MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE

L Olimpiada Matematyczna 1998/99

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE

L Olimpiada Matematyczna 1998/99

Sprawozdanie Komitetu Głównego

OLIMPIADA MATEMATYCZNA
WARSZAWA 2000

Część sprawozdawczą opracował dr Maciej Bryński

Autorzy rozwiązań zadań — mgr Waldemar Pompe, dr Jarosław Wróblewski

Recenzent rozwiązań zadań — dr hab. Piotr Grzeszczuk

Publikacja zawiera sprawozdanie Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej z przebiegu zawodów:

— L Olimpiady Matematycznej (wrzesień 1998 — kwiecień 1999);

— XXXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (lipiec 1998);

— XIX Austriacko–Polskich Zawodów Matematycznych (czerwiec — lipiec 1998);

— IX Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (listopad 1998)

ISBN 83-912882-0-X

Skład komputerowy (systemem TEX/MEX) — Olimpiada Matematyczna

Druk — Drukarnia Ojców Franciszkanów, Niepokalanów, 96-515 Teresin

ISBN 83-912882-0-X

L OLIMPIADA MATEMATYCZNA
1998/99

SPRAWOZDANIE KOMITETU GŁÓWNEGO

Organizacja zawodów

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej co roku od 50 lat organizuje w miesiącach wrzesień — grudzień zawody stopnia I w trzech miesięcznych etapach. W czasie tych zawodów uczniowie rozwiązują samodzielnie 12 zadań konkursowych (po cztery w każdym etapie) opracowanych i rozesłanych do szkół średnich przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej. Uczestnicy zawodów przesyłają swoje rozwiązania do właściwych terenowo komitetów okręgowych Olimpiady.

W roku szkolnym 1998/99 zawody stopnia I odbyły się w następujących terminach :

Etap pierwszy — od 11 września do 10 października 1998 r.

obejmował zadania o numerach 1, 2, 3, 4.

Etap drugi — od 11 października do 10 listopada 1998 r.

obejmował zadania o numerach 5, 6, 7, 8.

Etap trzeci — od 11 listopada do 10 grudnia 1998 r.

obejmował zadania o numerach 9, 10, 11, 12.

W zawodach stopnia I uczestniczyło 1298 uczniów szkół średnich. Spośród nich do zawodów stopnia II (okręgowych), które odbyły się w dniach 26 i 27 lutego 1999 r., zakwali kowano 485 osób, a do zawodów stopnia III (nałowych) zakwali kowano 85 osoby. Zawody nałowe odbyły się w dniach 14 i 15 kwietnia 1999 r. w Bielsku-Białej.

Uroczystość zakończenia L Olimpiady Matematycznej odbyła się dnia 17 kwietnia 1999 r. w Bielsku-Białej.

Obóz przygotowawczy do zawodów międzynarodowych odbył się w Domu Wczasowym *Zgoda* w Zwardoniu w dniach 7–20 czerwca 1999 r.

Skład osobowy komitetów Olimpiady

Komitet Główny

Przewodniczący — prof. dr hab. Edmund Puczyłowski.

Zastępca przewodniczącego — prof. dr hab. Andrzej Schinzel.

Członkowie — dr Jerzy Bednarczuk, prof. dr hab. Czesław Bessaga, dr Maciej Bryński, dr Sławomir Cynk, dr Marcin Kuczma, mgr Adrian Langer, dr Rafał Latała, Rafał Łochowski, dr hab. Zbigniew Marciniak, mgr Andrzej Mąkowski, dr Jerzy Norwa, mgr Henryk Pawłowski, mgr Waldemar Pompe, dr Witold Szczechla, mgr Wojciech Tomalczyk, prof. dr hab. Henryk Toruńczyk, dr Jarosław Włodarczyk, dr Michał Wojciechowski, dr Jarosław Wróblewski.

Członkowie honorowi Komitetu Głównego: mgr Olga Turska, doc. dr Józef Janikowski.

Spośród członków Komitetu Głównego wyłoniono komisję zadaniową, która wybierała zadania na zawody Olimpiady zobowiązując się do zachowania ich w ścisłej tajemnicy, aż do momentu ogłoszenia. Skład tej komisji był następujący:

dr Jerzy Bednarczuk, prof. dr hab. Czesław Bessaga, dr Maciej Bryński, dr Sławomir Cynk, dr Marcin Kuczma, mgr Adrian Langer, dr Rafał Latała, Rafał Łochowski, dr hab. Zbigniew Marciniak, mgr Andrzej Mąkowski, mgr Waldemar Pompe, prof. dr hab. Andrzej Schinzel, dr Witold Szczechla, dr Jarosław Włodarczyk, dr Michał Wojciechowski, dr Jarosław Wróblewski.

Biuro Komitetu Głównego

Kierownik Organizacyjny — dr Jerzy Norwa, sekretarz naukowy — dr Maciej Bryński, główny księgowy — mgr Maria Piotrowska, st. referenci — Elżbieta Berus i Grażyna Żaboklicka.

Adres: Komitet Główny Olimpiady Matematycznej, ul. Śniadeckich 8, pok. 314, 00-656 Warszawa, tel. (0-22) 629-95-92.

Komitety Okręgowe

1. Komitet Okręgowy w Gdańsku

Przewodniczący — prof. dr hab. Tadeusz Figiel.

Członkowie — dr Antoni Augustynowicz, dr Tomasz Człapiński, dr hab. Anna Kamont, mgr Marcin Marciniak, dr Tadeusz Spanily, mgr Barbara Wolnik.

Sekretarz Komitetu — mgr Grażyna Witosławska-Muszyńska.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: elbląskiego, gdańskiego i słupskiego.

2. Komitet Okręgowy w Katowicach

Przewodniczący — prof. dr hab. Janusz Matkowski.

Zastępca przewodniczącego — dr Józef Kalinowski.

Członkowie — mgr Tomasz Kulpa, dr Marek Piętka, dr hab. Ryszard Rudnicki, mgr Justyna Sikorska, mgr Antoni Tomala, dr Jacek Uryga.

Przedstawiciele kuratoriów oświaty: bielskiego — mgr Tomasz Szymczyk, częstochowskiego — mgr Wiesław Kostarczyk.

Sekretarz Komitetu — dr Jacek Uryga.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: bielskiego, częstochowskiego i katowickiego.

3. Komitet Okręgowy w Krakowie

Przewodniczący — dr hab. Edward Tutaj.

Zastępca przewodniczącego — dr Krzysztof Ciesielski.

Członkowie — mgr Danuta Ciesielska, dr Sławomir Cynk, dr Armen Edigarian, dr Józef Piórek, mgr Lesław Skrzypek, dr Lech Sławik, dr Zbigniew Węglowski, dr Włodzimierz Zwonek.

Przedstawiciele kuratoriów oświaty: krośnieńskiego — mgr Kazimierz Serbin, nowosądeckiego — dr Tadeusz Rams.

Sekretarz Komitetu — mgr Danuta Ciesielska.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: miejskiego krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego.

4. Komitet Okręgowy w Lublinie

Przewodniczący — prof. dr hab. Wiesław Zięba.

Zastępca przewodniczącego — prof. dr hab. Zdzisław Rychlik.

Członkowie — mgr Krzysztof Bolibok, dr Halina Hebda-Grabowska, mgr Piotr Kowalski, dr Andrzej Wiśnicki, dr Jacek Wośko.

Sekretarz Komitetu — dr Halina Hebda-Grabowska.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 807, 20-031 Lublin.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: bialskopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego.

5. Komitet Okręgowy w Łodzi

Przewodniczący — dr hab. Wojciech Banaszczyk.

Członkowie — dr hab. Grzegorz Andrzejczak, dr Wojciech Grudziński, dr Jan Lesiak, dr Zenon Piesyk, dr Przemysław Skibiński, mgr Olga Stande.

Sekretarz Komitetu — Danuta Marędziak.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: miejskiego łódzkiego, kieleckiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego.

6. Komitet Okręgowy w Poznaniu

Przewodniczący — prof. dr hab. Paweł Domański.

Członkowie — doc. dr hab. Kazimierz Wiertelak, dr Czesław Mańkowski, dr Artur Michalak, dr Jerzy Szczepaniak, mgr Maciej Radziejewski.

Sekretarz Komitetu — dr Jerzy Szczepaniak.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Matejki 48/49, 60-769 Poznań.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego.

7. Komitet Okręgowy w Szczecinie

Przewodniczący — dr Paweł Andrzejewski.

Członkowie: dr Adam Neugebauer, dr Czesław Wowk, dr Kazimierz Skurzyński, dr Edmund Stasiak, dr Stanisław Ewert-Krzemieniecki, mgr Zo a Garbiak, mgr Michał Szuman.

Sekretarz Komitetu — Anna Sasim.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego.

8. Komitet Okręgowy w Toruniu

Przewodniczący — prof. dr hab. Stanisław Balcerzyk.

Członkowie — mgr Zbigniew Bobiński, dr Paweł Jarek, mgr Piotr Jędrzejewicz, dr hab. Andrzej Nowicki, dr Andrzej Sendlewski, dr Mirosław Uscki.

Sekretarz Komitetu — mgr Zbigniew Bobiński.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego.

9. Komitet Okręgowy w Warszawie

Przewodniczący — dr Michał Krych.

Członkowie — dr Alina Haman, dr Marcin Kuczma, mgr Krzysztof Oleszkiewicz, dr Paweł Strzelecki.

Sekretarz Komitetu — dr Marcin Kuczma.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, pok. 314, 00-656 Warszawa.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: stołecznego warszawskiego, białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego i suwalskiego.

10. Komitet Okręgowy we Wrocławiu

Przewodniczący — doc. dr Zbigniew Romanowicz.

Członkowie — Tomasz Elsner, dr Liliana Janicka, mgr Augustyn Kałuża, mgr Bogusław Merdas, prof. dr hab. Witold Nitka, dr Bogdan Pawlik, dr Tadeusz Pezda, mgr Witold Seredyński, mgr Zdzisław Słomian, mgr Stanisław Zieleń.

Sekretarz Komitetu — mgr Witold Seredyński.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Terenem działalności Komitetu były szkoły średnie województw: jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego.

* * * *

W związku z reformą administracyjną kraju od 1 września 1999 r. zmienił się zasięg działalności komitetów okręgowych. Obecnie

Komitet Okręgowy w Gdańsku działa w woj. pomorskim,

Komitet Okręgowy w Katowicach działa w woj. śląskim,

Komitet Okręgowy w Krakowie działa w woj. małopolskim,

Komitet Okręgowy w Lublinie działa w woj. lubelskim i podkarpackim,

Komitet Okręgowy w Łodzi działa w woj. łódzkim i świętokrzyskim,

Komitet Okręgowy w Poznaniu działa w woj. wielkopolskim,

Komitet Okręgowy w Szczecinie działa w woj. lubuskim i zachodniopomorskim,

Komitet Okręgowy w Toruniu działa w woj. kujawsko-pomorskim i warmińsko-mazurskim,

Komitet Okręgowy w Warszawie działa w woj. mazowieckim i podlaskim,

Komitet Okręgowy we Wrocławiu działa w woj. dolnośląskim i opolskim.

L Olimpiada Matematyczna
Zestawienie ocen rozwiązań zadań zawodów II stopnia

(oceny wystawione przez komitety okręgowe)

Tabela 2

	Ogółem	Liczba rozwiązań					
		Pierwszy dzień zawodów			Drugi dzień zawodów		
		Numer zadania					
		1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8
Razem	2901	485	485	485	482	482	482
9 – 10 punktów	508	79	171	19	126	90	23
7 – 8 punktów	268	39	85	5	49	69	21
5 – 6 punktów	148	16	28	37	5	60	2
1 – 4 punktów	319	46	67	60	28	65	53
0 punktów	1658	305	134	364	274	198	383

Zestawienie ocen rozwiązań zadań zawodów III stopnia

Tabela 3

	Ogółem	Liczba rozwiązań					
		Pierwszy dzień zawodów			Drugi dzień zawodów		
		Numer zadania					
		1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8
Razem	510	85	85	85	85	85	85
10 punktów	94	10	17	12	33	19	3
9 punktów	41	1	7	7	18	7	1
8 punktów	19	—	3	5	8	3	—
7 punktów	8	—	1	2	4	—	1
6 punktów	10	—	4	3	3	—	—
5 punktów	6	—	—	2	1	3	—
4 punkty	34	—	27	—	—	2	5
3 punkty	31	6	10	1	—	6	8
2 punkty	11	—	2	2	4	3	—
1 punkt	18	—	1	1	1	13	2
0 punktów	238	68	13	50	13	29	65

L Olimpiada Matematyczna
Zestawienie liczby zawodników wg okręgów

Tabela 4

Okręg	Zawody			Laureaci	Wyróżnieni
	I st.	II st.	III st.		
POLSKA	1298	485	85	24	—
gdański	92	32	7	1	—
katowicki	155	46	7	3	—
krakowski	99	57	12	5	—
lubelski	190	67	5	1	—
łódzki	140	32	5	1	—
poznański	103	31	4	1	—
szczeciński	59	25	3	1	—
toruński	136	64	12	3	—
warszawski	164	74	21	5	—
wrocławski	160	57	9	3	—

Lista uczestników zakwali kowanych do zawodów stopnia trzeciego

1. Michał Adamaszek — uczeń klasy drugiej V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciel zawodnika: Tomasz Szymczyk.
2. Włodzimierz Bąk — uczeń klasy czwartej III Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Kaliszu. Nauczycielka zawodnika: Ewa Kaniecka.
3. Karol Białas — uczeń klasy pierwszej Samorządowego Liceum Ogólnokształcącego w Opocznie. Nauczyciel zawodnika: Arkadiusz Felis.
4. Piotr Białowolski — uczeń klasy czwartej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciele zawodnika: Jacek Lech i Wojciech Tomalczyk.
5. Marek Biskup — uczeń klasy czwartej II Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Starachowicach. Nauczyciel zawodnika: Henryk Frynas.
6. Michał Borny — uczeń klasy trzeciej II Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Zamoyskiego w Lublinie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Klisowski.
7. Piotr Buciak — uczeń klasy piątej Zespołu Szkół Elektryczno-Elektronicznych im. Profesora M. Hubera w Szczecinie. Nauczycielka zawodnika: Daromiła Majewska.
8. Jakub Byszewski — uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego im. Juliusza Słowackiego w Chorzowie. Nauczyciel zawodnika: Dariusz Kuzior.

9. Szymon Chojnacki — uczeń klasy czwartej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciele zawodnika: Henryk Pawłowski i Andrzej Sendlewski.
10. Marcin Domagała — uczeń klasy czwartej VI Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Radomiu. Nauczyciel zawodnika: Jerzy Nowicki.
11. Lech Duraj — uczeń klasy drugiej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Urszula Szwedzicka i Paweł Gniadek.
12. Jan Frankowski — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Zbigniew Romanowicz i Aleksander Dobrzycki.
13. Andrzej Gąsienica-Samek — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Kazimierz Cegiełka, Agnieszka Kałamajska i Edward Stachowski.
14. Łukasz Gendek — uczeń klasy czwartej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciel zawodnika: Wojciech Tomalczyk.
15. Jakub Gismatullin — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Zbigniew Romanowicz, Henryk Pawłowski i Zdzisław Słomian.
16. Paweł Golonka — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Zdzisława Dybiec i Tomasz Szemberg.
17. Przemysław Grudziński — uczeń klasy trzeciej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciel zawodnika: Henryk Pawłowski.
18. Marcin Hauzer — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Białymstoku. Nauczyciele zawodnika: Zo a Parchanowicz, Michał Marczak i Piotr Gruszczuk.
19. Tomasz Helbing — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Halina Gorzelnik.
20. Dariusz Jabłonowski — uczeń klasy czwartej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciel zawodnika: Wojciech Tomalczyk.
21. Michał Jabłonowski — uczeń klasy trzeciej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciel zawodnika: Wojciech Tomalczyk.

22. Andrzej Jarosz — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Armen Edigarian, Maja Jasieńska i Lesław Skrzypek.

23. Artur Jeż — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Zbigniew Lorkiewicz i Zbigniew Romanowicz.

24. Łukasz Kaiser — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Bożena Inglot i Zbigniew Romanowicz.

25. Cezary Kaliszyk — uczeń klasy trzeciej I Społecznego Liceum Ogólnokształcącego w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Guzicki i Elżbieta Guzicka.

26. Dominik Kamiński — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Lublinie. Nauczyciel zawodnika: Waldemar Łobodziński.

27. Łukasz Kamiński — uczeń klasy czwartej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciele zawodnika: Henryk Pawłowski i Andrzej Sendlewski.

28. Wojciech Kamiński — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Łodzi. Nauczyciele zawodnika: Adam Paszkiewicz i Ewa Wojciechowska.

29. Michał Kapustka — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Zdzisława Dybiec, Tomasz Szemberg, Armen Edigarian i Lesław Skrzypek.

30. Michał Kijak — uczeń klasy czwartej II Liceum Ogólnokształcącego im. Ziemi Olkuskiej w Olkuszu. Nauczycielka zawodnika: Danuta Przybylska.

31. Eryk Kopczyński — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Boratyński, Agnieszka Kałamajska i Jacek Jakubowski.

32. Adrian Kosowski — uczeń klasy drugiej III Liceum Ogólnokształcącego im. Bohaterów Westerplatte w Gdańsku.

33. Anna Krześniak — uczennica klasy czwartej II Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Batorego w Warszawie. Nauczyciele zawodniczki: Jerzy Nowicki i Alfreda Klimczewska.

34. Mateusz Kwaśnicki — uczeń klasy drugiej III Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Krzysztof Omilianowski, Augustyn Kałuża i Przemysław Szczepaniak.

35. Adam Leszczyński — uczeń klasy czwartej LI Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Edyta Pietrusińska-Ornoch.

36. Łukasz Lew — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego w Zielonej Górze. Nauczycielka zawodnika: Alicja Kozak.

37. Roman Łomowski — uczeń klasy pierwszej VI Liceum Ogólnokształcącego w Bydgoszczy. Nauczyciele zawodnika: Henryk Pawłowski i Anna Karaszewska.

38. Krzysztof Maczyński — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciel zawodnika: Tomasz Szymczyk.

39. Maciej Makowski — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Boratyński, Agnieszka Kałamajska i Jacek Jakubowski.

40. Tomasz Malesiński — uczeń klasy trzeciej Zespołu Szkół Elektrycznych im. prof. Janusza Groszkowskiego w Białymstoku. Nauczyciel zawodnika: Anatol Sienkiewicz.

41. Michał Matuszewski — uczeń klasy czwartej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach. Nauczycielki zawodnika: Renata Suchanek i Krystyna Skórnik.

42. Łukasz Matylla — uczeń klasy czwartej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

43. Jarosław Mederski — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. C. K. Norwida w Bydgoszczy. Nauczyciel zawodnika: Henryk Pawłowski.

44. Marcin Meinardi — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Zdzisława Dybiec i Tomasz Szemberg.

45. Dariusz Mika — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Bagiński.

46. Maciej Mostowski — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Boratyński i Agnieszka Kałamajska.

47. Michał Musielak — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego im. C. K. Norwida w Bydgoszczy. Nauczyciele zawodnika: Henryk Pawłowski i Ładysława Łepek.

48. Michał Nowakiewicz — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Wacława Tempczyk.

49. Piotr Nowakowski — uczeń klasy czwartej Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 2 im. Marii Skłodowskiej-Curie w Gorzowie Wlkp. Nauczycielka zawodnika: Małgorzata Jacek.

50. Michał Obarski — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Chrzanowie. Nauczycielka zawodnika: Iwona Małocha.

51. Karol Palka — uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego im. Ignacego Paderewskiego w Wałbrzychu. Nauczyciele zawodnika: Halina Pankanin i Zbigniew Romanowicz.

52. Paweł Parys — uczeń klasy czwartej Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Tarnowskich Górach. Nauczyciel zawodnika: Dariusz Nowak.

53. Sebastian Pawłowski — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Boratyński, Agnieszka Kałamajska i Jacek Jakubowski.

54. Jakub Pochrybniak — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Boratyński, Agnieszka Kałamajska i Jacek Jakubowski.

55. Anna Podolak — uczeń klasy czwartej XIII Liceum Ogólnokształcącego w Szczecinie. Nauczyciel zawodniczki: Michał Szuman.

56. Robert Popławski — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Boratyński, Agnieszka Kałamajska i Jacek Jakubowski.

57. Marcin Poturalski — uczeń klasy trzeciej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciel zawodnika: Henryk Pawłowski.

58. Jakub Przybyło — uczeń klasy czwartej XII Liceum Ogólnokształcącego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Jerzy Kłos i Jacek Dymek.

59. Piotr Przytycki — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Boratyński, Agnieszka Kałamajska i Jacek Jakubowski.

60. Anna Ratajczak — uczennica klasy czwartej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciele zawodniczki: Zbigniew Bobiński, Mirosław Uscki i Maria Kobus.

61. Paweł Rochman — uczeń klasy czwartej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciele zawodnika: Henryk Pawłowski i Andrzej Sendlewski.

62. Katarzyna Rucińska — uczennica klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodniczki: Wojciech Boratyński, Agnieszka Kałamajska i Jacek Jakubowski.

63. Anna Rusinek — uczennica klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodniczki: Wacława Tempczyk, Edward Stachowski i Kazimierz Cegiełka.

64. Katarzyna Rybarczyk — uczennica klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu.

65. Piotr Sadowski — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Zbigniew Romanowicz i Cezary Urban.

66. Piotr Skibiński — uczeń klasy trzeciej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie. Nauczycielka zawodnika: Dorota Gajdek.

67. Stanisław Skowronek — uczeń klasy drugiej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Nauczyciel zawodnika: Krzysztof Stefański.

68. Tomasz Stachowicz — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Agnieszka Kałamajska, Kazimierz Cegiełka i Edward Stachowski.

69. Michał Strojnowski — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Bogna Lubańska.

70. Michał Szancer — uczeń klasy czwartej XV Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Skłodowskiej-Curie w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Barbara Figura, Lesław Skrzypek i Armen Edigarian.

71. Robert Sze er — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciele zawodnika: Henryk Pawłowski i Andrzej Sendlewski.

72. Michał Tkacz — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Tomasz Szemberg i Zdzisława Dybiec.

73. Michał Tryniecki — uczeń klasy czwartej II Liceum Ogólnokształcącego im. Kazimierza Morawskiego w Przemyślu. Nauczyciel zawodnika: Leszek Sochański.

74. Andrzej Tymoczko — uczeń klasy trzeciej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Mariusz Kraus.

75. Anna Urbańska — uczennica klasy trzeciej II Liceum Ogólnokształcącego im. Jana III Sobieskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodniczki: Marek Walczyk.

76. Michał Wądołowski — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Zygmunta Krasińskiego w Ciechanowie. Nauczycielka zawodnika: Hanna Lenkiewicz.

77. Piotr Witkowski — uczeń klasy czwartej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Tomalczyk i Jacek Lech.

78. Marcin Wojnarski — uczeń klasy trzeciej Katolickiego Liceum Ogólnokształcącego Księży Pijarów w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Krzysztof Reczek.

79. Jakub Wojtaszczyk — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Agnieszka Kałamajska, Wojciech Boratyński i Jacek Jakubowski.

