodawaniu dają 0, na przykład

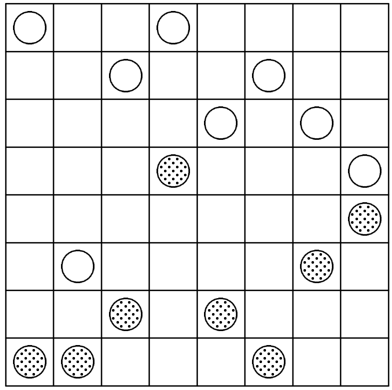
$$13 +_2 7 +_2 12 = (8+4+1) +_2 (4+2+1) +_2 (8+4) =$$

$$= 8 +_2 4 +_2 1 +_2 4 +_2 2 +_2 1 +_2 8 +_2 4 = 8 +_2 8 +_2 4 +_2 4 +_2 4 +_2 2 +_2 1 +_2 1 =$$

$$= 4 +_2 2 = 4 + 2 = 6\ .$$

Strategia w opisanej w zadaniu grze jest następująca: należy podawać przeciwnikowi pozycję, w której suma dwójkowa liczb pól pomiędzy pionkami w poszczególnych kolumnach jest równa 0. Należy przy tym zbliżać się do pionka przeciwnika, a nie od niego oddalać, ale ten warunek ma tylko zapewnić skończoność gry i nie pozbawia nas szansy wygranej, jeśli przez jakiś czas zechcemy grę niepotrzebnie przedłużać.

W pozycji przedstawionej na rysunku, gracz mający wykonać ruch widzi, że w poszczególnych kolumnach liczby pól między pionkami wynoszą kolejno 6, 1, 4, 2, 3, 5, 2, 0.



Dwójkowa suma tych liczb wynosi 5. Gracz cieszy się, że jest ona różna od 0 i próbuje tak dopasować ruch, aby podać przeciwnikowi pozycję z sumą 0.

Ruchy wygrywające w tej pozycji to zmniejszenie liczby pól między pionkami:

- w pierwszej kolumnie z 6 do 3,
- w trzeciej kolumnie z 4 do 1,
- w szóstej kolumnie z 5 do 0.

Jeśli przy ruchu jest gracz grający białymi pionkami, to ma on również możliwość przesunięcia pionka w kolumnie drugiej o 3 pola do góry. Zachowuje mu to szanse wygranej, jednak bez potrzeby opóźnia zakończenie gry.

Zadanie **21.** Pasem o szerokości *d* nazwiemy obszar zawarty między dwiema prostymi równoległymi odległymi o *d*, wraz z tymi prostymi. Czy kwadrat o boku 1 można pokryć skończoną liczbą pasów o sumie szerokości mniejszej od 1?

Rozwiązanie

Nie można. Gdyby można było pokryć kwadrat pasami o sumie szerokości mniejszej od 1, tym bardziej mielibyśmy możliwość pokrycia koła o średnicy 1. To z kolei dawałoby możliwość pokrycia sfery pasami przestrzennymi prostopadłymi do płaszczyzny kwadratu. Jednak pas przestrzenny o grubości *d* wycina ze sfery o średnicy 1 pole nie większe niż

$d \cdot 4\pi$. Pasy przestrzenne o sumie grubości mniejszej od 1 nie mogą więc pokryć całej powierzchni sfery.

Zadanie **22.** Za siedmioma górami, za siedmioma rzekami,
W III Wielokątnej Wypukłej mieszka
Docent Karol Juzek z dwunastoma kolesiami.

Każdy koleś ma zagrodę w kształcie koła
I każdy chce być wojewodą
W województwie ze swoją zagrodą.

Konstytucja III Wielokątnej Wypukłej przewiduje wszakże,
Że województwa muszą być Wielokątne Wypukłe także.
A ma być ich dwanaście.

Wykazać, że Docent Karol Juzek (tak mu dopomóż Boże)
Reformę administracyjną III Wielokątnej Wypukłej
Przeprowadzić może.

Rozwiązanie

Władza każdego kolesia
Tak daleko sięga,
Gdzie mniejsza niż względem zagród
Innych kolesiów potęga.

Już wiedzą o tym i marszałek i wice
I Docent Karol Juzek razem z kolesiami,
Że w III Wielokątnej Wypukłej województw granice
Są teraz potęgowymi osiami.