80. Dominik Wojtczak — uczeń klasy drugiej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciel zawodnika: Wojciech Tomalczyk.

81. Mikołaj Zalewski — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Andrzej Pfeifer.

82. Paweł Zdziarski — uczeń klasy czwartej VI Liceum Ogólnokształcącego w Bydgoszczy. Nauczyciel zawodnika: Henryk Pawłowski.

83. Jakub Zwierz — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Stanisław Buś, Zbigniew Romanowicz i Henryk Pawłowski.

84. Robert Żal — uczeń klasy czwartej II Liceum Ogólnokształcącego w Końskich. Nauczycielka zawodnika: Alina Kabała.

85. Anna Żylicz — uczennica klasy czwartej Pierwszego Społecznego Liceum Ogólnokształcącego w Warszawie. Nauczyciel zawodniczki: Wojciech Guzicki.

Lista laureatów

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 16 kwietnia 1999 r. przyznał tytuł laureata L Olimpiady Matematycznej i nagrody pierwszego, drugiego lub trzeciego stopnia dwudziestu czterem osobom (na marginesie zaznaczono kolejność miejsc):

nagrody stopnia pierwszego

1. Michał Kapustka,
2. Michał Matuszewski,
3 – 4. Piotr Buciak,
Eryk Kopczyński,

nagrody stopnia drugiego

5 – 7. Paweł Parys,
Piotr Przytycki,
Mikołaj Zalewski,

nagrody stopnia trzeciego

8 – 10. Wojciech Kamiński,
Maciej Mostowski,
Michał Nowakiewicz,
11 – 13. Paweł Rochman,
Dominik Wojtczak,
Paweł Zdziarski,
14 – 24. Lech Duraj,
Jakub Gismatullin,
Tomasz Helbing,
Artur Jeż,
Michał Kijak,
Jarosław Mederski,
Piotr Sadowski,
Piotr Skibiński,
Stanisław Skowronek,
Michał Szancer,
Marcin Wojnarski.

Komitet Główny postanowił nie przyznawać wyróżnień.

Zakończenie L Olimpiady Matematycznej

Uroczyste zakończenie L Olimpiady Matematycznej odbyło się w dniu 17 kwietnia 1999 r. w Sali Sesyjnej Urzędu Miasta Bielska-Białej.

Przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej prof. dr hab. Edmund Puczyłowski omówił wyniki zawodów i wręczył dyplomy laureatom.

Wszyscy laureaci L Olimpiady Matematycznej oprócz dyplomów i nagród pieniężnych otrzymali zestawy książek matematycznych i informatycznych, a także roczną prenumeratę czasopisma *DELTA*.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej składa gorące podziękowania sponsorom i fundatorom nagród: Wydawnictwom Szkolnym i Pedagogicznym, Wydawnictwu Naukowemu PWN, Wydawnictwu Naukowo-Technicznemu, Redakcji *DELTY*.

XXXIX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Sprawozdanie

W dniach 10–21 lipca 1998 r. odbyła się w Taipei (Tajwan) XXXIX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Uczestniczyło w niej 419 uczniów z 76 państw. Delegacja polska miała następujący skład:

> dr Marcin Kuczma — przewodniczący, mgr Waldemar Pompe — zastępca przewodniczącego, Tomasz Czajka, Michał Kapustka, Szymon Pliś, Piotr Przytycki, Tomasz Sobieszek, Marcin Stefaniak.

Na podstawie propozycji nadesłanych przez uczestniczące państwa specjalnie powołana komisja opracowała przed przyjazdem delegacji państw uczestniczących listę 28 zadań. Spośród tych zadań Jury, w skład którego wchodzili przewodniczący wszystkich delegacji, wybrało na zawody sześć zadań. Wybrane zadania zostały przetłumaczone na języki macierzyste uczestników Olimpiady i dostarczone zawodnikom do rozwiązania podczas dwóch kolejnych dni (15 i 16 lipca 1998 r., cztery i pół godziny każdego dnia). Rozwiązanie każdego zadania oceniano w skali od 0 do 7 punktów. Zadania okazały się dość trudne. Tylko jeden zawodnik (Omid Amini z Iranu) otrzymał maksymalną liczbę 42 punktów.

Jury postanowiło przyznać 37 osobom złoty medal (31–42 pkt.), 66 osobom srebrny medal (24–30 pkt.) oraz 102 osobom brązowy medal (14–23 pkt.). Ponadto każdy zawodnik, który nie otrzymał medalu, ale rozwiązał na ocenę maksymalną co najmniej jedno zadanie, został wyróżniony wzmianką zaszczytną. Wyniki polskich uczniów są następujące:

Marcin Stefaniak	31 pkt.	złoty medal
Tomasz Czajka	29 pkt.	srebrny medal
Michał Kapustka	21 pkt.	brązowy medal
Tomasz Sobieszek	13 pkt.	wzmianka zaszczytna
Szymon Pliś	11 pkt.	wzmianka zaszczytna
Piotr Przytycki	7 pkt.	wzmianka zaszczytna

W nieo cjalnej klasy kacji drużynowej zwyciężyła drużyna z Iranu. Polska zajęła 21 miejsce. Należy tutaj dodać, że w Olimpiadzie nie uczestniczyła drużyna z Chin, która w poprzednich latach bardzo często w nieo cjalnej klasy kacji drużynowej zajmowała czołowe miejsca. Oto obszerny fragment otwartego listu, jaki wystosował Komitet Organizacyjny Olimpiady Matematycznej w Chinach do uczestniczących w zawodach XXXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej w Taipei państw:

Drodzy Koledzy,

Jako kraj, który od dawna uczestniczy w Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, Chiny bardzo chciałyby wziąć udział w tegorocznych zawodach. Jednak decyzja organizatorów XXXIX MOM spowodowała, że postanowiliśmy nie wysyłać w tym roku naszej drużyny na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną.

Jak powszechnie wiadomo, na świecie są tylko jedne Chiny. Tak zwana „Republika Chińska” nigdy nie została zaakceptowana przez Chiny oraz inne państwa jako legalnie działająca jednostka. Zatem przedstawiciele tajwańskiego rządu nie mogą brać udziału w żadnych międzynarodowych rządowych organizacjach i imprezach. Z drugiej strony, zawsze serdecznie zapraszamy tajwańskich naukowców i uczniów do współpracy w pozarządowych organizacjach i imprezach pod warunkiem, że reprezentują oni „Taipei, Chiny”, a nie „Republikę Chińską”. Taka praktyka jest stosowana w wielu międzynarodowych organizacjach, dzięki czemu mogą uczestniczyć w nich przedstawiciele tajwańscy. Została ona też zaakceptowana przez naszych kolegów z Tajwanu. W ten sposób od wielu lat w międzynarodowych olimpiadach naukowych mogły uczestniczyć dwie drużyny z Chin i niejednokrotnie zawiązywały się między ich członkami przyjaźnie.

Kiedy Taipei zostało wybrane na gospodarza XXXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, mieliśmy nadzieję, że odbędzie się ona bez politycznych interferencji. Jednak gdy zostały rozesłane zaproszenia, okazało się, że wystosował je „Minister Edukacji Republiki Chińskiej” — był to ruch o mocnym zabarwieniu politycznym. Przez wiele miesięcy próbowaliśmy przekonać Komitet Organizacyjny XXXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, aby trzymał się utartej praktyki. W ten sposób nasza drużyna mogłaby uczestniczyć w tych zawodach.

Dnia 22 czerwca otrzymaliśmy fax od Komitetu Organizacyjnego w Taipei z informacją, że uczniowie z Taipei będą reprezentować w zawodach „Tajwan, Republikę Chińską”. Organizatorzy przekreślili więc szansę naszego uczestnictwa w Olimpiadzie. Nie pozostaje nam nic innego jak tylko zrezygnować z udziału w XXXIX Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej.

Jesteśmy głęboko zaniepokojeni, że decyzja organizatorów zawodów w Taipei stworzy niebezpieczny precedens, który może rozszerzyć się na inne olimpiady naukowe. Mamy nadzieję, że nasza postawa będzie zrozumiana i ta nieprzyjemna sytuacja w przyszłości się nie powtórzy.

Komitet Organizacyjny Olimpiady Matematycznej w Chinach

Dodajmy, że sporą część ceremonii otwarcia Olimpiady zajęły przemówienia Ministra Edukacji oraz Premiera Republiki Chińskiej. Uczniowie reprezentujący w zawodach Republikę Chińską otrzymali od organizatorów nagrodę specjalną (nie bardzo wiadomo za co). Zostało to odnotowane jako oddzielny podpunkt w programie uroczystości zakończenia.

Organizacja zawodów wywołała sporo kontrowersji wśród uczestniczących delegacji. Po przybyciu do Taipei uczniowie wraz z zastępcami przewodniczących delegacji zostali przewiezieni do miasteczka studenckiego uczelni „National Taiwan Normal University”, w którym byli zakwaterowani. Wielu uczniów narzekało na panujące tam warunki, między innymi zbyt twarde łóżka, na których nie mogli solidnie wypocząć przed zawodami.

Miasteczko było strzeżone przez policję — ku zaskoczeniu i niezadowoleniu wielu delegacji, nikomu nie wolno było opuszczać tego miejsca, aż do zakończenia zawodów. Niektórym uczniom i ich opiekunom udało się złamać ten, zdaniem wielu delegacji, absurdalny zakaz i wydostać się na zewnątrz miasteczka, wykorzystując nieuwagę policji. Dzięki temu mogli oni obejrzeć największą na północy Tajwanu, liczącą sobie ponad 100 lat świątynię Chihnan oraz wioskę aborygenów „Wulai”, znajdującą się około 30 km na południe od Taipei. Mogli oni też zapoznać się z codziennym życiem w Taipei, odmiennym od życia w miastach europejskich, spacerując ulicami tego miasta lub podróżując środkami komunikacji miejskiej.

Ci, którzy zostali w miejscu zakwaterowania (a więc teoretycznie wszyscy), mogli grać w piłkę nożną w rekordowych od 1921 roku temperaturach w Taipei (36°C) oraz rozerwać się przed zawodami uczestnicząc w hałaśliwych grach komputerowych.

Zabronione było również telefonowanie na zewnątrz miasteczka, aż do zakończenia zawodów. Zakaz ten był złamany przez niemal każdego, kto chciał lub potrzebował poinformować swoją rodzinę o szczęśliwym przybyciu do Taipei.

Po zawodach program Olimpiady przewidywał wycieczkę na mecz baseballa, do Mauzoleum Chiang Kaisheka, Muzeum Narodowego oraz Muzeum Nauki. Wielu uczniom nie spodobał się pomysł oglądania meczu baseballa na Tajwanie, lecz tylko nielicznym wystarczyło odwagi cywilnej, aby poprosić organizatorów, żeby pozwolili im nie uczestniczyć w oglądaniu tego meczu. Dzięki temu mogli oni zwiedzić jedno z najbardziej malowniczych miejsc w granicach miasta Taipei, park Yangmingshan. Szkoda, że w programie Olimpiady zabrakło miejsca na wycieczkę krajoznawczo-turystyczną.

Zastępca przewodniczącego delegacji polskiej
mgr Waldemar Pompe

Zestawienie nieo cjalnych wyników drużynowych XXXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

W kolumnach podano kolejno: miejsce, nazwę państwa (w nawiasie liczba zawodników, jeżeli była mniejsza niż 6), sumę punktów, liczbę medali złotych, srebrnych i brązowych, liczbę wzmianek zaszczytnych.

1	Iran	211	5	1	–	–
2	Bułgaria	195	3	3	–	–
3–4	Stany Zjednoczone	186	3	3	–	–
	Węgry	186	4	2	–	–
5	Republika Chińska	184	3	2	1	–
6	Rosja	175	2	3	1	–
7	Indie	174	3	3	–	–
8	Ukraina	166	1	3	2	–
9	Wietnam	158	1	3	2	–
10	Jugosławia	156	–	5	–	1
11	Rumunia	155	3	–	2	1
12	Republika Korei	154	2	2	2	–
13	Australia	146	–	4	2	–
14	Japonia	139	1	1	3	1
15	Czechy	135	–	3	3	–
16	Niemcy	129	–	3	2	–
17–18	Turcja	122	–	2	4	–
	Wielka Brytania	122	–	1	4	1
19	Białoruś	118	–	1	4	–
20	Kanada	113	1	1	2	1
21	**Polska**	112	1	1	1	3
22–23	Chorwacja	110	–	–	5	–
	Singapur	110	–	1	3	2
24	Izrael	104	–	–	5	–
25	Hong-Kong	102	–	1	3	1
26–27	Armenia	100	–	2	2	–
	Francja	100	1	–	2	2
28	Republika Płd. Afryki	98	–	1	2	3
29	Argentyna	97	1	–	3	–
30–31	Brazylia	91	1	–	1	2
	Mongolia	91	–	2	2	–
32	Grecja	90	–	2	1	1
33–34	Bośnia i Hercegowina	88	–	1	2	3
	Słowacja	88	–	1	4	–
35	Kazachstan	81	–	–	2	3
36	Gruzja	78	–	–	3	2
37	Łotwa	74	–	1	3	–
38	Włochy	72	–	–	3	2
39	Belgia	71	–	1	1	–
40	Macedonia	69	–	–	1	1
41	Kolumbia	66	1	–	–	2
42	Tajlandia	65	–	–	2	1
43	Estonia	63	–	1	1	–
44–45	Holandia	62	–	1	–	–
	Meksyk	62	–	1	–	1
46	Peru (3)	60	–	2	–	1
47	Szwecja	58	–	–	2	–
48	Austria	57	–	–	2	1
49	Nowa Zelandia	50	–	–	2	–
50	Mołdawia (2)	45	–	1	1	–
51	Słowenia	44	–	–	1	2
52–53	Islandia	42	–	–	–	3
	Maroko	42	–	–	–	3
54	Azerbejdżan	41	–	–	1	1
55	Litwa	40	–	–	1	1
56	Cypr (4)	39	–	–	1	2
57	Szwajcaria	37	–	–	–	2
58–60	Hiszpania	36	–	–	1	1
	Irlandia	36	–	–	1	–
	Trynidad	36	–	–	1	–
61	Norwegia	33	–	–	–	1
62	Malezja	32	–	–	–	–
63	Macedonia	29	–	–	–	2
64–65	Finlandia	25	–	–	–	1
	Luksemburg (2)	25	–	–	1	1
66	Dania	21	–	–	–	–
67	Kuba (1)	19	–	–	1	–
68	Indonezja	16	–	–	–	–
69	Kirgistan (5)	14	–	–	–	–
70–71	Filipiny (4)	11	–	–	–	–
	Urugwaj	11	–	–	–	–
72–73	Paragwaj (5)	6	–	–	–	–
	Portugalia	6	–	–	–	–
74	Sri Lanka (1)	5	–	–	–	–
75	Wenezuela (2)	1	–	–	–	–
76	Kuwejt (3)	0	–	–	–	–

XXI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne
Sprawozdanie

XXI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne odbyły się w Polsce, w Przysieku koło Torunia. Obie delegacje przybyły na miejsce zawodów 24 czerwca 1998 r. po południu i wyjechały 3 lipca.

Skład delegacji austriackiej:

przewodniczący — prof. Gerd Baron, zastępca przewodniczącego — mgr Romana Schüssler, członkowie — Robert Aschenbrenner, Otmar Ertl, Peter Holy, Bernhard Kabelka, Helmar Lautscham, Doris Mühlgassner.

Skład delegacji polskiej:

przewodniczący — dr hab. Wojciech Guzicki, zastępca przewodniczącego — dr Witold Szczechla, członkowie — Jakub Białogrodzki, Tomasz Dorau, Paweł Golonka, Łukasz Kamiński, Grzegorz Kapustka, Eryk Kopczyński.

Jury Zawodów, złożone z przewodniczących obu delegacji oraz ich zastępców, wybrało i zredagowało dziewięć zadań spośród propozycji zgłoszonych przez dwa uczestniczące państwa: sześć zadań na zawody indywidualne (które odbyły się 29 i 30 czerwca, cztery i pół godziny każdego dnia) oraz trzy zadania na zawody zespołowe (1 lipca, cztery godziny).

W zawodach indywidualnych nagrodzeni zostali uczniowie: Grzegorz Kapustka (48 pkt.), Eryk Kopczyński (39 pkt.), Łukasz Kamiński (32 pkt.), Jakub Białogrodzki (29 pkt.), ex aequo Robert Aschenbrenner i Bernhard Kabelka (po 26 pkt.), Otmar Ertl (23 pkt.). Liczba możliwych do zdobycia punktów wynosiła 48. Pozostali uczniowie otrzymali dyplomy uczestnictwa.

W zawodach zespołowych drużyna polska uzyskała znacznie lepsze wyniki i Jury Zawodów z udziałem przewodniczącego honorowego, którym był prof. Daniel Simson (Dziekan Wydziału Matematyki Uniwersytetu im. Mikołaja Kopernika w Toruniu), jej przyznało zwycięstwo.

Organizacja zawodów była doskonała. Obie delegacje były zakwaterowane w hotelu *Daglezja* należącym do Ośrodka Doradztwa Rolniczego w Przysieku. Standard zakwaterowania i wyżywienia był na wysokim poziomie hotelowym. Zawody odbywały się w salach konferencyjnych Ośrodka Doradztwa Rolniczego, w bezpośrednim sąsiedztwie hotelu. Czas poza zawodami był wypełniony doskonale prowadzonymi wycieczkami. Uczestnicy Zawodów zwiedzili Toruń, obserwatorium astronomiczne w Piwnicach, Chełmno, Malbork, Radzyń Chełmiński, Golub-Dobrzyń i Brodnicę. W niedzielę 28 czerwca wzięli udział w biegu na orientację. W wolnych chwilach rozgrywano mecze w piłkę nożną na pobliskim boisku.

Uroczystość ogłoszenia wyników, wręczenia nagród (notesy elektroniczne), pucharu dla zwycięskiej drużyny oraz upominków dla wszystkich uczestników odbyła się 2 lipca w sali Domu Kopernika w Toruniu z udziałem przedstawicieli Ministerstwa Edukacj Narodowej i Kuratora Oświaty w Toruniu. Na zakończenie uroczystości przewodniczący delegacji austriackiej przekazał Polakom tradycyjne zaproszenie na kolejne (dwudzieste drugie) Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne. Po uroczystości uczestnicy Zawodów zwiedzili Muzeum Kopernika i udali się na uroczysty obiad na zaproszenie Prezydenta Torunia, po którym odbyli krótką przejażdżkę statkiem po Wiśle.

Jeszcze raz chciałbym podkreślić doskonałą organizację Zawodów, dbałość o doskonałe samopoczucie uczestników i niezwykle miłą atmosferę w czasie Zawodów. Z pewnością zawdzięczamy ją Organizatorom: Kuratorium Oświaty w Toruniu, w szczególności panu mgr. Czesławowi Stawikowskiemu i jego współpracownikom.

Przewodniczący delegacji polskiej
Wojciech Guzicki

Dziewiąte Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich
Sprawozdanie

W dniach 6–10 listopada 1998 r. odbyły się w Warszawie Dziewiąte Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich *Baltic Way* '98. W zawodach tych uczestniczyły delegacje następujących państw: Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Polski, Szwecji oraz miasta Petersburga.

Delegacja polska miała następujący skład:

> dr Krzysztof Oleszkiewicz — przewodniczący, mgr Henryk Pawłowski — zastępca przewodniczącego, Jakub Gismatullin, Michał Matuszewski, Jakub Wojtaszczyk, Mikołaj Zalewski, Paweł Zdziarski.

Jury złożone z przewodniczących wszystkich delegacji obradujące pod przewodnictwem dr. Marcina Kuczmy wybrało spośród propozycji nadesłanych przez państwa uczestniczące w zawodach 20 zadań. Zawody odbyły się 8 listopada, trwały cztery i pół godziny i miały charakter zespołowy. Za poprawne rozwiązanie każdego zadania drużyna mogła otrzymać 5 punktów. Oceny za rozwiązania poszczególnych zadań były uzgadniane przez przewodniczących delegacji i ich zastępców z koordynatorami — matematykami polskimi, których pracą kierował dr hab. Zbigniew Marciniak. Drużyna polska złożyła rozwiązania 17 zadań, spośród których 11 uzyskało maksymalną ocenę, kolejne trzy oceniono na 4 punkty, pozostałe rozwiązania oceniono niżej. Poszczególne drużyny uzyskały następujące liczby punktów:

1. Łotwa 72 pkt.
2. Estonia 70 pkt.
3. Polska 68 pkt.
4. Finlandia 67 pkt.
5. St. Petersburg 62 pkt.
6. Szwecja 56 pkt.

7–9. Dania, Islandia i Norwegia po 49 pkt.
10. Niemcy 48 pkt.
11. Litwa 47 pkt.

Zawodnicy drużyn sklasy kowanych na pierwszych trzech pozycjach otrzymali nagrody, którymi były wysokiej klasy kalkulatory rmy *Texas Instruments*. Drużyna łotewska otrzymała puchar przechodni. Ponadto wszyscy zawodnicy otrzymali dyplomy.

Następne Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich odbędą się w listopadzie 1999 roku w Islandii.

TEKSTY ZADAŃ

Zawody stopnia pierwszego

1. Dowieść, że wśród liczb postaci $50^n+(50n+1)^{50}$, gdzie n je
naturalną, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

2. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zach
równość

$$(a+b+c+d)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab.$$

3. W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty. Punk
na boku BC, przy czym $BD=2\quad CD$. Punkt E jest rzutem pros
punktu B na prostą AD. Wyznaczyć miarę kąta CED.

4. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że liczby $x+y$, x^2+y^2
i x^4+y^4 są całkowite. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej do
liczba x^n+y^n jest liczbą całkowitą.

5. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y sp
równanie $y^x=x^{50}$.

6. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przec
w punkcie P. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta MP prze
CD w punkcie Q. Dowieść, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP je
stosunkowi długości odcinków CQ i DQ.

7. Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie wi
$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ mające dokładnie n pierwiastków nie w
niż $\quad 1$ oraz spełniające warunek

$$a_0^2+a_1a_n=a_n^2+a_0a_{n\quad 1}\,.$$

Uwaga: Pierwiastki są liczone z uwzględnieniem krotności: jeśli liczb
pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $P(x)$ (tzn. jeśli wielomian $P(x)$
dzielny przez wielomian $(x\quad x_0)^k$, ale nie przez $(x\quad x_0)^{k+1}$), wówcz
x_0 jest traktowana jak k pierwiastków wielomianu $P(x)$.

8. Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$ oraz zbiór n-elementowy S. Wy

9. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB
ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne d
wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnić, że proste AD, BE, CF pr
się w jednym punkcie.

10. Dana jest liczba $x_1 > 0$. Ciąg (x_n) jest zde niowany wzorem:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \qquad \text{dla} \ \ n = 1,2,3,\ldots \ .$$

Udowodnić, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$, i obliczyć ją.

11. W urnie znajdują się dwie kule: biała i czarna. Ponadto m
dyspozycji 50 kul białych i 50 czarnych. Wykonujemy 50 razy nas
czynność: losujemy z urny kulę, a następnie wrzucamy ją z powr
urny oraz dokładamy jedną kulę tego samego koloru, co wylosowa
Po zakończeniu tych czynności mamy więc w urnie 52 kule. Jaka li
białych znajdujących się w urnie jest najbardziej prawdopodobna?

12. Wszystkie wierzchołki sześcianu o krawędzi a leżą na pow
czworościanu foremnego o krawędzi 1. Wyznaczyć możliwe wartości

Zawody stopnia drugiego

1. Dana jest funkcja $f\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ taka, że $f(\frac{1}{n}) = (\ \ 1)^n$ dla $n =$
Wykazać, że nie istnieją funkcje rosnące $g\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, $h\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, dla
$f = g \quad h$.

2. Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów je
wych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześciar
nego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędz
zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, że po u
z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych p
bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.

3. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty E
odpowiednio na bokach AB i CD, przy czym $AE{:}EB = CF{:}FD$. I
leży na odcinku EF i spełnia warunek $EP{:}PF = AB{:}CD$. Udowo
stosunek pól trójkątów APD i BPC nie zależy od wyboru punktów

4. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki:

5. Niech $S=\{1,2,3,4,5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon S\to S$ spełn
równość $f^{50}(x)=x$ dla wszystkich $x\in S$.

Uwaga: $f^{50}(x)=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{50}(x)$.

6. Dana jest liczba naturalna $k\geqslant 2$ oraz liczby całkowite $a_1,a_2,\ldots$
niające warunki

$$a_1+2^ia_2+3^ia_3+\ldots+n^ia_n=0 \qquad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,k\quad 1.$$

Dowieść, że liczba $a_1+2^ka_2+3^ka_3+\ldots+n^ka_n$ jest podzielna przez

Zawody stopnia trzeciego

1. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, przy czym $AD>BC$
E leży na boku AC i spełnia warunek

$$\frac{AE}{EC}=\frac{BD}{AD\quad BC}.$$

Udowodnić, że $AD>BE$.

2. Dane są liczby całkowite nieujemne $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{101}$
od 5050. Dowieść, że spośród nich można wybrać takie cztery różn
a_m, a_n, że liczba $a_k+a_l\quad a_m\quad a_n$ jest podzielna przez 5050.

3. Dowieść, że istnieją takie liczby naturalne $n_1<n_2<\ldots<n_{50}$,

$$n_1+S(n_1)=n_2+S(n_2)=n_3+S(n_3)=\ldots=n_{50}+S(n_{50}),$$

gdzie $S(n)$ jest sumą cyfr liczby n.

4. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb naturalnych $n\geqslant 2$ układ równa

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+50=16x_1+12x_2\\ x_2^2+x_3^2+50=16x_2+12x_3\\ x_3^2+x_4^2+50=16x_3+12x_4\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n\ 1}^2+x_n^2+50=16x_{n\ 1}+12x_n\\ x_n^2+x_1^2+50=16x_n+12x_1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$.

5. Niech $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ będą liczbami całkowitymi.

6. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ \ , \qquad \frac{AB}{BC}\,\frac{CD}{DE}\,\frac{EF}{FA} = 1\ .$$

Dowieść, że $\dfrac{AB}{BF}\,\dfrac{FD}{DE}\,\dfrac{EC}{CA} = 1$.

XXXIX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są pros
a przeciwległe boki AB i DC nie są równoległe. Zakładamy, że sy
boków AB i DC przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz czw
$ABCD$. Udowodnić, że czworokąt $ABCD$ da się wpisać w okrąg wtec
wtedy, gdy trójkąty ABP i CDP mają równe pola.

2. W konkursie bierze udział a uczestników, ocenianych przez b
natorów, gdzie $b \geqslant 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Każdy egza
ocenia każdego uczestnika, wydając werdykt „zdał” lub „nie zdał”. Z
że k jest liczbą o własności: oceny każdych dwóch egzaminatorów s
dla co najwyżej k uczestników. Dowieść, że

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b \quad 1}{2b}.$$

3. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oznaczmy przez $d(n)$
dodatnich dzielników (włącznie z 1 oraz n). Wyznaczyć wszystkie
liczby całkowite k takie, że

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

dla pewnego n.

4. Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich
liczba a^2b+a+b jest podzielna przez ab^2+b+7.

5. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. O
jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach K
Prosta przechodząca przez B i równoległa do MK przecina proste L
odpowiednio w punktach R i S. Wykazać, że kąt RIS jest ostry.

6. Rozważamy wszystkie funkcje f ze zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb
tych dodatnich do tego samego zbioru, spełniające warunek

XXI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

1. Niech x_1, x_2, y_1, y_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi, że x_1^2
Udowodnić nierówność

$$(x_1y_1+x_2y_2 \quad 1)^2 \geqslant (x_1^2+x_2^2 \quad 1)(y_1^2+y_2^2 \quad 1).$$

2. Rozważamy n punktów $P_1,P_2,\ldots,P_n$ położonych w tej kolejnoś
nej linii prostej. Malujemy każdy z tych n punktów na jeden z nastę
kolorów: biały, czerwony, zielony, niebieski, oletowy. Kolorowanie
my *dopuszczalnym*, jeśli dla dowolnych dwóch kolejnych punktów
$(i=1,2,\ldots,n \quad 1)$ oba są tego samego koloru lub co najmniej jeden z
biały. Ile jest dopuszczalnych kolorowań?

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (x,y) spełniają
pujący układ równań:

$$\begin{cases} 2 \quad x^3 = y \\ 2 \quad y^3 = x. \end{cases}$$

4. Niech m, n będą danymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Ni

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt[k^2]{k^m} \right]$$

($[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x). Udowodnić,

$$S_m(n) \leqslant n + m \quad (\sqrt[4]{2^m} \quad 1).$$

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich t
równanie $x^3 \quad 17x^2+ax \quad b^2=0$ ma trzy pierwiastki całkowite (nie
nie różne).

6. Różne punkty A, B, C, D, E, F są położone na okręgu k w
ności. Proste styczne do okręgu k w punktach A i D oraz proste
przecinają się w jednym punkcie P. Udowodnić, że proste AD, BC
równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

7. Rozważamy pary (a,b) liczb naturalnych takich, że iloczyn a^a
pisie dziesiętnym kończy się dokładnie 98 zerami. Wyznaczyć parę (
własności, dla której iloczyn ab jest najmniejszy.

8. Niech $n>2$ będzie daną liczbą naturalną. Rozważamy siatkę

w kwadraty zawarte w tym wielokącie. Udowodnić, że jeśli wartoś
nych dwóch przystających wielokątów dopuszczalnych są równe, to w
liczby wpisane w kwadraty siatki są równe.

Uwaga. Przypominamy, że obraz symetryczny Q wielokąta P je
kątem przystającym do P.

9. Niech K, L, M będą środkami boków BC, AC, AB trójkąt
Punkty A, B, C dzielą okrąg opisany na trójkącie ABC na trzy łuki:
CA. Niech X będzie takim punktem łuku BC, że $BX = XC$. Anal
niech Y będzie takim punktem łuku AC, że $AY = YC$, zaś Z takim
łuku AB, że $AZ = ZB$. Niech R będzie promieniem okręgu opisa
trójkącie ABC i niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójk
Udowodnić, że $r + KX + LY + MZ = 2R$.

IX Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

1. Znaleźć wszystkie funkcje dwóch zmiennych f, których argum
i wartości $f(x,y)$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, spełniające nas
warunki (dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x i y):

$$\begin{aligned} f(x,x) &= x, \\ f(x,y) &= f(y,x), \\ (x+y)f(x,y) &= yf(x,x+y). \end{aligned}$$

2. Trójkę liczb całkowitych dodatnich (a,b,c) nazywamy *quasi-p*
ską, jeśli istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c, w którym miara
przeciwko boku c wynosi $120°$. Udowodnić, że jeśli (a,b,c) jest trójką
tagorejską, to c ma dzielnik pierwszy większy od 5.

3. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x,y, które s
równanie

$$2x^2 + 5y^2 = 11(xy \quad 11).$$

4. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych.
że dla $n = 1,2,\ldots,1998$ wartości $P(n)$ są liczbami naturalnymi trzycy
Udowodnić, że wielomian P nie ma pierwiastków całkowitych.

5. Niech a będzie cyfrą nieparzystą, zaś b cyfrą parzystą. Udow
dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje liczba całkowita d
podzielna przez 2^n, w której zapisie dziesiętnym nie występują cyfry
a i b.

7. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Znaleź
kie funkcje $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ równanie

$$f(x)+f(y)=f(f(x)f(y)).$$

8. Niech $P_k(x)=1+x+x^2+\qquad+x^{k\ 1}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_k(x)=2^{n\ 1}\,P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej dodatniej

9. Liczby α, β spełniają $0<\alpha<\beta<\pi/2$. Niech γ, δ będą liczba
ślonymi przez warunki:

(i) $0<\gamma<\pi/2$ oraz liczba $\operatorname{tg}\gamma$ jest średnią arytmetyczną liczb $\operatorname{tg}\alpha$

(ii) $0<\delta<\pi/2$ oraz liczba $\dfrac{1}{\cos\delta}$ jest średnią arytmetyczną liczb $\dfrac{1}{\cos\alpha}$

Udowodnić, że $\gamma<\delta$.

10. Niech $n\geqslant 4$ będzie parzystą liczbą całkowitą. W okrąg o pro
wpisane są n-kąt foremny i $(n\ \ 1)$-kąt foremny. Dla każdego wie
n-kąta rozważmy odległość od tego wierzchołka do najbliższego w
ka $(n\ \ 1)$-kąta, mierzoną po obwodzie okręgu. Niech S będzie sum
odległości. Udowodnić, że S nie zależy od wzajemnego położenia tyc
wielokątów.

11. Niech a, b, c będą długościami boków pewnego trójkąta, z
promieniem okręgu opisanego na nim. Udowodnić, że

$$R\geqslant\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2\ \ c^2}}\ .$$

Kiedy zachodzi równość?

12. W trójkącie ABC zachodzi $\sphericalangle BAC=90^\circ$. Punkt D leży na b
i $\sphericalangle BDA=2\sphericalangle BAD$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{AD}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}\right).$$

13. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równole
$\sphericalangle ADE=\sphericalangle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P.
nić, że $\sphericalangle EAD=\sphericalangle BDP$ oraz $\sphericalangle CBD=\sphericalangle ADP$.

14. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB<AC$. Prosta prze

15. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest spodkiem ści opuszczonej z wierzchołka A na bok BC. Punkt E leży na odci i spełnione jest równanie

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Punkt F jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D na Udowodnić, że $\sphericalangle AFC = 90^\circ$.

16. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13 13 czterd dwoma klockami o wymiarach 4 1 w taki sposób, że tylko środk szachownicy pozostanie nie zakryte? (Zakładamy, że każdy klocek cztery pełne pola szachownicy).

17. Niech n i k będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Danych przedmiotów (tych samych rozmiarów) i k pudełek, z których każd ści n przedmiotów. Każdy przedmiot jest pokolorowany jednym z k kolorów. Wykazać, że można rozmieścić te przedmioty w pudełkac sposób, że w każdym pudełku znajdą się przedmioty w co najwyż kolorach.

18. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których zbiór S o następujących własnościach:

(i) S składa się z n liczb całkowitych dodatnich, z których wszystkie s sze od $2^{n\ 1}$;

(ii) dla dowolnych dwóch różnych niepustych podzbiorów A i B suma elementów zbioru A jest różna od sumy elementów zbioru

19. Rozważmy mecz ping-ponga między dwiema drużynami, z każda składa się z 1000 graczy. Każdy gracz grał przeciwko każdemu przeciwnej drużyny dokładnie raz (w ping-pongu nie ma remisów). nić, że istnieje dziesięciu graczy z jednej drużyny takich, że każdy drużyny przeciwnej przegrał z co najmniej jednym z tych dziesięciu

20. Powiemy, że liczba całkowita dodatnia m *pokrywa* liczbę 1 1, 9, 9, 8 pojawiają się w tej właśnie kolejności jako cyfry m. (Na 1998 jest pokrywana przez 2**1**5**99**36**98**, ale nie przez 213326798). Ni oznacza liczbę tych liczb całkowitych dodatnich, które pokrywają 19 dokładnie n cyfr ($n \geqslant 5$), z których wszystkie są różne od 0. Jak z dzielenia przez 8 daje $k(n)$?

ROZWIĄZANIA ZADAŃ [1]

Zawody stopnia pierwszego

Zadanie **1.** Dowieść, że wśród liczb postaci $50^n+(50n+1)^{50}$, gdzie n j
naturalną, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

Rozwiązanie

Sposób I

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba 50^n z dzielenia prze
resztę 2. Jeśli ponadto n dzieli się przez 3, to liczba $(50n+1)^{50}$ z
przez 3 daje resztę 1. Stąd wynika, że liczba $50^n+(50n+1)^{50}$ jest p
przez 3 dla liczb n postaci $6k+3$. Zatem dla liczb n dających z
przez 6 resztę 3, liczba $50^n+(50n+1)^{50}$ jest złożona.

Sposób II

Dla liczb n podzielnych przez 5 liczba $50^n+(50n+1)^{50}$ jest suma
potęg liczb naturalnych. Przyjmijmy w tożsamości

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4 \quad x^3y+x^2y^2 \quad xy^3+y^4), \tag{1}$$

$x=50^{n/5}$ oraz $y=(50n+1)^{10}$. Z nierówności

$$1<x+y<x^5+y^5$$

wynika, że oba czynniki stojące po prawej stronie równości (1) są więk
To oznacza, że liczba $x^5+y^5=50^n+(50n+1)^{50}$ jest dla liczb n pod
przez 5 liczbą złożoną.

Uwaga 1.

Podobnie jak w sposobie I można wykazać, że liczba $50^n+(5$
dzieli się przez 3 dla liczb n postaci $6k+5$.

Uwaga 2.

Nie wszystkie wyrazy ciągu $50^n+(50n+1)^{50}$ są liczbami złożon
przykład dla $n=28$ otrzymujemy liczbę pierwszą, która ma 158 cyfr.
liczba pierwsza podanej w zadaniu postaci pojawia się dopiero dla
i ma 823 cyfry!

Zadanie **2.** Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d
nierówność

$$(a+b+c+d)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Na mocy nierówności pomiędzy średnią kwadratową a arytmetycz
uwaga niżej) zastosowanej do liczb $a+b$, c i d otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2+c^2+d^2}{3}} \geqslant \left|\frac{(a+b)+c+d}{3}\right|,$$

skąd $3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab \geqslant (a+b+c+d)^2$.

Sposób II

Zachodzą następujące związki:

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab \quad (a+b+c+d)^2 =$$
$$= 3a^2+3b^2+3c^2+3d^2+6ab$$
$$a^2 \quad b^2 \quad c^2 \quad d^2 \quad 2ab \quad 2ac \quad 2ad \quad 2bc \quad 2bd \quad 2cd$$
$$= 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+4ab \quad 2ac \quad 2ad \quad 2bc \quad 2bd \quad 2cd =$$
$$= \tfrac{1}{2}(4a^2+4b^2+c^2+d^2+8ab \quad 4ac \quad 4ad \quad 4bc \quad 4bd+2cd)$$
$$+\tfrac{3}{2}(c^2+d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(2a+2b \quad c \quad d)^2+\tfrac{3}{2}(c \quad d)^2 \geqslant 0.$$

To kończy dowód danej nierówności.

Uwaga

Nierówność pomiędzy średnią kwadratową a arytmetyczną orzek
dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

(1) $$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right|.$$

Jest to szczególny przypadek nierówności Schwarza (zob. *Dodatek*
ność Schwarza", str. 112). Równość w nierówności (1) zachodzi wted
wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Zadanie **3.** W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty.
leży na boku BC, przy czym $BD = 2 \quad CD$. Punkt E jest rz
stokątnym punktu B na prostą AD. Wyznaczyć miarę kąta

Rozwiązanie

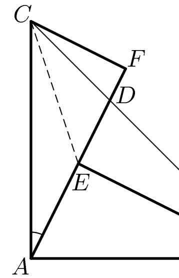
Sposób I

więc trójkąty prostokątne CAF i ABE są przystają-ce. Stąd

(1) $$AE = CF \qquad \text{oraz} \qquad BE = AF.$$

Ponadto na mocy twierdzenia Talesa,

(2) $$\frac{CF}{BE} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{2}, \qquad \text{skąd} \quad BE = 2\ \ CF.$$



rys. 1

Korzystając z równości (1) oraz (2) otrzymujemy

$$EF = AF \quad AE = BE \quad AE = 2\ \ CF \quad CF = CF.$$

Trójkąt CFE jest więc trójkątem prostokątnym równoramiennym, a
cza, że $\sphericalangle CED = \sphericalangle CEF = 45^\circ$.

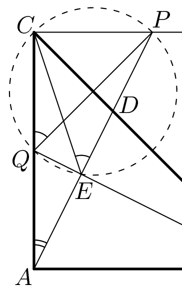
Sposób II

Uzupełnijmy trójkąt ABC do kwadratu $ABFC$ (rys. 2). Załóżmy, że prosta AD przecina odcinek CF w punkcie P, zaś prosta BE przecina bok AC w punkcie Q. Ponieważ

$$\frac{CP}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{2},$$

więc $CP = \frac{1}{2}CF$. Ponadto

$$\sphericalangle ABE = 90^\circ \quad \sphericalangle BAE = \sphericalangle CAP,$$



rys. 2

co dowodzi, że trójkąty prostokątne ABQ oraz CAP są przystając
$CP = AQ$, i w konsekwencji $CP = CQ$ $(= \frac{1}{2}AB)$.

Ponieważ $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PEQ = 90^\circ$, więc punkty C, Q, E, P leżą na
okręgu. Stąd $\sphericalangle CED = \sphericalangle CQP = 45^\circ$.

Sposób III

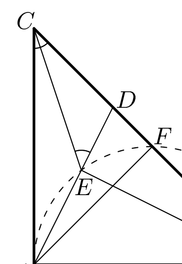
Oznaczmy przez F środek odcinka BC (rys. 3). Wykażemy najp
zachodzi równość:

(3) $$CD^2 = DF\ \ DB.$$

Oznaczmy: $AB = AC = a$. Wówczas z de nicji punktu D,

(4) $$CD^2 = (\tfrac{1}{3}a\sqrt{2})^2 = \tfrac{2}{9}a^2$$

oraz



$$DF\ \ DB = (DB\ \ BF)\ \ DB = DB^2\ \ BF\ \ DB =$$

okręgu (rys. 3). Zatem na mocy równości (3),

$$CD^2 = DF \quad DB = DE \quad DA, \qquad \text{skąd} \frac{CD}{DE} = \frac{DA}{CD}. \tag{6}$$

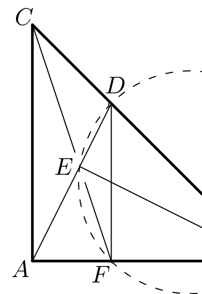
Trójkąty ADC i CDE mają wspólny kąt przy wierzchołku D, więc
równości (6) trójkąty te są podobne. Stąd

$$\sphericalangle CED = \sphericalangle ACD = 45^\circ.$$

Sposób IV

Niech F będzie rzutem prostokątnym punktu D na prostą AB
Wykażemy najpierw, że punkty C, E, F są współliniowe. W tym
starczy udowodnić, że

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{DF}. \tag{7}$$



rys. 4

Na mocy twierdzenia Talesa mamy następujące równości:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{BD} = \frac{3}{2}. \tag{8}$$

Należy więc dowieść, że $AE{:}ED = 3{:}2$.

Oznaczmy: $AB = AC = a$. Obliczmy długości odcinków AE i ED w zależności od a.

Na mocy twierdzenia Talesa $AF = \frac{1}{3}a$ oraz $DF = \frac{2}{3}a$. Zatem z t
nia Pitagorasa $AD = \frac{1}{3}a\sqrt{5}$. Trójkąty prostokątne AFD i AEB maj
ny kąt przy wierzchołku A, więc są podobne. Zatem

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD},$$

skąd wyliczając wielkość AE otrzymujemy $AE = \frac{1}{5}a\sqrt{5}$. Ponadto

$$ED = AD \quad AE = \tfrac{1}{3}a\sqrt{5} \quad \tfrac{1}{5}a\sqrt{5} = \tfrac{2}{15}a\sqrt{5},$$

skąd $AE{:}ED = 3{:}2$. Dowód równości (7) został zakończony, co ozn
punkty C, E, F są współliniowe.

Ponieważ $\sphericalangle BED = \sphericalangle BFD = 90^\circ$, więc na czworokącie $FBDE$ m
sać okrąg (rys. 4). Zatem

$$\sphericalangle CED = \sphericalangle AEF = 90^\circ \quad \sphericalangle FEB = 90^\circ \quad \sphericalangle FDB = 90^\circ \quad 45^\circ = 4$$

Zadanie **4.** Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że liczby $x+y$, x^2+y
i x^4+y^4 są całkowite. Dowieść, że dla każdej liczby całkowit

więc liczby $2xy$ i $2x^2y^2$ są całkowite. Gdyby liczba xy nie była całk
liczba $2xy$ musiałaby być nieparzystą. Jednak wtedy liczba $2x^2y^2 =$
nie byłaby całkowita. Stąd wniosek, że liczba xy jest całkowita.

Tezę dowodzimy indukcyjnie. Dla $n=1$ i $n=2$ liczba x^n+y^n je
wita. Korzystając z tożsamości

$$x^n+y^n=(x^{n\ 1}+y^{n\ 1})(x+y)\quad xy(x^{n\ 2}+y^{n\ 2})$$

widzimy, że jeżeli $n\geqslant 3$ jest taką liczbą całkowitą dodatnią, że ob
$x^{n\ 2}+y^{n\ 2}$ oraz $x^{n\ 1}+y^{n\ 1}$ są całkowite, to liczba x^n+y^n jest rów
kowita. Dowód indukcyjny jest więc zakończony.

Uwaga

Założenie, że liczba x^3+y^3 jest całkowita, nie było w dowodzie w
stywane. Natomiast założenia, że liczba x^4+y^4 jest całkowita, pom
można. Pokazuje to przykład liczb $x=\sqrt{2}/2$ oraz $y=\ \ \sqrt{2}/2$, dla k

$$x+y=0,\qquad x^2+y^2=1,\qquad x^3+y^3=0,$$

lecz $x^4+y^4=\frac{1}{2}$.

Zadanie **5.** Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y sp
równanie $y^x=x^{50}$.