Dodatek A Rozwiązywanie rekurencji liniowych

Rozważamy ciągi spełniające równanie rekurencyje

(1) $$c_n = ac_{n-1} + bc_{n-2} \ .$$

Chcielibyśmy umieć wypisać wzór ogólny na c_n znając c_0 i c_1. Zastanówmy się najpierw, czy takie równanie może być spełnione przez ciąg geometryczny. Jeśli tak, to oznaczając przez x iloraz ciągu geometrycznego otrzymujemy $c_n = c_0 x^n$ i równanie rekurencyjne (1) przyjmuje postać

$$c_0 x^n = ac_0 x^{n-1} + bc_0 x^{n-2} \ ,$$

co na ogół (tzn. dla $c_0 \neq 0 \neq x$) sprowadza się do równania $x^2 = ax + b$. Równanie to nazywamy równaniem charakterystycznym rekurencji (1). Jeżeli x_1 i x_2 są pierwiastkami tego równania, to ciągi geometryczne o ilorazach x_1 i x_2 spełniają równanie (1). Nie jest istotne, czy x_1 i x_2 są rzeczywiste czy zespolone, założymy jednak, że są one różne.

Zauważmy też, że ciąg będący sumą (wyraz po wyrazie) ciągów spełniających równanie (1) też spełnia to równanie. Dane równanie rekurencyjne jest więc spełnione przez wszystkie ciągi postaci

(2) $$c_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n \ .$$

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu rekurencyjnego są wyznaczone przez c_0 i c_1, staramy się dopasować α i β tak, aby równanie (2) było spełnione dla $n = 0$ i $n = 1$. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \alpha + \beta = c_0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = c_1 \end{cases} ,$$

który ma zawsze rozwiązanie

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{c_1 - x_2 c_0}{x_1 - x_2} \\ \beta = \dfrac{x_1 c_0 - c_1}{x_1 - x_2} \end{cases} .$$

Podobnie postępujemy w przypadku równań rekurencyjnych wyższego rzędu z pierwiastkami jednokrotnymi równania charakterystycznego.

Pierwiastki wielokrotne traktujemy następująco. Jeżeli x_i jest k-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to bazowym ciągiem rekurencyjnym odpowiadającym mu jest nie tylko (x_i^n), ale także ciągi $(n^j x_i^n)$ dla $j=1,2,\ldots,k-1$.

Dodatek B

Małe twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera

Małe twierdzenie Fermata (wersja 1): Dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby całkowitej a

$$p \mid a^p - a\ .$$

Małe twierdzenie Fermata (wersja 2): Dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby całkowitej a względnie pierwszej z p

$$p \mid a^{p-1} - 1\ .$$

Idea dowodu.

Ponieważ dla $1 \le i \le p-1$ liczba $\binom{p}{i}$ dzieli się przez p, więc dla dowolnych liczb całkowitych b, c mamy

$$(b+c)^p = b^p + c^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} b^i c^{p-i} \equiv b^p + c^p \pmod{p}\ .$$

Przez indukcję otrzymujemy

$$a^p = \underbrace{(1+1+1+\ldots+1+1)}_{a}{}^p \equiv \underbrace{1^p+1^p+1^p+\ldots+1^p+1^p}_{a} = a \pmod{p}$$

dla a dodatnich oraz

$$(-a)^p \equiv -a^p \equiv -a \pmod{p}$$

dla a ujemnych.

Uwaga: Nie każda liczba spełniająca tezę małego twierdzenia Fermata jest pierwsza. Liczby złożone spełniające małe twierdzenie Fermata są zwane liczbami Carmichaela (czyt. karmajkla) i jest ich nieskończenie wiele. Najmniejszą jest $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.

Twierdzenie Eulera (wersja powszechnie używana): Dla dowolnej liczby naturalnej n i liczby całkowitej a względnie pierwszej z n

$$n \mid a^{\varphi(n)} - 1 \ ,$$

gdzie

$$\varphi(p^k) = (p-1)\,p^{k-1}$$

dla liczby pierwszej p oraz

$$\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t)$$

dla liczb względnie pierwszych s i t.

Twierdzenie Eulera (wersja wzmocniona): Dla dowolnej liczby naturalnej n i liczby całkowitej a względnie pierwszej z n

$$n | a^{\psi(n)} - 1 \ ,$$

gdzie

$$\psi(p^k) = (p-1)\,p^{k-1}$$

dla liczby pierwszej nieparzystej p,

$$\psi(2) = 1, \quad \psi(4) = \psi(8) = 2, \quad \psi(2^k) = 2^{k-2} \qquad \text{dla } \ k \geq 4$$

oraz

$$\psi(st) = \mathrm{NWW}(\psi(s), \psi(t))$$

dla liczb względnie pierwszych s i t.