Rozwiązanie

Dane równanie zapisujemy w postaci $y=x^{50/x}$. Ponieważ dla ka
będącego dzielnikiem liczby 50, liczba po prawej stronie jest całkow
otrzymujemy rozwiązania równania dla $x\in\{1,2,5,10,25,50\}$. Inne r
nia tego równania otrzymamy tylko wtedy, gdy $x\geqslant 2$ oraz dla pewn
liczba x jest jednocześnie k-tą potęgą pewnej liczby naturalnej oraz
kiem liczby $50k$. Jeśli p jest dzielnikiem pierwszym takiej liczby x, to
Ponieważ zachodzi nierówność $p^k>k$, więc nie może być $p^k|k$. Sta
p jest równa 2 lub 5. Jeżeli $p=2$, to $2^k|2k$, skąd $k=2$. Jeżeli zaś
$5^k|25k$, skąd znowu $k=2$. Zatem liczba x musi być jednocześnie kw
pewnej liczby naturalnej oraz dzielnikiem liczby 100. Otrzymujemy
we wartości x w tym przypadku: $x=4$ oraz $x=100$. Zatem dane r
ma 8 rozwiązań (x,y):

$$(1,1),\ (2,2^{25}),\ (4,2^{25}),\ (5,5^{10}),\ (10,10^5),\ (25,625),\ (50,50),\ (1$$

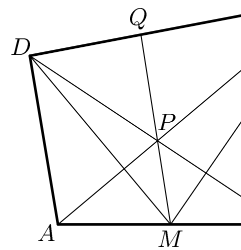
Zadanie **6.** Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ prze
w punkcie P. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta M
na bok CD w punkcie Q. Dowieść, że stosunek pól trójkąt

Sposób I

Prawdziwe są następujące równości (rys. 1):

$$[MPC]=[AMC] \quad [AMP]=\tfrac{1}{2}[ABC] \quad \tfrac{1}{2}[ABP]=\tfrac{1}{2}[BCP].$$

Analogicznie dowodzimy, że $[MPD]=\frac{1}{2}[ADP]$. Zatem stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi pól trójkątów MPC i MPD. Trójkąty MPC i MPD mają wspólną podstawę MP, a więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi wysokości opuszczonych na tę podstawę, czyli (na mocy twierdzenia Talesa) wielkości $CQ\!:\!DQ$.



rys. 1

Sposób II

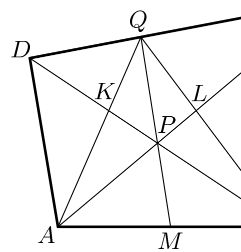
Niech K będzie punktem przecięcia odcinków BD i AQ, zaś niech punktem przecięcia odcinków AC i BQ (rys. 2).

Ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AB, więc na mocy twierdzenia Cevy (p. str. 120) zastosowanego do trójkąta ABQ otrzymujemy

$$\frac{BL}{LQ}=\frac{AK}{KQ}, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{[BCP]}{[CQP]}=\frac{[ADP]}{[DQP]}.$$

Zatem

$$\frac{[BCP]}{[ADP]}=\frac{[CQP]}{[DQP]}=\frac{CQ}{DQ}.$$



rys. 2

Sposób III

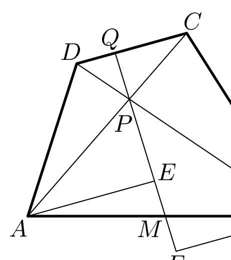
Niech E będzie punktem przecięcia prostej MQ z prostą przec przez punkt A i równoległą do CD. Podobnie, niech F będzie punkt cięcia prostej MQ z prostą przechodzącą przez punkt B i równoległ (rys. 3).

Na mocy twierdzenia Talesa

$$\frac{AE}{BF}=\frac{AM}{MB}=1,$$

skąd

$$\frac{[BCP]}{[ADP]}=\frac{CP}{AP} \quad \frac{BP}{DP}=\frac{CQ}{AE} \quad \frac{BF}{DQ}=\frac{CQ}{DQ}.$$



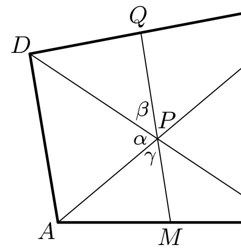
rys. 3

Mamy dowieść, że

$$(1)\qquad \frac{[BCP]}{[ADP]} = \frac{CQ}{DQ}.$$

Wielkość $CQ{:}DQ$ jest równa stosunkowi pól trójkątów CPQ i DP
oba trójkąty mają wspólną wysokość opuszczoną na podstawy CQ
Zatem równość (1) przybiera postać

$$\frac{BP\quad CP}{AP\quad DP} = \frac{[CPQ]}{[DPQ]},$$



rys. 4

czyli

$$\frac{BP\quad CP}{AP\quad DP} = \frac{CP\quad CQ\quad \sin\gamma}{DP\quad CQ\quad \sin\beta}.$$

Należy więc dowieść, że

$$\frac{BP}{AP} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

lub $BP\quad \sin\beta = AP\quad \sin\gamma$. Po pomnożeniu ostatniej równości prze
wodzona przez nas tożsamość przybiera postać $[BPM] = [APM]$. Ta
jest prawdziwa, gdyż punkt M jest środkiem boku AB. Dowód rów
jest więc zakończony.

Zadanie **7.** Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie
ny $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ mające dokładnie n pierwia
większych niż 1 oraz spełniające warunek

$$a_0^2 + a_1a_n = a_n^2 + a_0a_{n\ \ 1}\ .$$

Uwaga: Pierwiastki są liczone z uwzględnieniem krotności:
ba x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $P(x)$ (tzn.
lomian $P(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x\ \ x_0)^k$, ale
$(x\ \ x_0)^{k+1}$), wówczas liczba x_0 jest traktowana jak k pier
wielomianu $P(x)$.

Rozwiązanie

Niech $\ p_1 \leqslant\ \ p_2 \leqslant \ldots \leqslant\ \ p_n$ będą pierwiastkami wielomianu spe
go warunki zadania. Wówczas $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant 1$ oraz $a_n \neq 0$. Pon

$$a_{n\ \ 1} = a_n(p_1 + p_2 + \ldots + p_n), \quad a_1 = a_np_1p_2 \ldots p_n\Big(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots +$$

oraz $a_0 = a_np_1p_2 \ldots p_n$. Warunek $a_0^2 + a_1a_n = a_n^2 + a_0a_{n\ \ 1}$ można więc p
w postaci

$$p_1p_2 \ldots p_n + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_1p_2 \ldots p_n} + p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

oraz, że

(2) równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2 = p_3 = \ldots = p_n =$

Dla $n = 2$ nierówność (1) przybiera postać

$$p_1p_2 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geqslant \frac{1}{p_1p_2} + p_1 + p_2. \tag{3}$$

Jest ona równoważna nierówności

$$p_1^2p_2^2 - p_1^2p_2 - p_1p_2^2 + p_1p_2 \geqslant p_1p_2 - p_1 - p_2 + 1,$$

czyli $p_1p_2(p_1 - 1)(p_2 - 1) \geqslant (p_1 - 1)(p_2 - 1)$, co przy założeniu $p_1 \geqslant p_2$
spełnione. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2 - 1 = 0$.

Załóżmy teraz prawdziwość nierówności (1) oraz stwierdzenia (2)
nej liczby $n \geqslant 2$. Niech ponadto dane będą liczby $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant$
Wówczas $p_1p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots \geqslant p_{n+1} \geqslant 1$, skąd na mocy założenia indukcy

$$\begin{aligned}(p_1p_2)p_3 \ldots p_np_{n+1} + \frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{(p_1p_2)p_3 \ldots p_np_{n+1}} + p_1p_2 + p_3 + \ldots + p_n + p_{n+1}\end{aligned} \tag{4}$$

oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_3 = \ldots = p_n = p_{n+1}$

Dodanie nierówności (3) i (4) stronami daje

$$\begin{aligned}p_1p_2p_3 \ldots p_np_{n+1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{p_1p_2p_3 \ldots p_np_{n+1}} + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n + p_{n+1}.\end{aligned}$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2 = p_3 = \ldots = p_n = p_{n+1}$

Ze stwierdzenia (2) wynika zatem, że wielomiany spełniające war
dania mają postać $P(x) = a(x+1)^{n-1}(x+b)$, gdzie a jest dowolną n
liczbą rzeczywistą, zaś $b \geqslant 1$.

Zadanie **8.** Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$ oraz zbiór n-elementowy
znaczyć najmniejszą liczbę naturalną k, dla której istnieją p
$A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru S o następującej własności: *dla dowoln*
różnych elementów $a, b \in S$ *istnieje taka liczba* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$
$A_j \cap \{a, b\}$ *jest jednoelementowy.*

Rozwiązanie

Wykażemy, że $k = [\log_2(n-1) + 1]$, tzn. $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$.

na i-tym miejscu jedynkę. Dowolne różne elementy a i b zbioru S ma
czas przypisane różne numery, które różnią się, powiedzmy, na j-tym
Wtedy do zbioru A_j należy dokładnie jeden z elementów a, b.

Tak znaleziona liczba k jest najmniejsza. Załóżmy bowiem, że
zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ spełniające warunki zadania dla $2^k < n$. Każd
mentowi x zbioru S przypisujemy układ k liczb $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ wedłu
pującej zasady:

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \notin A_i \\ 1 & \text{gdy} \quad x \in A_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Ponieważ $2^k < n$, więc istnieją dwa różne elementy $a, b \in S$, które ma
pisany ten sam układ liczb. To zaś oznacza, że element a należy do d
tych samych zbiorów spośród $A_1, A_2, \ldots, A_k$, co element b.

Zadanie **9.** Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB
ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są s
okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnić, że proste
CF przecinają się w jednym punkcie.

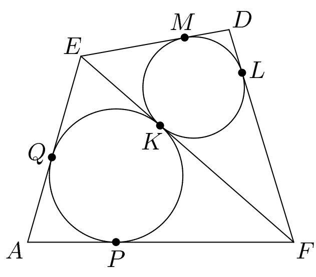
Rozwiązanie

Sposób I

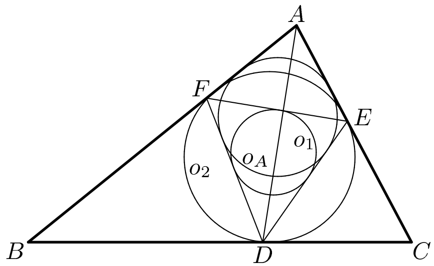
Rozwiązanie to opiera się na twierdzeniu mówiącym o tym, że
dwóch jednokładności jest (na ogół) jednokładnością. Dokładne sfor
nie tego twierdzenia oraz jego dowód znajduje się na końcu niniejszej
(zob. *Dodatek*, „Twierdzenie o złożeniu jednokładności”, str. 114).

Niech K, L, M będą odpowiednio punktami styczności okręgu
go w trójkąt DEF z bokami EF, FD, DE (rys. 1). Przyjmijmy po
okrąg wpisany w trójkąt AFE jest styczny do boków EF, FA, AE o
nio w punktach K, P, Q. Wówczas $ME = KE = QE$ oraz $LF = K$
Stąd otrzymujemy

$$AF + DE = AP + PF + DM + ME = AQ + QE + FL + LD = AE +$$



Niech o_1 będzie okręgiem wpisanym w trójkąt DEF, zaś o_2 o
wpisanym w trójkąt ABC (rys. 2). Punkt D jest środkiem jednokład
o skali dodatniej, przekształcającej okrąg o_1 na o_A; punkt A jest ś
jednokładności j_2 o skali dodatniej, przekształcającej okrąg o_A na
tem jednokładność j o skali dodatniej, przekształcająca okrąg o_1 na
złożeniem jednokładności j_1 i j_2 — jej środek leży więc na prostej A



rys. 2

Analogicznie dowodzimy, że środek jednokładności j leży na pros
i CF.

Wniosek: proste AD, BE, CF mają punkt wspólny, będący ś
jednokładności okręgów o_1 i o_2.

Uwaga

Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do tego, z którego korzysta
początku powyższego rozwiązania, a mianowicie: *jeśli w czworokąt
można wpisać okrąg, to okręgi wpisane w trójkąty AFE oraz DEF są*
Nietrudny dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Sposób II

Ponieważ okrąg wpisany w trójkąt DEF jest styczny do okręg
sanych w trójkąty AEF, BFD, CDE, więc w czworokąty $AFDE$,
$CEFD$ można wpisać okręgi (zob. początek sposobu I). Oznaczm
wpisane w wyżej wymienione czworokąty odpowiednio przez o_A, o_B

Wykażemy, że trójkąty ABC oraz DEF mają oś perspektywiczną
datek, „Twierdzenie Desarguesa”, str. 117). Wówczas na mocy twi
Desarguesa, trójkąty te mają środek perspektywiczny. To oznacza, że
AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Pozostało więc udowodnić, że trójkąty ABC, DEF mają oś pe
wiczną. W tym celu rozpatrzymy trzy przypadki.

(a) Załóżmy najpierw, że żadna z par (AB,DE), (BC,EF), (
nie tworzy pary boków równoległych, tzn. $AB \nparallel DE$, $BC \nparallel EF$, C

punkt Y jest środkiem jednokładności j_2 o skali dodatniej, która pr
ca okrąg o_B na okrąg o_C. Zatem złożenie $j_2 \circ j_1$ jest jednokładności
środek leży na prostej XY. Z drugiej strony jednokładność $j_2 \circ j_1$
lę dodatnią i przeprowadza okrąg o_A na okrąg o_C. Środkiem jej
punkt Z. Wykazaliśmy tym samym, że punkty X, Y, Z są wspó
Zatem trójkąty ABC i DEF mają oś perspektywiczną.

(b) Załóżmy z kolei, że dokładnie jedna spośród par (AB,DE), $($
(CA,FD) jest parą prostych równoległych. Bez straty ogólności
przyjąć, że $CA \parallel FD$, oraz oznaczyć $X = BA \cap DE$, $Y = BC \cap EF$.
jąc tak samo jak w przypadku (a) widzimy, że punkt X jest środkie
kładności j_1 o skali dodatniej, przekształcającej okrąg o_A na okrąg
punkt Y jest środkiem jednokładności j_2 o skali dodatniej, która prze
okrąg o_B na okrąg o_C. Ponieważ promienie okręgów o_A i o_C są jed
więc złożenie $j_2 \circ j_1$ jest przesunięciem. Wektor tego przesunięcia jes
legły do prostej XY jak również do prostej łączącej środki okręgów
Proste XY, AB, CD są więc równoległe, co w tym przypadku ozn
trójkąty ABC i DEF mają oś perspektywiczną.

(c) Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym co najmniej d
spośród (AB,DE), (BC,EF), (CA,FD) są parami boków równoległ
straty ogólności przyjmijmy, że tymi dwiema parami są (BC,EF) i $($
Wówczas na mocy twierdzenia Talesa

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB},$$

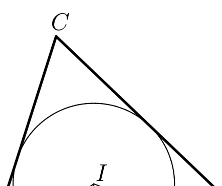
skąd wynika, że również $AB \parallel DE$. Zatem, zgodnie z przyjętą ko
również w tym przypadku trójkąty ABC i DEF mają oś perspekty

W dwóch kolejnych sposobach skorzystamy z następującego lem

Lemat

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC (rys. 3
ten jest styczny do boku AB w punkcie K. Wówczas

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AK}{BK} = \left(\frac{AI}{BI}\right)^2. \tag{1}$$



Dowód

Oznaczmy:

$$\alpha = \sphericalangle CAI = \sphericalangle KAI, \quad \beta = \sphericalangle CBI = \sphericalangle KBI.$$

Korzystając z de nicji funkcji trygonometrycznych oraz stosując twie
sinusów do trójkątów ABC i ABI, możemy powyższą równość p
kolejno jako:

$$\cos\alpha \; \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \cos\beta \; \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad \cos\alpha \; \frac{2\sin\beta\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\beta \; \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Ostatnia zależność jest spełniona dla dowolnych liczb $0<\alpha<$
$0<\beta<\pi/2$. Dowód lematu jest więc zakończony.

Sposób III

Oznaczmy przez I_A, I_B, I_C, I odpowiednio środki okręgów w
w trójkąty AEF, BFD, CDE, DEF. Niech ponadto K, L, M będą p
styczności okręgu wpisanego w trójkąt DEF odpowiednio z bokami
DE. Punkty K, L, M są również punktami styczności okręgów w
w trójkąty AEF, BFD, CDE z bokami trójkąta DEF (rys. 4).
powyższy lemat do trójkątów EDC, FEA, DFB otrzymujemy kole

$$\frac{CD}{CE} \; \frac{MD}{EM} = \left(\frac{DI_C}{EI_C}\right)^2, \quad \frac{AE}{AF} \; \frac{KE}{FK} = \left(\frac{EI_A}{FI_A}\right)^2, \quad \frac{BF}{BD} \; \frac{LF}{DL} = \Bigg(\frac{F}{D}$$

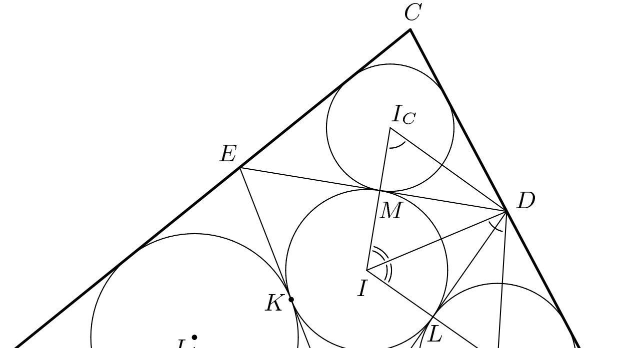
Ponieważ $EM=KE$, $FK=LF$ oraz $DL=MD$, więc mnożąc stron
wyższe zależności otrzymujemy

$$(4) \quad \frac{CD}{CE} \; \frac{AE}{AF} \; \frac{BF}{BD} = \left(\frac{DI_C}{EI_C} \; \frac{EI_A}{FI_A} \; \frac{FI_B}{DI_B}\right)^2 = \left(\frac{DI_C}{DI_B}\right)^2 \; \left(\frac{EI_A}{EI_C}\right)^2 \; \Bigg(\frac{}{}$$

Dalej zauważamy, że

$$2(\sphericalangle MDI_C + \sphericalangle I_BDI) = 2\sphericalangle MDI_C + 2\sphericalangle LDI + 2\sphericalangle I_BDL = 180$$

skąd $\sphericalangle I_BDI = 90^\circ \quad \sphericalangle MDI_C = \sphericalangle II_CD$. Ponadto $\sphericalangle I_BID = \sphericalangle DM$
tatnich dwóch równości wynika, że trójkąty IDI_B oraz II_CD są po



Uzyskujemy zatem następujące proporcje:

$$\frac{DI_C}{DI_B} = \frac{II_C}{ID} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{DI_C}{DI_B} = \frac{ID}{II_B}.$$

Mnożąc je stronami dostajemy $\left(\frac{DI_C}{DI_B}\right)^2 = \frac{II_C}{II_B}$. Analogicznie dowod

$$\left(\frac{EI_A}{EI_C}\right)^2 = \frac{II_A}{II_C} \qquad \text{oraz} \qquad \left(\frac{FI_B}{FI_A}\right)^2 = \frac{II_B}{II_A}.$$

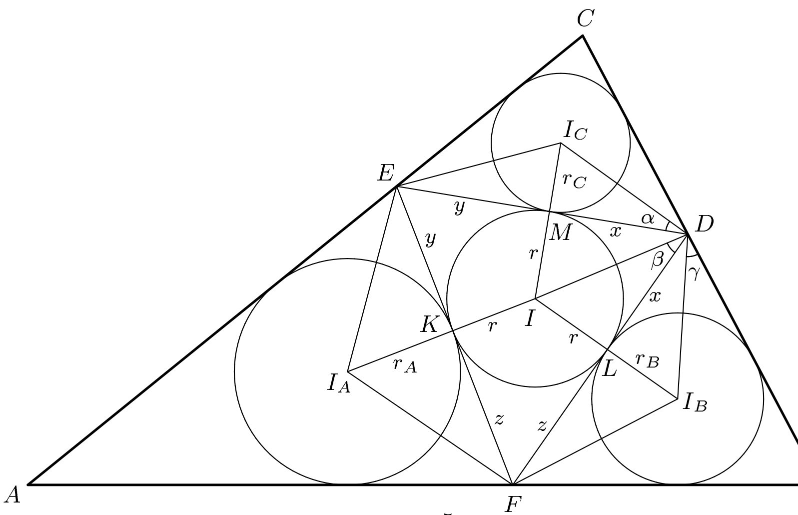
Łącząc ze sobą trzy ostatnie równości oraz zależność (4) otrzymujem

$$\frac{CD}{CE} \cdot \frac{AE}{AF} \cdot \frac{BF}{BD} = \frac{II_C}{II_B} \cdot \frac{II_A}{II_C} \cdot \frac{II_B}{II_A} = 1,$$

skąd, na mocy twierdzenia Cevy (zob. str. 120), odcinki AD, BE, C cinają się w jednym punkcie.

Sposób IV

Przyjmijmy takie same oznaczenia jak w sposobie III. Niech r_A, r_B, r_C, r będą odpowiednio promieniami okręgów wpisanych kąty AEF, BFD, CDE, DEF oraz niech $x = DL = DM$, $y = EM$ $z = FK = FL$, $\alpha = \sphericalangle MDI_C$, $\beta = \sphericalangle IDM = \sphericalangle IDL$, $\gamma = \sphericalangle I_BDL$ (ry



rys. 5

Ponieważ $\sphericalangle CDE + \sphericalangle EDF + \sphericalangle FDB = 180^\circ$, więc $\alpha + \beta + \gamma = 9$ otrzymujemy równości: $\operatorname{ctg}(\beta+\gamma) = \operatorname{ctg}(90^\circ \quad \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$. Przekształca noważnie ostatni związek dostajemy kolejno:

skąd $x^2 = r(r_B + r_C) + r_B r_C$. Analogicznie obliczamy:
$$y^2 = r(r_C + r_A) + r_C r_A \qquad \text{oraz} \qquad z^2 = r(r_A + r_B) + r_A r_B\,.$$
Korzystając z lematu oraz z powyższych trzech wzorów otrzymujem
$$\frac{EC}{CD}\,\frac{y}{x} = \frac{y^2 + r_C^2}{x^2 + r_C^2} = \frac{r(r_C + r_A) + r_C r_A + r_C^2}{r(r_B + r_C) + r_B r_C + r_C^2} =$$
$$= \frac{(r + r_C)(r_C + r_A)}{(r + r_C)(r_C + r_B)} = \frac{r_C + r_A}{r_C + r_B}$$
W ten sam sposób dowodzimy, że
$$\frac{DB}{BF}\,\frac{x}{z} = \frac{r_B + r_C}{r_B + r_A} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{FA}{AE}\,\frac{z}{y} = \frac{r_A + r_B}{r_A + r_C}.$$
Mnożąc stronami trzy ostatnie równości dostajemy
$$\frac{EC}{CD}\,\frac{DB}{BF}\,\frac{FA}{AE} = \frac{r_C + r_A}{r_C + r_B}\,\frac{r_B + r_C}{r_B + r_A}\,\frac{r_A + r_B}{r_A + r_C} = 1,$$
skąd, na mocy twierdzenia Cevy (zob. str. 120), odcinki AD, BE, C
cinają się w jednym punkcie.

Zadanie **10.** Dana jest liczba $x_1 > 0$. Ciąg (x_n) jest zde niowany wzorem
$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \qquad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots\,.$$
Udowodnić, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$, i obliczyć ją.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego twierdzenia:

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g, to ciąg (b_n), określony wz
$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$
jest również zbieżny i jego granica wynosi g.

Dowód tego twierdzenia znajduje się w *Dodatku*, str. 116.

Podstawmy $y_n = x_n^3$. Wtedy
$$y_{n+1} = y_n\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^3 = y_n + 3 + \frac{3}{y_n} + \frac{1}{y_n^2}\,.$$
Skoro $y_{n+1} > y_n + 3$, więc ciąg (y_n) jest rozbieżny do nieskończon
tem na mocy powyższej równości $(y_{n+1} \quad y_n) \to 3$. Z ostatniej zbieżn
z zacytowanego wyżej twierdzenia zastosowanego do ciągu
$$a_n = \begin{cases} y_1 & \text{dla} \quad n = 1 \\ y_n \quad y_{n\ 1} & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$$
otrzymujemy

Zadanie **11.** W urnie znajdują się dwie kule: biała i czarna. Ponadto dyspozycji 50 kul białych i 50 czarnych. Wykonujemy 50 stępującą czynność: losujemy z urny kulę, a następnie wrz z powrotem do urny oraz dokładamy jedną kulę tego sam ru, co wylosowana kula. Po zakończeniu tych czynności m w urnie 52 kule. Jaka liczba kul białych znajdujących się w najbardziej prawdopodobna?

Rozwiązanie

Niech $P(k,n)$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, oznacza prawdopodobieństwo zd że gdy w urnie jest n kul, to dokładnie k z nich ma kolor biały. Udow że

$$(1) \qquad P(1,2) = 1 \quad \text{oraz} \quad P(k,n+1) = \frac{n-k}{n} P(k,n) + \frac{k-1}{n} P(k-1,n$$

Pierwsza z powyższych równości jest oczywista. Druga wynika z na cych rozważań.

Zastanawiamy się, kiedy po dołożeniu $(n+1)$-szej kuli do urny jącej n kul w urnie znajdzie się dokładnie k kul białych. Jest to w następujących dwóch sytuacjach:

(a) *Jako $(n+1)$-szą kulę dołożono kulę czarną.* Wówczas przed niem tej kuli musiało być w urnie k kul białych. Prawdopodobieńs zdarzenia wynosi $P(k,n)$. Kulę czarną wylosowano więc z prawdop stwem $\frac{n-k}{n}$. Zatem prawdopodobieństwo tego, że w urnie zawierają kul dokładnie k jest białych, pod warunkiem, że ostatnia dorzucona *czarna*, wynosi

$$\frac{n-k}{n} P(k,n).$$

(b) *Jako $(n+1)$-szą kulę dołożono kulę białą.* Wówczas przed do tej kuli musiało być w urnie dokładnie $k-1$ kul białych. Prawdopodo tego zdarzenia wynosi $P(k-1,n)$. Kulę białą wylosowano więc z pr dobieństwem $\frac{k-1}{n}$. Stąd prawdopodobieństwo tego, że w urnie zaw $n+1$ kul dokładnie k jest białych, pod warunkiem, że ostatnia d kula jest *biała*, wynosi

$$\frac{k-1}{n} P(k-1,n).$$

Łącząc ze sobą dwa powyższe przypadki dostajemy drugą z równ

Korzystając ze wzorów (1) dowodzimy indukcyjnie (ze względu to dla $k=1,2,\ldots,n$ mamy

$$P(k,n{+}1)=\frac{n\quad k}{n}P(k,n)+\frac{k\quad 1}{n}P(k\quad 1,n)=\frac{n\quad k}{n}\;\frac{1}{n\quad 1}+\frac{k\quad 1}{n}\;\frac{}{n}$$

W szczególności

$$P(k,52)=\frac{1}{51}\qquad \text{dla}\ \ k=1,2,\ldots,51.$$

Zatem każda możliwa liczba kul białych po 50 losowaniach (od 1 do
jednakowo prawdopodobna.

Zadanie **12.** Wszystkie wierzchołki sześcianu o krawędzi a leżą na po
czworościanu foremnego o krawędzi 1. Wyznaczyć możliwe w

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że dany sześcian $ABCDA'B'C'D'$
wnątrz danego czworościanu $KLMN$. Możliwe są dwa przypadki:

(a) Istnieje ściana czworościanu $KLMN$ (na przykład KLM),
leżą co najmniej trzy wierzchołki sześcianu;

(b) Na każdej ścianie czworościanu $KLMN$ leżą dokładnie dwa w
ki sześcianu.

Rozważmy najpierw przypadek (a). Trzy wierzchołki sześcianu,
żą na ścianie KLM, muszą być wierzchołkami jednej ściany tego s
To oznacza, że pewna ściana sześcianu, powiedzmy $ABCD$, leży w
trójkąta KLM; pozostałe cztery wierzchołki A', B', C', D' znajdu
ścianach KLN, LMN, MKN. Bez straty ogólności możemy przyjąć
na KLN zawiera któreś dwa spośród punktów A', B', C', D'. Muszą
dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $A'B'C'D'$. Nie tracąc o
rozważań, możemy przyjąć, że punkty A', B' leżą na ścianie KLN,
leży na ścianie LMN, zaś punkt D' znajduje się na ścianie MKN (

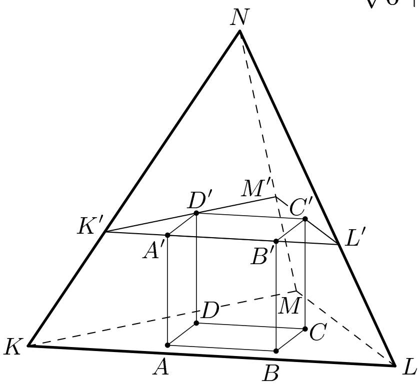
Warunek (a) wyznacza więc jednoznacznie (z dokładnością do
tych oznaczeń) położenie danego sześcianu wewnątrz czworościanu fo
o krawędzi 1. Przystępujemy do wyznaczenia długości krawędzi a.

Oznaczmy przez K', L', M', odpowiednio punkty przecięcia
KN, LN, MN z płaszczyzną $A'B'C'D'$. Czworościan $K'L'M'N$ jest
Oznaczmy jego krawędź przez b. Wtedy $K'A'=B'L'=(a\sqrt{3})/3$, sk

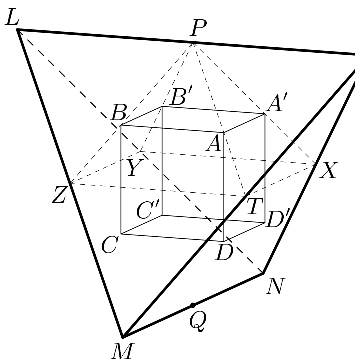
$$b=a+\frac{2\sqrt{3}}{3}a. \tag{1}$$

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi λ wyraża się wzorem skąd wykorzystując równość (1) mamy

$$a=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2\sqrt{2}+3}\,.$$



rys. 1



rys. 2

Pozostał do rozpatrzenia przypadek (b).

Każdy z czterech odcinków łączących wierzchołki danego sześcian na tej samej ścianie czworościanu $KLMN$, jest krawędzią tego s Odcinki te nie mają wspólnych końców. Przypuśćmy, że krawędź na ścianie KLM. Wówczas jedna z krawędzi $A'B'$ lub CD leży na ścian KLN, LMN, MKN. Bez straty ogólności przyjmijmy, że A na KLN. Wtedy proste AB i $A'B'$ są równoległe do krawędzi KL tym idzie, proste CD i $C'D'$ są prostopadłe do krawędzi MN; nie m one leżeć na ścianach LMN i KMN. Możemy zatem założyć, że CC' leży na ścianie LMN, zaś odcinek DD' znajduje się na ściani (rys. 2).

Oznaczmy przez X, Y, Z, T odpowiednio środki krawędzi KN, N MK. Wówczas kwadraty $A'B'BA$ oraz $D'C'CD$ mają boki równol powiednio do boków kwadratu $XYZT$. Stąd istnieje (w przestrzeni jednokładności P kwadratów $A'B'BA$ i $XYZT$, leżący na krawędzi środek jednokładności Q kwadratów $D'C'CD$ i $XYZT$, leżący na MN. Skale jednokładności w obu przypadkach są równe i wynoszą 2 głości od punktów P i Q do płaszczyzny $XYZT$ są równe i wynosz Stąd wynika, że odległości od płaszczyzn $A'B'BA$ i $D'C'CD$ do pła $XYZT$ są równe — a więc każda z nich wynosi $a/2$. Te trzy wie związane ze sobą zależnością

Reasumując: możliwe wartości a wynoszą

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2\sqrt{2}+3} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

Zawody stopnia drugiego

Zadanie **1.** Dana jest funkcja $f\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ taka, że $f(\frac{1}{n}) = (\ \ 1)^{\ n}$ dla n
Wykazać, że nie istnieją funkcje rosnące $g\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, $h\colon\langle 0,1\rangle$
których $f = g \ \ h$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieją funkcje g i h spełniające warunki zadani
waż funkcje te są rosnące, więc dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} g(\tfrac{1}{2k+1}) &= f(\tfrac{1}{2k+1}) + h(\tfrac{1}{2k+1}) = \ \ 1 + h(\tfrac{1}{2k+1}) < \\ &< \ \ 1 + h(\tfrac{1}{2k}) = 1 + h(\tfrac{1}{2k}) \ \ 2 = \\ &= f(\tfrac{1}{2k}) + h(\tfrac{1}{2k}) \ \ 2 = g(\tfrac{1}{2k}) \ \ 2 < g(\tfrac{1}{2k\ \ 1}) \ \ 2. \end{aligned}$$

Z monotoniczności funkcji g oraz powyższych nierówności dostajem

$$g(0) < g(\tfrac{1}{2k+1}) < g(\tfrac{1}{2k\ \ 1}) \ \ 2 < g(\tfrac{1}{2k\ \ 3}) \ \ 4 < \ldots < g(\tfrac{1}{3}) \ \ 2(k \ \ 1) < g$$

Zatem $g(1) \ \ g(0) > 2k$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, co nie jest możliwe.

Uwaga

Zadanie wiąże się z pojęciem funkcji o wahaniu ograniczonym.
że funkcja $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ ma *wahanie ograniczone*, jeżeli istnieje taka l
że dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnych liczb rzeczywistych

$$a \leqslant x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n \leqslant b$$

zachodzi nierówność

$$|f(y_1) \ \ f(x_1)| + |f(y_2) \ \ f(x_2)| + \ldots + |f(y_n) \ \ f(x_n)| < M\,.$$

Funkcje, które nie spełniają powyższego warunku, nazywamy funkcja
haniu nieograniczonym.

Zauważmy, że dana w treści zadania funkcja f ma wahanie nieogra
Wystarczy bowiem przyjąć

$$x_k = \frac{1}{2n \ \ 2k+2} \qquad \text{oraz} \qquad y_k = \frac{1}{2n \ \ 2k+1} \qquad \text{dla} \ \ k = 1,2,\ldots,$$

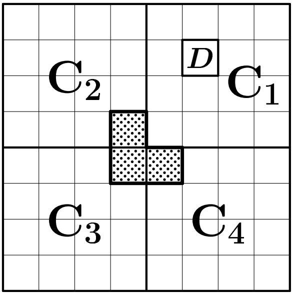
Wówczas $0 \leqslant x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n \leqslant 1$ oraz

Zadanie **2.** Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów kowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunię ścianu S jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednos Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spoś sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się wypełnić klockami.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n=1$ teza zadania jest oc prawdziwa.

Niech n będzie liczbą naturalną, dla której teza zadania jest pra Rozważmy sześcian C o krawędzi 2^{n+1} z wyróżnionym sześcianem je wym D. Sześcian C dzielimy na osiem przystających sześcianów C_1,C każdy o krawędzi 2^n. W jednym z nich (przyjmijmy, że w C_1) zna sześcian jednostkowy D. Połóżmy klocek K w samym środku szes tak, aby jego część wspólna z każdym z sześcianów $C_2,C_3,\ldots,C_8$ ścianem jednostkowym (analogiczna sytuacja przedstawiona jest w przypadku dwuwymiarowym).



rys. 1

Na mocy założenia indukcyjnego można wypełnić klockami zaró ścian C_1 z usuniętym sześcianem jednostkowym D, jak i każdy z nów $C_2,C_3,\ldots,C_8$ z usuniętym sześcianem jednostkowym stanowiący wspólną z klockiem K.

W ten sposób wypełnimy klockami sześcian C z usuniętym sz jednostkowym D, co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **3.** Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty

Rozwiązanie

Sposób I

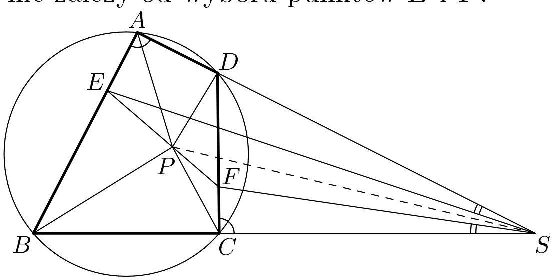
Załóżmy najpierw, że proste AD i BC nie są równoległe i pr
się w punkcie S (rys. 1). Ponieważ $\sphericalangle BAS = 180^\circ \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle DC$
trójkąty ASB i CSD są podobne. Ponadto

$$\frac{AB}{AE} = 1 + \frac{EB}{AE} = 1 + \frac{FD}{CF} = \frac{CD}{CF}, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CD} = \frac{A}{C}$$

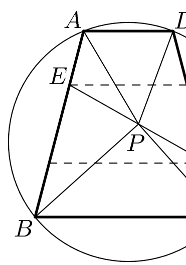
Z powyższych związków oraz z równości $\sphericalangle EAS = \sphericalangle FCS$ wynika, że
ASE i CSF są podobne. Stąd $\sphericalangle DSE = \sphericalangle CSF$ oraz

$$\frac{SE}{SF} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD} = \frac{EP}{PF},$$

co dowodzi, że $\sphericalangle ESP = \sphericalangle FSP$. Zatem punkt P leży na dwusiecz
ASB, czyli jest on równoodległy od prostych AD i BC. Stosunek
kątów APD i BPC jest więc równy stosunkowi długości boków A
czyli nie zależy od wyboru punktów E i F.



rys. 1



rys. 2

Załóżmy teraz, że proste AD i BC są równoległe (rys. 2). Wtedy
kąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, gdzie $AB = CD$. Punk
więc środkiem odcinka EF, co oznacza, że jest on równoodległy
stych przechodzących przez punkty E, F i równoległych do podstaw
$ABCD$. Ponadto $BE = DF$, skąd wynika, że punkty E i F są je
odległe odpowiednio od prostych BC i AD. Zatem odległości od p
do prostych BC i AD są takie same. Tym samym stosunek pól t
APD i BPC jest równy stosunkowi długości odcinków AD i BC,
zależy od wyboru punktów E i F.

Sposób II

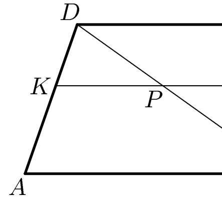
Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Prosta równo

Dowód

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnej BC z odcinkiem K
czas na mocy twierdzenia Talesa



rys. 3

$$KP=\frac{DP}{BD}\quad AB=\frac{LC}{BC}\quad AB$$

oraz

$$PL=\frac{BP}{BD}\quad CD=\frac{LB}{BC}\quad CD.$$

Dodając stronami powyższe równości dostajemy tezę.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Ponieważ $AE:EB=CF:FD$, więc

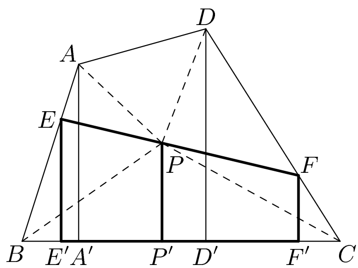
(1) $$\frac{AE}{AB}=\frac{CF}{CD}=\lambda \qquad \text{oraz} \qquad \frac{BE}{AB}=\frac{FD}{CD}=\mu.$$

Z warunku $EP:PF=AB:CD$ wynika natomiast, że

(2) $$\frac{EP}{EF}=\frac{AB}{AB+CD} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{PF}{EF}=\frac{CD}{AB+CD}.$$

Oznaczmy przez A', D', E', F', P' odpowiednio rzuty prostokąt
tów A, D, E, F, P na prostą BC (rys. 4). Na mocy udowodnione
lematu oraz równości (2) otrzymujemy

$$PP'=\frac{EP}{EF}\quad FF'+\frac{FP}{EF}\quad EE'=\frac{AB}{AB+CD}\quad FF'+\frac{CD}{AB+CD}\quad E$$



rys. 4

Korzystając z twierdzenia Talesa oraz równości (1) uzyskujemy

$$PP'=\frac{\lambda \quad AB}{AB+CD}\quad DD'+\frac{\mu \quad CD}{AB+CD}\quad AA'$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez $\frac{1}{2}BC$ mamy

(3) $$[BPC]=\frac{\lambda \quad AB}{}\quad [BCD]+\frac{\mu \quad CD}{}\quad [BCA]$$

Wprowadźmy dla zwięzłości zapisu następujące oznaczenia:

$$\alpha = \sphericalangle DAB, \quad \beta = \sphericalangle ABC, \quad \gamma = \sphericalangle BCD, \quad \delta = \sphericalangle CDA.$$

Ponieważ na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, więc $\sin\alpha = \mathrm{s}$
$\sin\beta = \sin\delta$. Stąd oraz z równości (3) i (4) otrzymujemy

$$\frac{[APD]}{[BPC]} = \frac{\mu \quad AB \quad [ADC] + \lambda \quad CD \quad [ADB]}{\lambda \quad AB \quad [BCD] + \mu \quad CD \quad [BCA]}$$

$$= \frac{\mu \quad AB \quad AD \quad CD \quad \sin\delta + \lambda \quad CD \quad AB \quad AD}{\lambda \quad AB \quad BC \quad CD \quad \sin\gamma + \mu \quad CD \quad AB \quad BC}$$

$$= \frac{AB \quad AD \quad CD \quad (\mu\sin\delta + \lambda\sin\alpha) AD}{AB \quad BC \quad CD \quad (\lambda\sin\gamma + \mu\sin\beta) BC}.$$

Otrzymana wielkość nie zależy od wyboru punktów E, F, co kończy

Zadanie **4.** Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki:

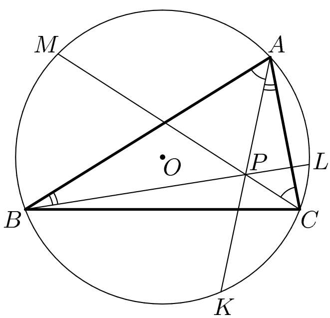
(1) $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCA$ oraz $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBA$.

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.
że jeżeli $O \neq P$, to kąt APO jest prosty.

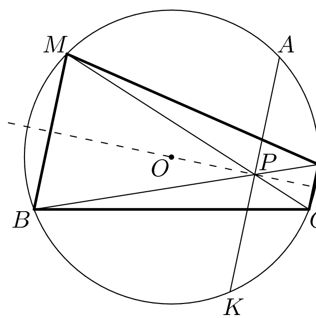
Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez K, L, M odpowiednio punkty przecięcia prost
BP, CP z okręgiem opisanym na trójkącie ABC (rys. 1). Na mocy
$\sphericalangle BAK = \sphericalangle ACM$ długości łuków BK i AM są równe. Analogicznie,
łuków KC i LA są równe. (Długość łuku XY jest mierzona od punk
punktu Y w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).



rys. 1

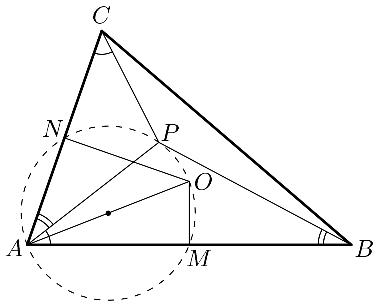


rys. 2

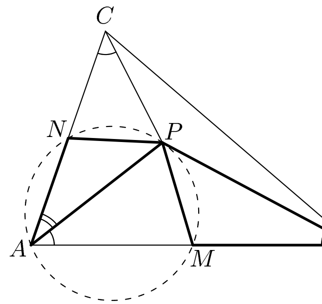
Odcinki LC, AK, MB są więc równoległe (rys. 2). Zatem mają o

Sposób II

Niech M i N będą odpowiednio środkami boków AB i AC (rys
nieważ $\sphericalangle ANO = \sphericalangle AMO = 90^\circ$, więc *okrąg opisany na trójkącie AM*
chodzi przez punkt O (średnicą tego okręgu jest odcinek AO). Wyka
punkt P leży na tym okręgu.



rys. 3



rys. 4

Na mocy równości (1), trójkąty ABP oraz CAP są podobne. Za

$$\frac{BM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AP}.$$

Ponadto $\sphericalangle MBP = \sphericalangle NAP$. Tożsamości te dowodzą, że trójkąty M
NAP są podobne (rys. 4). Stąd $\sphericalangle BMP = \sphericalangle ANP$, czyli

$$\sphericalangle AMP + \sphericalangle ANP = 180^\circ.$$

Powyższa równość oznacza, że *okrąg opisany na trójkącie AMN p*
przez punkt P. Zatem punkty A, M, O, P, N leżą na jednym okręg

$$\sphericalangle APO = \sphericalangle ANO = 90^\circ.$$

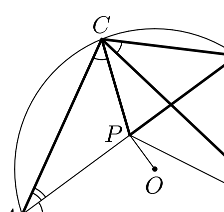
Sposób III

Niech prosta AP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w pu
(rys. 5). Wówczas zachodzą równości:

(2) $\qquad \sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAQ = \sphericalangle ACP, \qquad$ skąd $\qquad \sphericalangle PCQ = \sphericalangle ACB.$

Mamy ponadto następujące zależności:

(3) $\qquad \sphericalangle PQC = \sphericalangle AQC = \sphericalangle ABC.$



Z drugiej równości (2) oraz z tożsamości (3) wynika, że trójkąty ABC i PQC są podobne. Podobne są również trójkąty APC oraz ABP. Stąd

Zadanie **5.** Niech $S=\{1,2,3,4,5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon S\to S$ s
cych równość $f^{50}(x)=x$ dla wszystkich $x\in S$.

Uwaga: $f^{50}(x)=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{50}(x)$.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech f będzie funkcją spełniającą warunki zadania. Dla liczb $x\neq$
jemy $f^{49}(f(x))=x\neq y=f^{49}(f(y))$, skąd $f(x)\neq f(y)$. Ponieważ f
nież funkcją „na”, więc f jest permutacją zbioru S. Oznaczmy pr
$(x\in S)$ najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, dla której $f^{r(x)}(x)=$
czas $r(x)\leqslant 5$ oraz $r(x)|50$, skąd $r(x)\in\{1,2,5\}$.

Jeżeli istnieje taka liczba $a\in S$, że $r(a)=5$, to liczby a, $f(a)$, $f^2($
$f^4(a)$ są różne — wyczerpują więc zbiór S. Wtedy dla dowolnej liczb
$r(x)=5$. Funkcja f jest więc jednoznacznie wyznaczona przez pe
$(f(1),f^2(1),f^3(1),f^4(1))$ zbioru $\{2,3,4,5\}$; zatem może być ona okre
$4!=$**24** sposoby.

Jeżeli dla wszystkich $x\in S$ zachodzi $r(x)=1$, to f jest funkcją i
nościową. Taka funkcja jest **jedna**.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym największa wartoś
na przez funkcję r wynosi 2. Niech więc a będzie takim elementem z
że $r(a)=2$. Wtedy także $r(b)=2$, gdzie $b=f(a)$.

Jeżeli $r(x)=1$ dla wszystkich $x\in S\setminus\{a,b\}$, to f jest wyznaczo
wybór dwuelementowego podzbioru $\{a,b\}$ zbioru S, co można uc
$\binom{5}{2}=$**10** sposobów.