Twierdzenie Eulera dla potęg liczb pierwszych dowodzimy indukcyjnie. Krok indukcyjny przebiega następująco. Jeśli liczba a jest względnie pierwsza z p oraz

$$a^{(p-1)p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k} \ ,$$

to $a^{(p-1)p^{k-1}}$ jest postaci $cp^k + 1$, skąd

$$a^{(p-1)p^k} = (cp^k+1)^p \equiv 1 + cp^k \binom{p}{1} + c^2 p^{2k} \binom{p}{2} +$$
$$+ \text{ inne wyrazy podzielne przez } p^{k+1} \equiv 1 \pmod{p^{k+1}} \ .$$

Wniosek: Dla $n \geq 3$ i a względnie pierwszego z n

$$a^{\varphi(n)\text{””}2} \equiv \pm 1 \pmod{n} \ .$$

Jeśli n jest potęgą liczby pierwszej nieparzystej lub podwojoną potęgą liczby pierwszej nieparzystej, to

$$a^{\varphi(n)}-1=\left(a^{\varphi(n)\text{””}2}+1\right)\left(a^{\varphi(n)\text{””}2}-1\right)\equiv 0 \pmod{n} ,$$

skąd wynika, że jeden z czynników iloczynu $\left(a^{\varphi(n)\text{””}2}+1\right)\left(a^{\varphi(n)\text{””}2}-1\right)$ dzieli się przez n.

Dla $n=4$ teza wniosku jest oczywista.

Gdy n jest potęgą dwójki większą od 4, to

$$a^{\psi(n)}=a^{\varphi(n)\text{””}2}\equiv 1 \pmod{n} .$$

Gdy n nie jest potęgą liczby pierwszej, ani podwojoną potęgą liczby pierwszej, tezę wniosku otrzymujemy z podzielności $\psi(n)\,|\,\frac{\varphi(n)}{2}$; wówczas $a^{\varphi(n)\text{””}2}\equiv 1 \pmod{n}$.

Uwaga: $7^4\equiv 1 \pmod{15}$, ale to nie znaczy, że $7^2\equiv \pm 1 \pmod{15}$.

Dodatek C

Twierdzenie Ramsey'a

Zastanówmy się, przy jakim R_k potrafimy rozwiązać następujące zadanie:

Krawędzie grafu pełnego (każdy wierzchołek połączony z każdym innym) o R_k wierzchołkach pomalowano k kolorami. Dowieść, że znajdą się 3 wierzchołki połączone tym samym kolorem (tzn. znajdziemy jednokolorowy trójkąt).

Krok indukcyjny daje się przeprowadzić przy założeniu

$$R_k=k(R_{k-1}-1)+2$$

w następujący sposób:

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k-1$ i niech dany będzie graf pełny o R_k wierzchołkach pokolorowany k kolorami. Rozważmy dowolny wierzchołek tego grafu. Ponieważ z każdym z pozostałych $k(R_{k-1}-1)+1$ wierzchołków jest on połączony jednym z k kolorów, z pewnymi R_{k-1} wierzchołkami jest on połączony tym samym kolorem (powiedzmy kolorem paprociowym). Jeżeli którekolwiek dwa z tych R_{k-1} wierzchołków są połączone krawędzią paprociową, to mamy trójkąt w kolorze paprociowym.

Jeśli natomiast są one łączone tylko $k-1$ kolorami niepaprociowymi, znajdziemy wśród nich jednokolorowy trójkąt na mocy założenia indukcyjnego.

Pozostaje tylko zauważyć, że indukcja startuje w oczywisty sposób od $R_1 = 3$.

Dalsze wartości R_k podaje poniższa tabela

k	R_k
2	6
3	17
4	66
5	327
6	1958
7	13701
8	109602
9	986411
10	9864102
11	108505113
12	1302061346
13	16926797487
14	236975164806
15	3554627472077
16	56874039553218
17	966858672404691
18	17403456103284422
19	330665665962404001
20	6613313319248080002

Powyższe zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Ramsey'a, które dotyczy także sytuacji, gdy wybieramy jednokolorowy podgraf pełny o więcej niż 3 wierzchołkach. Metody dowodu są analogiczne do zaprezentowanych powyżej.