Jeżeli natomiast istnieje taka liczba $c\in S\setminus\{a,b\}$, że $r(c)=2$, to prz
$d=f(c)$ oraz oznaczając przez e jedyny element zbioru $S\setminus\{a,b,c,d\}$

$$(1)\qquad f(a)=b,\quad f(b)=a,\quad f(c)=d,\quad f(d)=c,\quad f(e)=e.$$

Taka funkcja f jest wyznaczona przez wybór liczby e (można to z
5 sposobów) oraz podział zbioru $S\setminus\{e\}$ na dwa podzbiory dwuele
$\{a,b\}$ i $\{c,d\}$ (istnieją 3 takie podziały). Dostajemy więc **15** funkc
ci (1).

Łącznie istnieje **50** funkcji spełniających warunki zadania.

Sposób II

Zamiast liczyć permutacje zbioru pięcioelementowego spełniające
podany w zadaniu, można policzyć te permutacje, które go nie speł

Rozumowanie analogiczne do tego w sposobie I dowodzi, że są te

$$(4) \qquad f(a)=b, \quad f(b)=c, \quad f(c)=d, \quad f(d)=a, \quad f(e)=e,$$

gdzie $\{1,2,3,4,5\}=\{a,b,c,d,e\}$.

Liczby a, b, c ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ można wybrać na $\binom{5}{3}=10$ sp
zaś ustawić cyklicznie na 2 sposoby. Zatem istnieje **20** permutacji po
oraz **20** permutacji postaci (3).

Podobnie, liczby a, b, c, d ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ można wybrać n
sposobów, zaś ustawić cyklicznie na 6 sposobów. Zatem istnieje **30** pe
postaci (4).

Stąd wynika, że istnieje **70** permutacji nie spełniających warun
dania, a więc z ogólnej liczby $\mathbf{5!=120}$ permutacji pozostaje **50** sz
permutacji.

Zadanie **6.** Dana jest liczba naturalna $k\geqslant 2$ oraz liczby całkowite a_1
spełniające warunki

$$a_1+2^i a_2+3^i a_3+\ldots+n^i a_n=0 \qquad \text{dla} \;\; i=1,2,\ldots,k$$

Dowieść, że liczba $a_1+2^k a_2+3^k a_3+\ldots+n^k a_n$ jest podzielna

Rozwiązanie

Dla dowolnej liczby całkowitej $m\geqslant k$ liczba $\binom{m}{k}$ jest całkowita. S
dowolnej liczby całkowitej dodatniej m, liczba $m(m\;\;1)(m\;\;2)\ldots($
jest podzielna przez $k!$. Istnieją więc takie liczby całkowite $b_1,b_2,\ldots$
dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m,

$$m^k\equiv b_1 m+b_2 m^2+\ldots+b_{k\;\,1}\, m^{k\;\,1} \pmod{k!}.$$

Mnożąc powyższą kongruencję przez a_m, a następnie dodając stro
$m=1$ do $m=n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_1+2^k a_2+\ldots+n^k a_n \equiv b_1(a_1+2a_2+\ldots+na_n)+ & \\ +b_2(a_1+2^2 a_2+\ldots+n^2 a_n)+\ldots & \\ \ldots+b_{k\;\,1}\,(a_1+2^{k\;\,1}\,a_2+\ldots+n^{k\;\,1}\,a & \\ =0 \pmod{k!}. & \end{aligned}$$

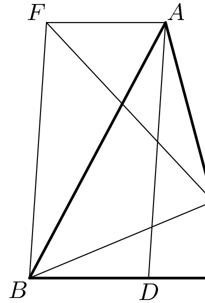
To oznacza, że liczba $a_1+2^k a_2+3^k a_3+\ldots+n^k a_n$ jest podzielna prz
kończy rozwiązanie zadania.

Zawody stopnia trzeciego

Zadanie **1.** Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, przy czym A

Rozwiązanie

Sposób I



rys. 1

Uzupełniamy trójkąt BDA do równoległoboku $BDAF$ (rys. 1). Na półprostej $BC^{\to}$ odkładamy odcinek BK o długości AD. Dana w zadaniu zależność przyjmuje teraz postać

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{CK}.$$

Z tej równości oraz z równoległości odcinków CK i AF wynika, że punkty F, E, K są współliniowe.

Punkt E leży więc na podstawie KF trójkąta równoramienneg
Stąd dostajemy $BF > BE$, czyli $AD > BE$.

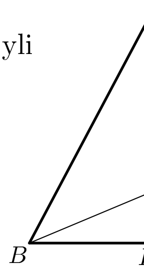
Sposób II

Skorzystamy z nierówności Ptolemeusza, która mówi, że *dla d*
punktów A, B, C, D leżących na płaszczyźnie zachodzi

$$AC\;\;BD \leqslant CD\;\;AB + AD\;\;BC,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A,
leżą, w tej właśnie kolejności, na jednym okręgu.

(Dowód znajduje się w broszurze *XLVI Olimpiada Matematyczn*
wozdanie Komitetu Głównego, Warszawa 1996, str. 96).



rys.

Stosując zacytowaną nierówność do punktów A, B, C, E otrzymujemy $AC\;\;BE < AE\;\;BC + EC\;\;AB$, czyli

$$BE < \frac{AE}{AC}\;\;BC + \frac{EC}{AC}\;\;AB. \qquad (2)$$

Korzystając ze związku (1) otrzymujemy następujące równości:

$$\frac{AC}{AE} = 1 + \frac{EC}{AE} = 1 + \frac{AD\;\;BC}{BD},$$

skąd dostajemy

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BD}{AD\;\;BC + BD} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{EC}{AC} = 1\;\;\frac{AE}{AC} = \frac{AD\;\;B}{AD\;\;BC+}$$

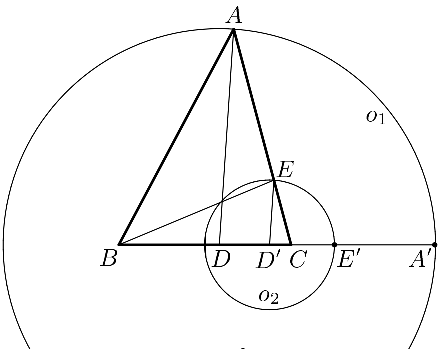
Na mocy nierówności (2) oraz powyższych zależności mamy

$$BE < \frac{BC\;\;BD}{AD\;\;BC + BD} + \frac{(AD\;\;BC)\;\;AB}{AD\;\;BC + BD} <$$

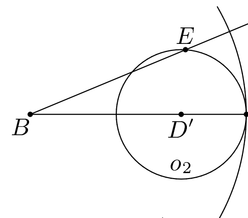
Sposób III

Niech o_1 będzie okręgiem o środku D i promieniu AD (rys. 3). P
$AD > BC$, więc okrąg ten przecina półprostą $BC^{\rightarrow}$ tylko w jednym
nazwijmy go A'. Z nierówności $AD > BC$ wynika również, że punk
A' leżą w tej właśnie kolejności na prostej BC.

Oznaczmy przez o_2 okrąg będący obrazem okręgu o_1 przy jednokła
o środku C i skali $\lambda = EC : AC$. Wówczas $E = j(A)$. Ponadto punkt E
leży pomiędzy punktami C i A', jak również środek D' okręgu o_2
między punktami D i C. Zatem punkt D' leży pomiędzy punktam
To natomiast oznacza, że okrąg o środku B i promieniu BE' jest
wewnętrznie do okręgu o_2 (rys. 4). Wniosek: $BE < BE'$.



rys. 3



rys. 4

Z powyższych rozważań wnioskujemy, że punkty B, D, C, E', A
prostej BC w tej właśnie kolejności.

Na mocy równości (1) skala jednokładności j jest równa

$$\lambda = \frac{EC}{AC} = \frac{AD \quad BC}{AD \quad BC + BD} = \frac{A'D \quad BC}{A'D \quad BC + BD} = \frac{A'C \quad BD}{A'C}$$

Stąd dostajemy

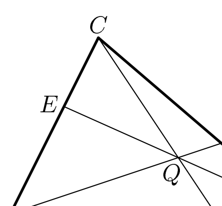
$$BE < BE' = BC + CE' = BC + \lambda \quad A'C = BC + A'C \quad BD = A'D =$$

Sposób IV

Wykorzystamy następujące

Twierdzenie (*Van Aubela*):

Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach
BC, CA, AB dowolnego trójkąta ABC (rys. 5).
Odcinki AD, BE, CF przecinają się w punkcie Q.
Wówczas



Oznaczmy przez P punkt przecięcia odcinków AD i BE (rys. 6
prosta CP przecina bok AB w punkcie F. Na mocy twierdzenia Var
oraz równości (1) otrzymujemy

$$\frac{CP}{PF} = \frac{CE}{EA} + \frac{CD}{DB} = \frac{AD \quad BC}{DB} + \frac{CD}{DB} = \frac{AD \quad BD}{DB}.$$

Dodając do obu stron powyższej równości liczbę 1 dostajemy

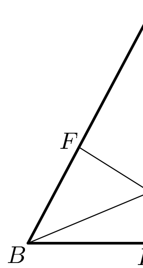
$$(4) \qquad \frac{CF}{PF} = \frac{AD}{DB}.$$

Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ. Z równości

$$\frac{[BCP]}{[ABC]} + \frac{[CAP]}{[ABC]} + \frac{[ABP]}{[ABC]} = 1$$

otrzymujemy związek

$$\frac{PD}{AD} + \frac{PF}{CF} = 1 \quad \frac{PE}{BE}.$$



rys.

Na mocy równości (4) powyższa równość przybiera postać

$$\frac{PD}{AD} + \frac{BD}{AD} = \frac{BE \quad PE}{BE}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{PD+BD}{AD} = \frac{BP}{BE}.$$

Z nierówności trójkąta PDB dostajemy ostatecznie

$$\frac{BP}{AD} < \frac{PD+BD}{AD} = \frac{BP}{BE},$$

skąd $AD > BE$.

Uwaga

Po zawodach wielu uczestników skarżyło się, że dana w treści zad
leżność (1) jest „sztuczna" i dlatego zadanie to sprawiło im sporo t
(por. tabela w części sprawozdawczej). Nasuwa się więc pytanie: Cz
warunek (1) zastąpić innym, równoważnym, a przy tym „bardziej
nym"? Odpowiedź daje następujący

Fakt

Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, przy czym $AD > BC$
E leży na boku AC. Odcinki AD, BE przecinają się w punkcie P. W

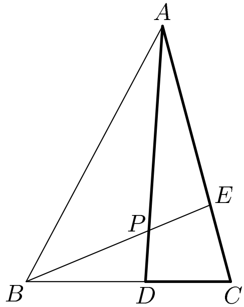
$$\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{AD \quad BC} \quad \Leftrightarrow \quad AP = BC.$$

Dowód faktu

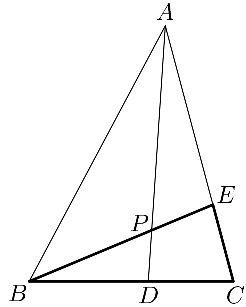
Zatem

$$\frac{AE}{EC}=\frac{BD}{AD\quad BC}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{BD}{AD\quad BC}\;\;\frac{BC}{BD}\;\;\frac{DP}{AP}=1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{DP}{AP}=\frac{AD}{}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{DP}{AP}+1=\frac{AD}{BC}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{AD}{AP}=\frac{AD}{BC}\quad\Leftrightarrow\quad AP=BC.$$



rys. 7



rys. 8

Sposób V

Korzystając z wyżej udowodnionego faktu, równość (1) możemy p
w postaci

$$\frac{EC}{AE}=\frac{PD}{BD}. \tag{5}$$

Stosując twierdzenie Menelausa do trójkąta EBC (rys. 8) otrzymuj

$$\frac{EP}{PB}\;\;\frac{BD}{DC}\;\;\frac{CA}{AE}=1,\qquad\text{czyli}\qquad\frac{EP}{PB}\;\;\frac{BD}{DC}+\frac{EP}{PB}\;\;\frac{BD}{DC}\;\;\frac{EC}{AE}=$$

Na mocy równości (5) ostatnia zależność przybiera postać

$$\frac{EP}{PB}\;\;\frac{BD}{DC}+\frac{EP}{PB}\;\;\frac{PD}{DC}=1,$$

skąd

$$\frac{EP}{DC}=\frac{PB}{BD+PD}<1.$$

Zatem $EP<DC$ oraz $PB<BD+PD$. Dodając stronami dwie
nierówności otrzymujemy $BE<BC+PD=AD$.

Zadanie **2.** Dane są liczby całkowite nieujemne $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{101}$
od 5050. Dowieść, że spośród nich można wybrać takie czt
a_k, a_l, a_m, a_n, że liczba $a_k+a_l\ \ a_m\ \ a_n$ jest podzielna prz

Rozwiązanie

Rozważamy wszystkie wyrażenia postaci a_k+a_l, gdzie $1\leqslant k<l\leqslant$

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, w którym wszystkie powy
my dają różne reszty z dzielenia przez 5050. Wykażemy, że ten pr
zachodzić nie może. Gdyby bowiem tak było, to rozważane sumy d
wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 5050 — każdą jeden raz.

$$S = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 101} (a_k + a_l) \equiv \sum_{i=0}^{5049} i = \frac{5049 \quad 5050}{2} \equiv 2525 \quad (\mathrm{mod}\ 5050$$

co dowodzi, że S jest liczbą nieparzystą.

Z drugiej strony

$$S = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 101} (a_k + a_l) = 100 \sum_{k=1}^{101} a_k \ ,$$

co oznacza, że S jest liczba parzystą. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie **3.** Dowieść, że istnieją takie liczby naturalne $n_1 < n_2 < \ldots < n$

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = n_3 + S(n_3) = \ldots = n_{50} + S(n$$

gdzie $S(n)$ jest sumą cyfr liczby n.

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$a_1(k) \ = \ 10^{10^k+k+1} \quad 9 \quad 10^k = \underbrace{9999...99}_{10^k}1\underbrace{0000...00}_{k},$$

$$a_2(k) \ = \ 10^{10^k+k+1} = 1\underbrace{0000...00}_{10^k+k+1}.$$

Wówczas $a_1(k) + S(a_1(k)) = a_2(k) + S(a_2(k)) = 10^{10^k+k+1} + 1$. Okreś
by $k_0, k_1, k_2, \ldots$ wzorami:

$$k_0 = 0 \quad \text{ oraz } \quad k_{i+1} = 10^{k_i} + k_i + 2 \quad \text{dla} \ \ i \geqslant 0 \ .$$

Dla dowolnego ciągu $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5)$, gdzie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5 \in \{1,2\}$, prz

$$n_\varepsilon = \sum_{i=0}^{5} a_{\varepsilon_i}(k_i) \ .$$

Otrzymane w ten sposób 64 liczby n_ε są parami różne. Wykażem
wszystkich 64 ciągów ε wielkości $n_\varepsilon + S(n_\varepsilon)$ są jednakowe.

Ponieważ dla $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ liczba $a_{\varepsilon_i}(k_i)$ jest co najwyżej k_{i+1}
i ma co najmniej k_i zer końcowych, więc żadne dwie z liczb $a_{\varepsilon_i}(k_i)$

Zatem

$$n_\varepsilon + S(n_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{5} (a_{\varepsilon_i}(k_i) + S(a_{\varepsilon_i}(k_i))) = 6 + \sum_{i=0}^{5} 10^{10^{k_i}+k_i+1},$$

co jest wielkością niezależną od ε.

Zadanie **4.** Rozstrzygnąć, dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 2$ układ rów

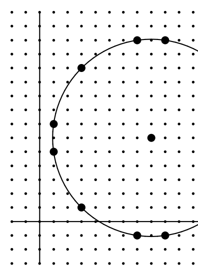
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2 \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3 \\ x_3^2 + x_4^2 + 50 = 16x_3 + 12x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n\ \ 1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n\ \ 1} + 12x_n \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Rozwiązanie

Równanie $x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2$ jest równoważne równaniu

$$(x_1\ \ \ 8)^2 + (x_2\ \ \ 6)^2 = 50.$$



Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają dany w treści zadania układ równań wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $(x_1,x_2), (x_2,x_3), \dots, (x_n,x_1)$ leżą na okręgu o środku $(8,6)$ i promieniu $\sqrt{50}$. Na tym okręgu leży 12 punktów o współrzędnych całkowitych (zob. rysunek obok): $(1,5)$, $(1,7)$, $(3,1)$, $(3,11)$, $(7,\ \ 1)$, $(7,13)$, $(9,\ \ 1)$, $(9,13)$, $(13,1)$, $(13,11)$, $(15,5)$, $(15,7)$.

Ponieważ każda z liczb x_i występuje raz jako odcięta, a raz jak punktu kratowego leżącego na tym okręgu, więc liczby x_i mogą prz tylko wartości 1, 7 lub 13. To pozostawia nam trzy możliwe układy (x_i, x_{i+1}), a mianowicie: $(1,7)$, $(7,13)$ lub $(13,1)$. Stąd wniosek, że w liczb $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będącym rozwiązaniem wyjściowego układu rów stępują cyklicznie liczby 1, 7, 13. Taka sytuacja jest możliwa wted wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 3.

Zadanie **5.** Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ będą liczbami całkowitymi. nić, że

$$(1) \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (|a_i\ \ a_j| + |b_i\ \ b_j|) \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_i\ \ b_j| \,.$$

$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Wówczas

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_i \quad a_j| + |b_i \quad b_j|) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j \quad a_i + b_j \quad b_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_j \quad b_i| + |b_j \quad a_i|) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_j \quad b_i| + |a_i \quad b_j|) + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i \quad b_i| =$$

$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_i \quad b_j| \ .$$

Uwaga 1.

Założenie, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są całkowite, nie był
wiązaniu wykorzystywane. Nierówność (1) jest prawdziwa dla dowoln
rzeczywistych.

Uwaga 2.

Uważne prześledzenie podanego wyżej rozwiązania prowadzi d
sku, że równość w nierówności (1) zachodzi wtedy i tylko wtedy,
gi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ po uporządkowaniu w sposób ro
identyczne.

Zadanie **6.** W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości:

$$(1) \qquad \sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ \ , \qquad \frac{AB}{BC} \ \frac{CD}{DE} \ \frac{EF}{FA} = 1 \ .$$

Dowieść, że $\dfrac{AB}{BF} \ \dfrac{FD}{DE} \ \dfrac{EC}{CA} = 1\,.$

Rozwiązanie

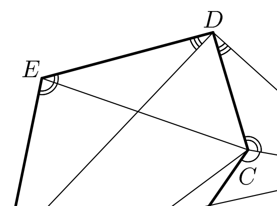
Sposób I

Na mocy założenia $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$, istnieje taki punkt
chodzą następujące równości kątów (rys. 1):

$$(2) \qquad \sphericalangle BCP = \sphericalangle BAF, \quad \sphericalangle PCD = \sphericalangle FED, \quad \sphericalangle CDP = \sphericalangle EDF.$$

Trójkąty DEF i DCP są więc podobne, skąd dostajemy

$$(3) \quad \sphericalangle EDC = \sphericalangle FDP \quad \text{oraz} \quad \frac{ED}{DC} = \frac{FD}{DP}.$$



Korzystając z danej w treści zadania rów-

co na mocy pierwszej spośród równości (2) dowodzi, że trójkąty BA
są podobne. Zatem

$$(4) \qquad \sphericalangle CBA = \sphericalangle PBF \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{FB}{BP}.$$

Równości (3) oznaczają, że trójkąty EDC i FDP są podobne; z rów
wynika natomiast, że podobne są trójkąty CBA i PBF. Otrzymuje
odpowiednio następujące proporcje:

$$\frac{EC}{DE} = \frac{FP}{FD} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AB}{CA} = \frac{BF}{FP}.$$

Mnożąc stronami powyższe dwie równości dostajemy tezę.

Sposób II

Użyjemy algebry liczb zespolonych.

Niech liczby a, b, c, d, e, f reprezentują na płaszczyźnie zespolon
wiednio punkty A, B, C, D, E, F. Oznaczmy przez $\operatorname{Arg} z$ argume
zespolonej z będący liczbą z przedziału $\langle 0, 2\pi)$. Wówczas

$$\operatorname{Arg} \frac{f \quad a}{b \quad a} = \sphericalangle A, \qquad \operatorname{Arg} \frac{b \quad c}{d \quad c} = \sphericalangle C, \qquad \operatorname{Arg} \frac{d \quad e}{f \quad e} = \sphericalangle E.$$

Ponieważ $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 2\pi$, więc

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{f \quad a}{b \quad a} \; \frac{b \quad c}{d \quad c} \; \frac{d \quad e}{f \quad e} \right) = 2\pi.$$

Liczba $\frac{f \quad a}{b \quad a} \; \frac{b \quad c}{d \quad c} \; \frac{d \quad e}{f \quad e}$ jest więc dodatnią liczbą rzeczywistą. Po

$$\left| \frac{f \quad a}{b \quad a} \; \frac{b \quad c}{d \quad c} \; \frac{d \quad e}{f \quad e} \right| = \frac{FA}{AB} \; \frac{BC}{CD} \; \frac{DE}{EF} = 1.$$

Zatem warunek (1) implikuje równość

$$(5) \qquad \frac{f \quad a}{b \quad a} \; \frac{b \quad c}{d \quad c} \; \frac{d \quad e}{f \quad e} = 1.$$

Stąd $(f \quad a)(b \quad c)(d \quad e) = (b \quad a)(d \quad c)(f \quad e)$. Wymnażając nawia
mujemy

$$abd + acd + abe \quad ace + bdf \quad cdf \quad bef + cef =$$
$$= \quad ace + bce + ade \quad bde + acf \quad bcf \quad adf + bdf$$

czyli po uporządkowaniu i redukcji wyrazów podobnych

$$(6) \qquad acd + abe + cef + bde + bef + adf = bce + ade + acf + abd + adf +$$

otrzymujemy $(a \quad b)(f \quad d)(e \quad c) = (f \quad b)(e \quad d)(a \quad c)$, skąd

$$acd \quad bcd \quad ade + bde \quad acf + bcf + aef \quad bef =$$
$$= abd \quad bcd \quad abe + bce \quad adf + cdf + aef \quad cef\,.$$

Porządkując i redukując dostajemy

(8) $\quad acd + bde + bcf + abe + adf + cef = abd + bce + cdf + ade + acf +$

Równość (8) niczym nie różni się od równości (6), co oznacza, że zale
jest równoważna równości (5).

Porównując wartości bezwzględne liczb stojących po obu stronac
ku (7) dostajemy

$$\frac{AB}{BF} \ \frac{FD}{DE} \ \frac{EC}{CA} = \left| \frac{a \quad b}{f \quad b} \ \frac{f \quad d}{e \quad d} \ \frac{e \quad c}{a \quad c} \right| = 1,$$

co kończy dowód.

Uwaga 1.

Rachunki w sposobie II można nieco uprościć przyjmując (bez str
ności), że $a = 0$ oraz $b = 1$.

Uwaga 2.

W obu powyższych rozwiązaniach ukryty jest dowód następujące
ści: $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ABF + \sphericalangle FDE$. Odnalezienie go pozostawiamy Czyt
jako ciekawe uzupełnienie zadania.

Uwaga 3.

Prawdziwy jest następujący, nietrudny do samodzielnego udow
fakt: *jeśli na sześciokącie $ABCDEF$ można opisać okrąg, to*

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ.$$

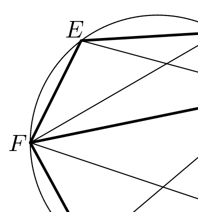
Zastąpmy więc w treści zadania wyrażenie „$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 36$
niem: „na sześciokącie $ABCDEF$ można opisać okrąg” (pozostawiaj
bez zmian). W ten sposób otrzymamy treść innego, jak się okazuje, p
zadania, które można łatwo rozwiązać przy pomocy twierdzenia Ptol
Oto rozwiązanie:

Chcemy dowieść, że

(9) $\quad AB \quad FD \quad EC = DE \quad BF \quad CA.$

Na mocy twierdzenia Ptolemeusza (rys. 2) mamy

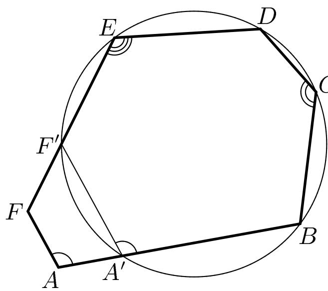
$$FD \quad EC = DE \quad FC + EF \quad CD,$$
$$BF \quad CA = AB \quad FC + FA \quad BC$$



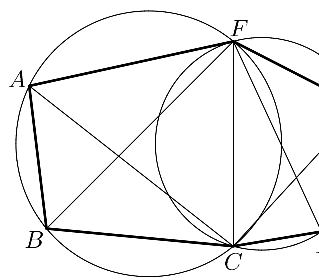
czyli $AB \quad CD \quad EF = BC \quad DE \quad FA$. Otrzymaliśmy drugą spo
ści (1), a więc tym samym dowiedliśmy równości (9).

Kilku uczestników przedstawiło powyższe rozumowanie w swoich
po czym próbowali oni dowieść, że jedynymi sześciokątami $ABCD$
niającymi równość $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$ są sześciokąty wpisane
To w połączeniu z prostym zastosowaniem twierdzenia Ptolemeusz
im rozwiązanie zadania.

Jednak okazuje się, że z warunku $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$ *nie wyni*
sześciokącie $ABCDEF$ można opisać okrąg (a więc twierdzenie odw
zacytowanego na początku *Uwagi* 3 nie jest prawdziwe). Przykład
się na rysunku 3. Punkty A', B, C, D, E, F' leżą na jednym okrę
$\sphericalangle A' + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$) oraz $AF \parallel A'F'$. Zatem $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 3$
na sześciokącie $ABCDEF$ nie da się opisać okręgu.



rys. 3



rys. 4

Inny przykład jest przedstawiony na rysunku 4. Sześciokąt ABC
tę własność, że na czworokątach $ABCF$ i $FCDE$ można opisać okręg
różne. Wtedy $\sphericalangle BAF + \sphericalangle BCF = 180^\circ$ oraz $\sphericalangle FED + \sphericalangle FCD = 180$
jąc stronami otrzymane równości dostajemy $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$.
jak widać, nie istnieje okrąg opisany na sześciokącie $ABCDEF$.

Powyższe krótkie rozumowanie korzystające z twierdzenia Ptol
stosuje się również dla takich sześciokątów jak na rysunku 4, czyli
łożeniu, że na czworokątach $ABCF$, $FCDE$ można opisać okręgi.
się więc następujące pytanie: Czy z warunku $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$
że na czworokątach $ABCF$, $FCDE$ da się opisać okręgi? Odpow
negatywna, co można zrozumieć spoglądając na rysunek 4. Na tym
$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$, więc również $\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F = 360^\circ$, lecz na
kątach $BCDA$, $ADEF$ nie da się opisać okręgów.

XXXIX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Zadanie **1.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są
dłe, a przeciwległe boki AB i DC nie są równoległe. Zakła
symetralne boków AB i DC przecinają się w punkcie P leż
wnątrz czworokąta $ABCD$. Udowodnić, że czworokąt ABC
wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABP i C
równe pola.

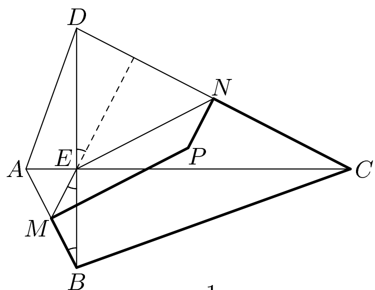
Rozwiązanie

Oznaczmy przez M, N odpowiednio środki boków AB i CD
Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Poniew
ste AB i CD nie są równoległe, więc kąty BEM oraz DEN nie s
Stąd wynika, że punkty M, E, N nie są współliniowe. Bez straty o
przyjmijmy, że

(1) $$\sphericalangle BEM + \sphericalangle CEN < 90^\circ.$$

Ponieważ punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, więc łamana B
tworzy pięciokąt. Wykażemy, że jest to pięciokąt wklęsły. Istotnie:
nierówności (1) miara kąta przy wierzchołku P tego pięciokąta wyn

$$\sphericalangle P = 540^\circ \quad 2 \quad 90^\circ \quad \sphericalangle MBE \quad \sphericalangle EBC \quad \sphericalangle NCE \quad \sphericalangle ECB =$$
$$= 270^\circ \quad \sphericalangle BEM \quad \sphericalangle CEN > 180^\circ.$$



rys. 1

Zatem punkt P leży wewnątrz czworokąta $BCNM$. Ponadto

(2) $$\sphericalangle MPN = 360^\circ \quad \sphericalangle P = 90^\circ + \sphericalangle BEM + \sphericalangle CEN = \sphericalangle MEN.$$

Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ. Na mocy równości (2) o
jemy

$$[ABP] = [CDP] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{NP}{MP} = \frac{AB}{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{NP}{MP} = \frac{ME}{NE}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{trójkąty } MPN \text{ i } NEM \text{ są podobne}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sphericalangle MBE = \sphericalangle NCE \text{ oraz } \sphericalangle NDE = \sphericalangle MA$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{na czworokącie } ABCD \text{ można opisać ok}$$

Zadanie **2.** W konkursie bierze udział a uczestników, ocenianych przez natorów, gdzie $b \geqslant 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Ka minator ocenia każdego uczestnika, wydając werdykt „zdał” zdał”. Załóżmy, że k jest liczbą o własności: oceny każdy egzaminatorów są zgodne dla co najwyżej k uczestników. D

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b \quad 1}{2b}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x_i liczbę egzaminatorów, według których uczest merze i (gdzie $i = 1, 2, \ldots, a$) zdał. Niech y_i będzie liczbą tych egzami którzy uznali, że i-ty uczestnik nie zdał. Liczba par tych egzami których oceny zgadzają się względem i-tego uczestnika, wynosi

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} = \tfrac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 \quad (x_i + y_i)) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(x_i + y_i)^2 + \tfrac{1}{4}(x_i \quad y_i)^2 \quad \tfrac{1}{2}(x_i + y_i) =$$

$$= \tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{4}(x_i \quad y_i)^2 = \tfrac{1}{4}((b \quad 1)^2 + (x_i \quad y_i)^2 \quad 1$$

Ponieważ b jest liczbą nieparzystą, więc $(x_i \quad y_i)^2 \geqslant 1$, skąd

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} = \tfrac{1}{4}((b \quad 1)^2 + (x_i \quad y_i)^2 \quad 1) \geqslant \tfrac{1}{4}(b \quad 1)^2. \qquad (1)$$

Łączna liczba par ocen zgodnych w konkursie wynosi

$$\sum_{i=1}^{a} \left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \right).$$

Z drugiej strony wielkość ta, na mocy własności liczby k, nie przekr

$$k \ \binom{b}{2}.$$

Korzystając z nierówności (1), otrzymujemy więc

$$k \ \binom{b}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{a} \left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \right) \geqslant \frac{a(b \quad 1)^2}{4}.$$

Zadanie **3.** Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oznaczmy przez d
jej dodatnich dzielników (włącznie z 1 oraz n). Wyznaczyć
dodatnie liczby całkowite k takie, że

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

dla pewnego n.

Rozwiązanie

Niech $n = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_j^{x_j}$ będzie rozkładem liczby n na czynniki p
Wówczas

$$d(n) = (x_1+1)(x_2+1)\dots(x_j+1).$$

Zatem dla dowolnych liczb względnie pierwszych a, b mamy $d(ab) =$

Liczba $d(n^2) = (2x_1+1)(2x_2+1)\dots(2x_j+1)$ jest nieparzysta, wi
wite wartości wyrażenia $d(n^2)/d(n)$ mogą być jedynie liczbami niep
mi.

Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby nieparzystej k istn
liczba naturalna n, że

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k. \tag{1}$$

Dla $k=1$ wystarczy przyjąć $n=1$.

Niech $k = 2^r l \quad 1$, gdzie $r \geqslant 1$ jest liczbą naturalną, zaś l liczbą niep
Ponieważ $l < k$, więc na mocy założenia indukcyjnego istnieje tak
naturalna m, że

$$\frac{d(m^2)}{d(m)} = l.$$

Liczby naturalnej n, spełniającej równość (1), szukamy w postaci

$$n = m \quad q_0^{x_0} q_1^{x_1} \dots q_{s\ 1}^{x_{s\ 1}} \ , \tag{2}$$

gdzie $q_0, q_1, \dots, q_{s\ 1}$ są dowolnymi liczbami pierwszymi, nie będący
nikami liczby m, zaś s oraz $x_0, x_1, \dots, x_{s\ 1}$ liczbami całkowitymi do
które niżej odpowiednio dobierzemy.

Na mocy równości (2) otrzymujemy zależność

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{d(m^2)}{d(m)} \ \frac{2x_0+1}{x_0+1} \ \frac{2x_1+1}{x_1+1} \quad \dots \frac{2x_{s\ 1}+1}{x_{s\ 1}+1}. \tag{3}$$

Aby uprościć ułamki stojące po prawej stronie powyższego wyrażeni
mijmy $x_j = 2^j x_0$ dla $j = 1, 2, \dots, s \quad 1$. Wtedy równość (3) przybiera p

$$\frac{d(n^2)}{} = l \ \frac{2^s x_0 + 1}{}$$

czyli $2^s x_0 l + l = 2^r x_0 l \ \ x_0 + 2^r l \ \ 1$. W tym celu wystarczy wziąć s
$x_0 = (2^r \ \ 1)l \ \ 1$.

Dowód indukcyjny został więc zakończony.

Zadanie **4.** Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatn
że liczba $a^2 b + a + b$ jest podzielna przez $ab^2 + b + 7$.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że liczba

$$b(a^2 b + a + b) \ \ a(ab^2 + b + 7) = b^2 \ \ 7a$$

jest podzielna przez $ab^2 + b + 7$. Liczby a, b są całkowite dodatnie, w

$$ab^2 + b + 7 > b^2 + 7 > b^2 \ \ 7a.$$

Zatem podzielność $ab^2 + b + 7 \mid b^2 \ \ 7a$ jest możliwa jedynie wtedy, g
$b^2 \ \ 7a$ jest niedodatnia.

Wszystkie pary (a,b) spełniające równanie $b^2 \ \ 7a = 0$ są dane w

$$(a,b) = (7k^2, 7k) \qquad \text{dla} \ \ k = 1,2,3,\ldots\ .$$

Bez trudu sprawdzamy, że powyższe pary spełniają warunki zadania

$$ab^2 + b + 7 = 7(49k^4 + k + 1), \qquad a^2 b + a + b = 7k(49k^4 + k + 1)$$

Pozostało rozważyć przypadek, gdy $b^2 \ \ 7a < 0$. Wówczas

(1) liczba dodatnia $7a \ \ b^2$ jest podzielna przez $ab^2 + b + 7$.

Jeśli $b \geqslant 3$, to $ab^2 + b + 7 > 9a > 7a \ \ b^2$, co dowodzi, że w tym pr
podzielność $ab^2 + b + 7 \mid 7a \ \ b^2$ nie może być spełniona. Zatem $b = 1$ l

(a) Przyjmijmy najpierw, że $b = 1$. Wtedy warunek (1) sprowadz
podzielności $a + 8 \mid 7a \ \ 1$. Ponieważ

$$7a \ \ 1 = 7(a + 8) \ \ 57,$$

więc $a + 8 \mid 57$. Zatem $a + 8$ musi być jedną z liczb: 1, 3, 19, 57. Stąd
dodatniości liczby a wynika, że $a = 11$ lub $a = 49$.

Bez trudu sprawdzamy, że pary $(a,b) = (11,1)$ oraz $(a,b) = (49,1)$ s
warunki zadania. Istotnie: jeśli $(a,b) = (11,1)$, to

$$ab^2 + b + 7 = 19, \qquad a^2 b + a + b = 133 \ (= 19 \ \ 7).$$

Gdy natomiast $(a,b) = (49,1)$, to otrzymujemy

$$ab^2 + b + 7 = 57, \qquad a^2 b + a + b = 2451 \ (= 57 \ \ 43).$$

(b) Niech z kolei $b = 2$. Wówczas na mocy warunku (1) liczba $7a$
podzielna przez $4a + 9$. Ponieważ

Reasumując: wszystkie pary (a,b) spełniające warunki zadania
wzorami:

$$(a,b)=(7k^2,7k) \quad \text{dla} \quad k=1,2,3,\dots, \qquad (a,b)=(11,1), \quad (a,b)=($$

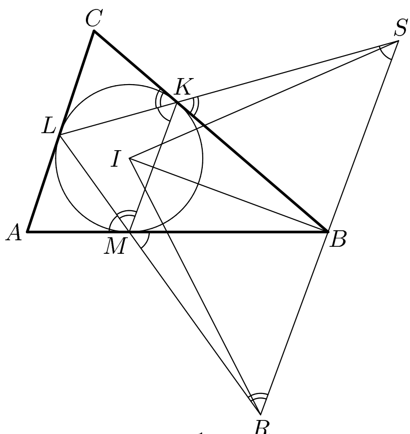
Zadanie **5.** Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt AB
ten jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w pun
L i M. Prosta przechodząca przez B i równoległa do MK
proste LM i LK odpowiednio w punktach R i S. Wykaza
RIS jest ostry.

Rozwiązanie

Zachodzą następujące równości kątów (rys. 1):

$$\sphericalangle RMB = \sphericalangle LKM = \sphericalangle KSB \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle MRB = \sphericalangle LMK = \sphericalangle$$

Z powyższych równości wynika, że trójkąty RMB oraz KSB są po



rys. 1

Otrzymujemy więc równości

(1) $$BR \quad BS = BK \quad BM = BK^2$$

Prosta IB jest prostopadła do prostej KM, więc $IB \perp RS$. Kor
z równości (1) mamy

$$RI^2 + SI^2 \quad RS^2 = (BI^2 + BR^2) + (BI^2 + BS^2) \quad (BR + BS)^2 =$$
$$= 2(BI^2 \quad BR \quad BS) = 2(BI^2 \quad BK^2) = 2IK^2 >$$

Ostatnia nierówność dowodzi, że kąt RIS jest ostry.

Zadanie **6.** Rozważamy wszystkie funkcje f ze zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich lic

Rozwiązanie

Odpowiedź: 120.

Udowodnimy najpierw, że związek (1) jest równoważny następ
warunkowi:

(2) $f(f(s)) = s(f(1))^2$ oraz $f(1)f(st) = f(s)f(t)$ dla wszystkich

Oznaczmy: $f(1) = a$.

Załóżmy, że równość (1) jest spełniona. Podstawiając do równ
najpierw $s = 1$, a potem $t = 1$ otrzymujemy odpowiednio

(3) $$f(at^2) = (f(t))^2 \qquad \text{oraz} \qquad f(f(s)) = a^2 s.$$

Stąd oraz z równania (1) mamy

$$\begin{aligned}(f(s)f(t))^2 = (f(s))^2 \quad f(at^2) &= f(s^2 f(f(at^2))) = \\ &= f(s^2a^2at^2) = f(a(ast)^2) = (f(ast))^2,\end{aligned}$$

czyli $f(ast) = f(s)f(t)$. W szczególności $f(as) = af(s)$. Wstawiając d
niej równości st w miejsce s oraz korzystając z przedostatniej zależn
skujemy

(4) $$af(st) = f(s)f(t) \qquad \text{dla wszystkich} \quad s,t \in \mathbb{N}.$$

Równość (4) oraz druga z równości (3) dają (2).

Załóżmy, że warunek (2) jest spełniony. Wtedy

$$a^2 f(t^2 f(s)) = af(t^2)f(f(s)) = (f(t))^2 a^2 s,$$

skąd dostajemy zależność (1).

Wykażemy teraz, że poszukiwania najmniejszej wartości $f(1998)$
ograniczyć do tych funkcji f spełniających równania (2), dla których
W tym celu udowodnimy najpierw, że jeżeli funkcja f spełnia (2
dowolnej liczby $s \in \mathbb{N}$ liczba $f(s)$ jest podzielna przez a $(= f(1))$.

Ustalmy liczbę naturalną s. Niech p będzie dowolnym dzielnikiem
szym liczby a. Niech $\alpha \geqslant 1$ będzie największym wykładnikiem, z ja
ba p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby a (tzn. p^{α}
$p^{\alpha+1} \nmid a$). Analogicznie, niech $\beta \geqslant 0$ będzie największą liczbą całkowit
sności $p^{\beta} \mid f(s)$ (a więc $p^{\beta+1} \nmid f(s)$).

Korzystając z drugiego równania (2) dowodzimy indukcyjnie, że

(5) $$a^{k\ 1} f(s^k) = (f(s))^k \qquad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots\,.$$

Liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby

De niujemy funkcję $g(s)=f(s)/a$. Wówczas $g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ oraz $g(1)$
nadto funkcja g spełnia warunki (2). Istotnie: dzieląc obie strony
równości (2) przez a^2 otrzymujemy

$$(6) \qquad g(st)=g(s)g(t) \qquad \text{dla wszystkich } s,t\in\mathbb{N}.$$

Ponadto na mocy pierwszej równości (2), $f(f(1))=(f(1))^2$, skąd
Zatem korzystając z równości (6),

$$ag(g(s))=g(a)g(g(s))=g(ag(s))=g(f(s))=f(f(s))/a=as$$

co dowodzi, że funkcja g spełnia warunki (2). Oprócz tego $g(s)\leqslant$
wszystkich $s\in\mathbb{N}$. Poszukiwania najmniejszej wartości $f(1998)$ może
ograniczyć do funkcji $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ spełniających równości

$$(7) \qquad f(f(s))=s \qquad \text{oraz} \qquad f(st)=f(s)f(t)$$

dla wszystkich liczb $s,t\in\mathbb{N}$.

Niech f będzie dowolną funkcją spełniającą (7). Wykażemy, że dl
nej liczby pierwszej p liczba $f(p)$ jest pierwsza. Niech więc $f(p)=$
$u,v\in\mathbb{N}$. Wtedy

$$p=f(f(p))=f(uv)=f(u)f(v).$$

Stąd wynika, że jedna z liczb $f(u)$, $f(v)$ (powiedzmy, że $f(u)$) jest
Stąd, na mocy drugiego równania (7), $u=f(f(u))=f(1)=1$. Zatem
liczbą pierwszą.

Ponadto funkcja f jest różnowartościowa. Istotnie: jeśli $f(s)=$
$f(f(s))=f(f(t))$, skąd $s=t$.

Udowodniliśmy więc, że funkcja f przekształca różne liczby pie
różne liczby pierwsze. Stąd wynika, że

$$f(1998)=f(2\cdot 3^3\cdot 37)=f(2)\cdot(f(3))^3\cdot f(37)\geqslant 3\cdot 2^3\cdot 5=120$$

Pozostało podać przykład funkcji f spełniającej warunki (7), d
zachodzi równość $f(1998)=120$. Taką funkcję f de niujemy następu

$$f(1)=1,\quad f(2)=3,\quad f(3)=2,\quad f(5)=37,\quad f(37)=5$$

oraz $f(p)=p$ dla liczb pierwszych $p\neq 2,3,5,37$. Dla dowolnej liczby
$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ przyjmujemy

$$f(n)=f(p_1)^{\alpha_1}f(p_2)^{\alpha_2}\ldots f(p_n)^{\alpha_n}.$$

Wówczas $f(1998)=120$ oraz funkcja f spełnia zależności (7).

XXI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Zadanie **1.** Niech x_1, x_2, y_1, y_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$x_1^2+x_2^2\leqslant 1.$$

Udowodnić nierówność

$$(1)\qquad (x_1y_1+x_2y_2\ \ 1)^{\ 2}\geqslant(x_1^2+x_2^2\ \ 1)(y_{\ 1}^{\ 2}+y_2^2\ \ 1).$$

Rozwiązanie

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $y_1^2+y_2^2\geqslant 1$. Wtedy lewa str
równości (1) jest nieujemna (jako kwadrat liczby rzeczywistej), n
z nierówności $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$ oraz $y_1^2+y_2^2\geqslant 1$ wynika, że jej prawa str
niedodatnia. Zatem w tym przypadku nierówność (1) jest udowodni

Załóżmy teraz, że $y_1^2+y_2^2<1$. Niech

$$a=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\qquad\text{oraz}\qquad b=\sqrt{y_1^2+y_2^2}.$$

Wówczas $0\leqslant a\leqslant 1$ oraz $0\leqslant b<1$. Na mocy nierówności Schwarza
datek, „Nierówność Schwarza”, str. 112) otrzymujemy $x_1y_1+x_2y_2$
Zatem

$$(x_1y_1+x_2y_2\quad 1)^2\geqslant(ab\quad 1)^2=a^2b^2\quad 2ab+1\geqslant a^2b^2\quad a^2\quad b^2+$$
$$=(a^2\quad 1)(b^2\quad 1)=(x_1^2+x_2^2\quad 1)(y_1^2+y_2^2\quad 1),$$

co kończy dowód nierówności (1).

Zadanie **2.** Rozważamy n punktów $P_1,P_2,\ldots,P_n$ położonych w tej kole
jednej linii prostej. Malujemy każdy z tych n punktów na je
stępujących kolorów: biały, czerwony, zielony, niebieski, olet
lorowanie nazwiemy *dopuszczalnym*, jeśli dla dowolnych dw
nych punktów P_i, P_{i+1} $(i=1,2,\ldots,n\ \ 1)$ oba są tego sameg
lub co najmniej jeden z nich jest biały. Ile jest dopuszczaln
rowań?

Rozwiązanie

Wykażemy, że dopuszczalnych kolorowań jest $\frac{1}{2}(3^{n+1}+(\ \ 1)^{n+1}$

Sposób I

Niech b_n będzie liczbą dopuszczalnych kolorowań n punktów, w
ostatni punkt jest pomalowany na biało, zaś k_n — liczbą pozosta
puszczalnych kolorowań, tzn. kolorowań, w których ostatni punkt je
lowany na czerwono, zielono, niebiesko lub oletowo. Punkty pokol
na czerwono, zielono, niebiesko lub oletowo będziemy nazywać *pr*

W tym celu zastanówmy się, jak z dopuszczalnego kolorowania n
można otrzymać dopuszczalne kolorowanie $n+1$ punktów.

Liczba kolorowań $n+1$ punktów zakończonych punktem białym
na liczbie wszystkich dopuszczalnych kolorowań n punktów, gdyż k
puszczalne kolorowanie n punktów można uzupełnić $(n+1)$-szym
pomalowanym na biało. Zatem $b_{n+1} = b_n + k_n$, co dowodzi pierwszej
równości (1).