Dodatek D

Równanie Pella

Dla dowolnej liczby naturalnej D nie będącej kwadratem liczby całkowitej, równanie

$$Dx^2 + 1 = y^2 \,, \tag{1}$$

zwane równaniem Pella, ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y. Jeśli (x,y) jest najmniejszym rozwiązaniem, to wszystkie rozwiązania (x_n,y_n) znajdujemy korzystając ze wzoru

$$y_n + x_n\sqrt{D} = (y + x\sqrt{D})^n \,.$$

Najmniejsze rozwiązanie (x,y) możemy czasem znaleźć przez obliczanie wartości wyrażenia Dx^2+1 dla $x = 1,2,3,4,\ldots$, aż trafimy na kwadrat liczby naturalnej. Dla wielu wartości D ta metoda w praktyce zawodzi, gdyż najmniejsze takie x jest zbyt duże (np. dla $D = 9999991$ w najmniejszym rozwiązaniu x ma 4149 cyfr). Rozwiązanie równania Pella znajdujemy wówczas przy wykorzystaniu ułamków łańcuchowych.

Równanie

$$DX^2 - 1 = Y^2 \,,$$

jeśli ma chociaż jedno rozwiązanie (X,Y), to ma nieskończenie wiele rozwiązań (X_n,Y_n) otrzymywanych ze wzoru

$$Y_n + X_n\sqrt{D} = (Y + X\sqrt{D})^{2n-1} \,,$$

podczas gdy wzór

$$y_n + x_n\sqrt{D} = (Y + X\sqrt{D})^{2n}$$

daje rozwiązania (x_n,y_n) równania (1).

Najmniejsze rozwiązania opisane powyżej znajdują się w następującej tabeli.

D	X	x
2	1	2
3	–	1
5	1	4
6	–	2
7	–	3
8	–	1
10	1	6
11	–	3
12	–	2
13	5	180
14	–	4
15	–	1
17	1	8
18	–	4
19	–	39
20	–	2
21	–	12
22	–	42
23	–	5
24	–	1
26	1	10
27	–	5
28	–	24
29	13	1820
30	–	2
31	–	273
32	–	3
33	–	4
34	–	6
35	–	1

D	X	x
37	1	12
38	–	6
39	–	4
40	–	3
41	5	320
42	–	2
43	–	531
44	–	30
45	–	24
46	–	3588
47	–	7
48	–	1
50	1	14
51	–	7
52	–	90
53	25	9100
54	–	66
55	–	12
56	–	2
57	–	20
58	13	2574
59	–	69
60	–	4
61	3805	226153980
62	–	8
63	–	1
65	1	16
66	–	8
67	–	5967
68	–	4
69	–	936
70	–	30

D	X	x
71	–	413
72	–	2
73	125	267000
74	5	430
75	–	3
76	–	6630
77	–	40
78	–	6
79	–	9
80	–	1
82	1	18
83	–	9
84	–	6
85	41	30996
86	–	1122
87	–	3
88	–	21
89	53	53000
90	–	2
91	–	165
92	–	120
93	–	1260
94	–	221064
95	–	4
96	–	5
97	569	6377352
98	–	10
99	–	1
101	1	20
102	–	10
103	–	22419
104	–	5
105	–	4

D	X	x
106	389	3115890
107	–	93
108	–	130
109	851525	15140424455100
110	–	2
111	–	28
112	–	12
113	73	113296
114	–	96
115	–	105
116	–	910
117	–	60
118	–	28254
119	–	11
120	–	1
122	1	22
123	–	11
124	–	414960
125	61	83204
126	–	40
127	–	419775
128	–	51
129	–	1484
130	5	570
131	–	927
132	–	2
133	–	224460
134	–	12606
135	–	21
136	–	3
137	149	519712
138	–	4
139	–	6578829

D	X	x
140	–	6
141	–	8
142	–	12
143	–	1
145	1	24
146	–	12
147	–	8
148	–	6
149	9305	2113761020
150	–	4
151	–	140634693
152	–	3
153	–	176
154	–	1716
155	–	20
156	–	2
157	385645	3726964292220
158	–	616
159	–	105
160	–	57
161	–	928
162	–	1540
163	–	5019135
164	–	160
165	–	84
166	–	132015642
167	–	13
168	–	1
170	1	26

D	X	x
171	–	13
172	–	1848942
173	85	190060
174	–	110
175	–	153
176	–	15
177	–	4692
178	–	120
179	–	313191
180	–	12
181	82596761	183567298683461940
182	–	2
183	–	36
184	–	1794
185	5	680
186	–	550
187	–	123
188	–	336
189	–	4
190	–	3774
191	–	650783
192	–	7
193	126985	448036604040
194	–	14
195	–	1
197	1	28
198	–	14
199	–	1153080099
200	–	7

Spis treści

wydanie drugie poprawione