Wśród wszystkich dopuszczalnych kolorowań $n+1$ punktów zako
punktem prawdziwie kolorowym można wyróżnić dwa rodzaje:

1. *Kolorowania, w których przedostatni, n-ty punkt jest biały.* Wt
ostatniego, $(n+1)$-szego punktu może być wybrany dowolnie spośród
kolorów prawdziwych. Zatem każde kolorowanie n punktów, zakoń
biało, może być uzupełnione na 4 sposoby do kolorowania $n+1$ p
zakończonego punktem prawdziwie kolorowym. Otrzymujemy więc
rowań tego rodzaju.

2. *Kolorowania, w których przedostatni, n-ty punkt nie jest bia*
czas, na mocy de nicji kolorowań dopuszczalnych, ostatni $(n+1)$-sz
musi być tego samego koloru co przedostatni. Zatem każde koloro
punktów, zakończone punktem prawdziwie kolorowym, może być uzu
tylko na jeden sposób do kolorowania $n+1$ punktów, zakończonego
prawdziwie kolorowym. Kolorowań tego rodzaju jest więc k_n.

Łącznie kolorowań $n+1$ punktów zakończonych punktem prawd
lorowym jest $4b_n + k_n$, czyli $k_{n+1} = 4b_n + k_n$, co dowodzi drugiej spo
ności (1).

Niech d_n będzie liczbą wszystkich dopuszczalnych kolorowań n p
Wtedy $d_n = b_n + k_n$ oraz $d_1 = 5$, $d_2 = 13$. Ponadto dla $n \geqslant 2$ mamy

$$d_{n+2} = b_{n+2} + k_{n+2} = b_{n+1} + k_{n+1} + 4b_{n+1} + k_{n+1} =$$
$$= 5b_{n+1} + 2k_{n+1} = 2(b_{n+1} + k_{n+1}) + 3b_{n+1} = 2d_{n+1} + 3d_n$$

Stosując metodę rozwiązywania rekurencji liniowych (zob. *Dodate*
wiązywanie rekurencji liniowych", str. 103) otrzymujemy

$$d_n = \tfrac{1}{2}\left(3^{n+1} + (\ \ 1)^{n+1}\right).$$

Sposób II

Rozważmy kolorowanie dopuszczalne n punktów. *Jednokolorow*
nazwiemy każdy maksymalny, niepusty ciąg kolejnych punktów po
nych jednym kolorem, różnym od białego. Niech m oznacza liczbę wy

strony punkt pomalowany na biało. *Białym sąsiadem jednokolorow*
nazwiemy ten punkt biały, który jest położony na prawo od dan
i leży najbliżej niej.

Policzymy, ile jest dopuszczalnych kolorowań, wiedząc, że jedn
wych wysp jest dokładnie k (gdzie $0 \leqslant k \leqslant [(n+1)/2]$).

Zero jednokolorowych wysp

Wszystkie punkty są pomalowane na biało — mamy więc tyl
dopuszczalne kolorowanie w tym przypadku.

Jedna jednokolorowa wyspa

Kolorowanie dopuszczalne jest wyznaczone przez położenie wy
wybór jednego spośród czterech kolorów, na który pomalowane są pu
wyspy. Położenie wyspy można wyznaczyć wybierając dwa różne pun
śród $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$. (Pierwszy z nich to wysunięty najbardziej na lev
wyspy, zaś drugi to jej biały sąsiad). Zatem w tym przypadku dopusz
kolorowań jest

$$4\binom{n+1}{2}.$$

Dwie jednokolorowe wyspy

To kolorowanie jest wyznaczone przez położenie dwóch wysp (wy
rech różnych punktów spośród $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$) oraz wybór dwóch kol
tych wysp (co można uczynić na 4^2 sposobów). Mamy więc łączni
przypadku

$$4^2\binom{n+1}{4}$$

kolorowań dopuszczalnych.

Analogicznie stwierdzamy, że dla $k \leqslant [(n+1)/2]$ istnieje

$$4^k\binom{n+1}{2k}$$

kolorowań dopuszczalnych mających dokładnie k *wysp jednokolorow*

Łącznie wszystkich dopuszczalnych kolorowań jest więc

$$\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} 4^k\binom{n+1}{2k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{n+1} 2^l\binom{n+1}{l} + \sum_{l=0}^{n+1} (\ \ 2)^l\binom{n+1}{l}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}((1+2)^{n+1} + (1\ \ \ 2)^{n+1}) = \tfrac{1}{2}(3^{n+1} + (\ \ 1)^{n}$$

punktów tego samego koloru oraz ostatniego punktu białego (w szcz
segment może być jednopunktowy, złożony tylko z punktu białego)
segment zakodujemy przy pomocy ciągu cyfr 0, 1, 2. Ciąg ten bę
taką samą długość jak kodowany segment. W ten sposób każde kol
dopuszczalne zostanie zakodowane przy pomocy ciągu złożonego z n

Każdemu nie białemu punktowi przyporządkujmy (uporządkowa
cyfr według reguły: czerwony: 11, zielony: 12, niebieski: 21, oletowy

Kodowanie segmentów odbywa się następująco.

Segmentowi złożonemu z jednego (białego) punktu przypisujemy

Segmentowi złożonemu z dwóch punktów (pierwszy nie biały, d
ły) przypisujemy parę cyfr przyporządkowaną kolorowi pierwszego
segmentu.

Segmentowi o długości k ($k \geqslant 3$) przypisujemy parę cyfr cd, k
przyporządkowana kolorowi początkowych punktów segmentu, prze
k 2 zerami: c000...0d. (Na przykład segmentowi złożonemu z siedm
tów zielonych i ostatniego punktu białego przypisujemy ciąg 10000

Tym samym otrzymujemy wzajemnie jednoznaczną odpowiednioś
wań i (n+1)-elementowych ciągów cyfr 0, 1, 2, zawierających parzys
cyfr niezerowych.

Aby udzielić liczbowej odpowiedzi na pytanie postawione w zada
leży wyznaczyć liczbę takich ciągów.

Wszystkich (n+1)-elementowych ciągów złożonych z cyfr 0, 1, 2 j
Ile z nich ma parzystą liczbę cyfr niezerowych? Okazuje się, że *prawie*
gdyż istnieje *prawie* wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między
z parzystą i ciągami z nieparzystą liczbą cyfr niezerowych. Odpowie
wygląda następująco: Mając dany ciąg cyfr, zmieniamy pierwszą, ró
cyfrę według zasady: jeśli jest ona „zerem”, to zamieniamy ją na „
jeśli jest to „dwójka”, to wymieniamy ją na „zero”. Taka operacja
parzystość liczby cyfr niezerowych, a jej dwukrotne złożenie jest ide
ścią.

Powyższe przekształcenie jest poprawnie określone na każdym c
z wyjątkiem ciągu złożonego z samych jedynek. Pozostałych cią
3^{n+1} 1 i dokładnie połowa z nich ma parzystą liczbę cyfr niezerow
tego trzeba doliczyć ciąg złożony z samych jedynek w przypadku, g
$n+1$ jest parzysta.

Zatem szukana liczba ciągów jest równa

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(3^{n+1} \quad 1) & \text{gdy } n+1 \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

Zadanie **3.** Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (x,y) spełni
stępujący układ równań:

$$\begin{cases} 2 \quad x^{\,3} = y \\ 2 \quad y^{\,3} = x. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Para $(x,y) = (1,1)$ spełnia dany układ równań. Wykażemy, że je
dyne rozwiązanie.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że pewne lic
spełniają podany w treści zadania układ równań, przy czym $x \neq 1$.

Jeżeli $x > 1$, to $y = 2 \quad x^3 < 1$. Podobnie, gdyby zachodziła nie
$x < 1$, to mielibyśmy $y = 2 \quad x^3 > 1$. Zatem ze względu na symetrię n
mych w danym układzie równań możemy (bez szkody dla ogólności
przyjąć, że $x > 1$, $y < 1$.

Podstawmy: $a = x \quad 1$, $b = 1 \quad y$, czyli $x = 1 + a$, $y = 1 \quad b$. Wted
$b > 0$ oraz

$$\begin{cases} b = 3a + 3a^2 + a^3 \\ a = 3b \quad 3b^2 + b^3. \end{cases}$$

Z pierwszej równości wynika natychmiast, że $b > 3a$. Natomiast wych
drugiej równości oraz wykorzystując nierówność $b > 0$ otrzymujemy

$$a = 3b \quad 3b^2 + b^3 = b(3 \quad 3b + b^2) =$$
$$= b\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{4} \quad 3b + b^2\right) = b\left(\tfrac{3}{4} + \left(\tfrac{3}{2} \quad b\right)^2\right) \geqslant \tfrac{3}{4}b > \tfrac{9}{4}a\ .$$

Stąd, ponieważ $a > 0$, więc $1 > \frac{9}{4}$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem $x = 1$, co pociąga za sobą $y = 1$.

Zadanie **4.** Niech m, n będą danymi liczbami całkowitymi dodatnimi.

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt[k^2]{k^m} \right]$$

($[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x). Udow

$$S_m(n) \leqslant n + m \left(\sqrt[4]{2^m} \quad 1 \right).$$

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenie: $A_k = \sqrt[k^2]{k}$. Wtedy liczb
możemy zapisać w postaci

$$\sum_{k=1}^{n} [A_k^m].$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{n} [A_k^m \quad 1] \leqslant m(A_2^m \quad 1)\ .$$

Wykażemy najpierw, że dla każdej liczby naturalnej k zachodzi nie
$A_k \leqslant A_2$. Istotnie:

$$A_k \leqslant A_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[k^2]{k} \leqslant \sqrt[4]{2} \quad \Leftrightarrow \quad k^4 \leqslant 2^{k^2} \quad \Leftrightarrow \quad k \leqslant 2^{k\ (k/4)}$$

Jeżeli więc $k \geqslant 4$, to dostajemy $k < 2^k \leqslant 2^{k\ (k/4)}$. To dowodzi nie
$A_k \leqslant A_2$ w przypadku, gdy $k \geqslant 4$. Dla $k = 3$ otrzymujemy:

$$A_3 \leqslant A_2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^4 < 2^{3^2} \quad \Leftrightarrow \quad 81 < 512,$$

co jest prawdą. Wreszcie dla $k = 1$ mamy $A_1 = 1 < \sqrt[4]{2} = A_2$.

Jeśli ponadto przyjmiemy, że $k \geqslant m$, to prawdziwe są następując
wania:

$$A_k^m \leqslant A_k^k = \sqrt[k]{k} < \sqrt[k]{2^k} = 2.$$

Zatem $[A_k^m \quad 1] \leqslant 0$ dla $k \geqslant m$.

Wykorzystując uzyskane wyżej nierówności dostajemy:

$$\sum_{k=1}^{n} [A_k^m \quad 1] \leqslant \sum_{k=1}^{m} [A_k^m \quad 1] \leqslant \sum_{k=1}^{m} [A_2^m \quad 1] = m[A_2^m \quad 1] \leqslant m(A_2^m$$

co kończy dowód danej nierówności.

Zadanie **5.** Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatni
że równanie $x^3 \quad 17x^{\ 2} + ax \quad b^{\ 2} = 0$ ma trzy pierwiastki
(niekoniecznie różne).

Rozwiązanie

Niech p, q, r będą pierwiastkami danego równania. Wówczas:

(1) $$p + q + r = 17$$

(2) $$pq + qr + rp = a$$

(3) $$pqr = b^2\ .$$

Ponieważ $b^2 > 0$, więc z równania (3) wynika, że liczby p, q, r są ró
Ponadto są one wszystkie dodatnie lub dokładnie dwie spośród nich
ne.

Gdyby $p > 0$ oraz $q,r < 0$, to na mocy równości (2) oraz (1) mieli

$$a = pq + qr + rp = qr + (17 \quad q \quad r)(q + r) =$$

Zatem liczby p, q, r są dodatnie. Pozostaje znaleźć wszystkie ta ki liczb całkowitych dodatnich (p,q,r), że liczba pqr jest kwadrate naturalnej oraz $p+q+r=17$.

Bez szkody dla ogólności możemy przyjąć, że $p \leqslant q \leqslant r$.

W poniższych tabelach wypisane są wszystkie rozwiązania w licz datnich równania $p+q+r=17$, przy założeniu $p \leqslant q \leqslant r$.

p	q	r	pqr	a	b
1	1	15	15		
1	2	14	28		
1	3	13	39		
1	4	12	48		
1	5	11	55		
1	6	10	60		
1	7	9	63		
1	8	8	**64**	80	8
2	2	13	52		
2	3	12	72		
2	4	11	88		
2	5	10	**100**	80	10

p	q	r	pqr	a	b
2	6	9	108		
2	7	8	112		
3	3	11	99		
3	4	10	120		
3	5	9	135		
3	6	8	**144**	90	12
3	7	7	147		
4	4	9	**144**	88	12
4	5	8	160		
4	6	7	168		
5	5	7	175		
5	6	6	180		

Spośród tych rozwiązań musimy wybrać te, dla których liczba pqr jest kwadratem. Przez bezpośrednie sprawdzenie widzimy, że istnieją czt trójki (p,q,r). Otrzymujemy więc cztery pary liczb (a,b) spełniające zadania, a mianowicie:

$$(80,8), \quad (80,10), \quad (88,12), \quad (90,12).$$

Zadanie **6.** Różne punkty A, B, C, D, E, F są położone na okręgu kolejności. Proste styczne do okręgu k w punktach A i D or BF i CE przecinają się w jednym punkcie P. Udowodnić, AD, BC i EF są równoległe lub przecinają się w jednym p

Rozwiązanie

Prosta AD jest biegunową punktu P względem okręgu k (p. „Dwustosunek i biegunowa", str. 107). Zatem na mocy twierdzenia stronie 110, proste AD, BC, EF są równoległe lub przecinają się w punkcie.

Zadanie **7.** Rozważamy pary (a,b) liczb naturalnych takich, że iloczyn a pisie dziesiętnym kończy się dokładnie 98 zerami. Wyznac

Twierdzenie

Liczba $a^a\ \ b^b$ kończy się dokładnie 98 zerami wtedy i tylko wtedy

$$(a,b)=(98,\ell) \qquad \text{lub} \qquad (a,b)=(\ell,98), \tag{1}$$

gdzie $\ell=75$ lub $\ell=10m+5$ dla $m\geqslant 10$.

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast, że istnieją dokład
pary (a,b) spełniające warunki zadania, a mianowicie:

$$(a,b)=(98,75) \qquad \text{lub} \qquad (a,b)=(75,98).$$

Dowód twierdzenia

Jeżeli (a,b) jest parą postaci (1), to liczba $a^a\ \ b^b$ ma w rozkładzie
niki pierwsze dokładnie 98 „dwójek” i co najmniej 100 „piątek”. To
że liczba $a^a\ \ b^b$ kończy się dokładnie 98 zerami.

Załóżmy teraz, że liczba $a^a\ \ b^b$ kończy się dokładnie 98 zerami. Gd
liczby a, b były podzielne przez 5, to liczba $a^a\ \ b^b$ (jako piąta potę
naturalnej) kończyłaby się liczbą zer podzielną przez 5, podczas gdy
jest dokładnie 98. Niech więc, bez straty ogólności, a będzie liczb
dzielną przez 5. Wówczas liczba b musi być podzielna przez 5, co ozn
czynnik „5” wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $a^a\ \ b^b$ z
nikiem podzielnym przez 5. Skoro jednak liczba $a^a\ \ b^b$ kończy się d
98 zerami, więc musi mieć ona w rozkładzie na czynniki pierwsze co
100 „piątek” i dokładnie 98 „dwójek”. Stąd wynika, że $b\in\{50,75\}$ l
liczbą podzielną przez 5 równą co najmniej 100 (w przeciwnym razie
w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $a^a\ \ b^b$ byłoby mniej niż 100

Wykażemy teraz, że b jest liczbą nieparzystą.

Gdyby liczba $b\geqslant 100$ była parzysta, to liczba „dwójek” w rozk
czynniki pierwsze liczby $a^a\ \ b^b$ byłaby co najmniej 100, podczas gdy
ich dokładnie 98.

Gdyby zaś $b=50$, to liczba a^a miałaby w rozkładzie na czynniki
dokładnie 48 „dwójek”. Jeśli przyjmiemy $a=2^k\ \ n$, gdzie n jest l
parzystą, to $ak=48$, czyli $k\ \ 2^k\ \ n=48$. Stąd $k\in\{1,2,3,4\}$. Podsta
kolei $k=1,2,3,4$, obliczamy: $n=24,6,2,\frac{3}{4}$. W żadnym z przypadk
jest liczbą nieparzystą. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem b jest liczbą nieparzystą, co na mocy powyższych ogranic
$b=75$ lub $b=10m+5$ dla $m\geqslant 10$.

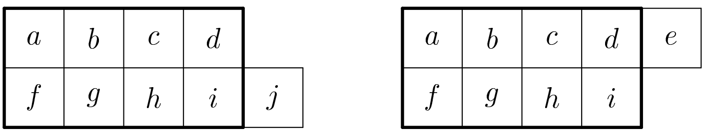
Liczba a^a musi mieć w rozkładzie na czynniki pierwsze dokładnie
jek”. Jeśli przyjmiemy $a=2^k\ \ n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, t

Zadanie **8.** Niech $n>2$ będzie daną liczbą naturalną. Rozważamy sia dratową na płaszczyźnie. W każdym kwadracie jednostkow wpisana jest liczba naturalna. Wielokąty o polu równym n boki są zawarte w prostych tworzących siatkę, nazwiemy wi *dopuszczalnymi*. *Wartością* wielokąta dopuszczalnego nazw mę wszystkich liczb wpisanych w kwadraty zawarte w tym w Udowodnić, że jeśli wartości dowolnych dwóch przystających tów dopuszczalnych są równe, to wszystkie liczby wpisane w siatki są równe.

Uwaga. Przypominamy, że obraz symetryczny Q wielokąt wielokątem przystającym do P.

Rozwiązanie

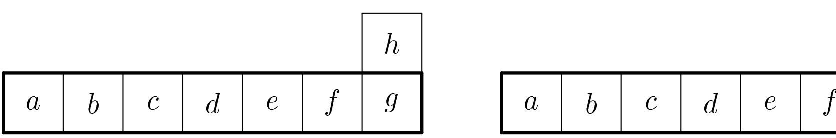
Najpierw rozpatrzymy przypadek, gdy n jest liczbą nieparzyst $n=2k+1$. Jako dwa dopuszczalne wielokąty przystające rozważamy prostokąt $2\quad k$ z dołączonym kwadratem jednostkowym, jak na ry (Na tym rysunku $k=4$).



rys. 1

Wartości obu wielokątów są równe, więc mamy $e=j$. Ponieważ p parę wielokątów można przesunąć w dowolne miejsce płaszczyzny, jak obrócić o 90°, wnioskujemy stąd, że w dowolne dwa kwadraty jedn mające wspólny bok wpisano równe liczby. Zatem wszystkie liczby w kwadraty siatki są równe.

Pozostał do rozważenia przypadek, gdy n jest liczbą parzystą, po $n=2k$. Rozważamy parę dopuszczalnych wielokątów przystających, łych z dołączenia do tego samego prostokąta $1\quad(2k\quad 1)$ kwadratu kowego, jak na rysunku 2. (Na tym rysunku $k=4$).

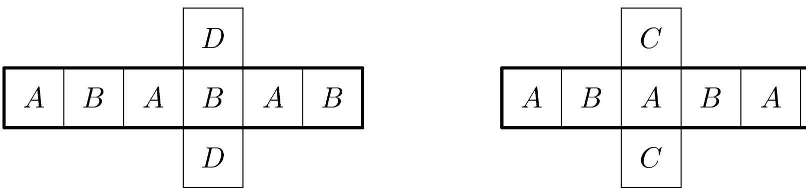


jest przesunięciem drugiego o wektor o współrzędnych parzystych,
są równe liczby. W rezultacie w kwadraty płaszczyzny mogą być wp
najwyżej 4 różne wartości A, B, C, D, tak jak na rysunku 3.

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D
A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D
A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B

rys. 3

Z kolei rozważmy dwa wielokąty jak na rysunku 4, gdzie środkow
bione prostokąty 1 (2k 2) pokrywają się.



rys. 4

Równość wartości tych wielokątów daje $2D = 2C$, czyli $D = C$. D
położenia tych wielokątów pokazuje, że dowolne dwa kwadraty jedn
o wspólnym boku mają wpisaną tę samą liczbę. Wszystkie liczby
w kwadraty siatki są więc równe i w tym przypadku.

Zadanie **9.** Niech K, L, M będą środkami boków BC, AC, AB trójka
Punkty A, B, C dzielą okrąg opisany na trójkącie ABC
łuki: AB, BC, CA. Niech X będzie takim punktem łuk
$BX = XC$. Analogicznie, niech Y będzie takim punktem
że $AY = YC$, zaś Z takim punktem łuku AB, że $AZ = Z$
R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC
będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udow
$r + KX + LY + MZ = 2R$.

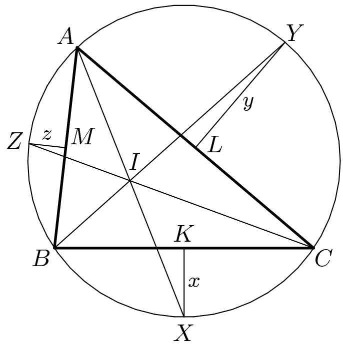
Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $x=KX$, $y=LY$, $z=M$
ponadto $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ oraz $2p=a+b+c$.

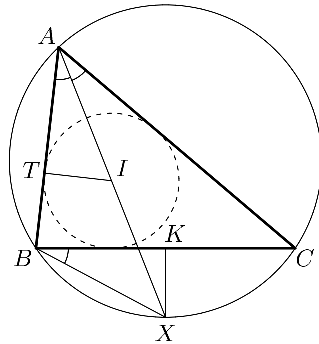
Równość, którą mamy udowodnić, przepisujemy w postaci

$$\frac{x}{r}+\frac{y}{r}+\frac{z}{r}+1=\frac{2R}{r}. \tag{1}$$

Aby dowieść tożsamości (1), wyrazimy najpierw ułamki stojące w po
wyrażeniu w zależności od a, b, c.



rys. 1



rys. 2

Niech T będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójk
z bokiem AB (rys. 2). Wówczas $TA=p\quad a$. Ponieważ $\sphericalangle KBX=\sphericalangle$
$=\sphericalangle TAI$, więc trójkąty prostokątne KBX oraz TAI są podobne. S

$$\frac{KX}{KB}=\frac{TI}{TA}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{2x}{a}=\frac{r}{p\quad a}.$$

Otrzymana równość jest równoważna tożsamości

$$\frac{x}{r}=\frac{a}{2(p\quad a)}. \tag{2}$$

Rozumując analogicznie uzyskujemy zależności

$$\frac{y}{r}=\frac{b}{2(p\quad b)} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{z}{r}=\frac{c}{2(p\quad c)}. \tag{3}$$

Oznaczmy przez S pole trójkąta ABC. Znane są następujące wz

$$S=pr \qquad \text{oraz} \qquad S=\frac{abc}{4R}\ .$$

Korzystając z powyższych równości oraz ze wzoru Herona mamy

$$\frac{2R}{r}=\frac{abc}{2S}\ \ \frac{p}{S}=\frac{abc}{2(p\quad a)(p\quad b)(p\quad c)}. \tag{4}$$

co możemy również przepisać następująco:

$$a(p\quad b)(p\quad c)+b(p\quad c)(p\quad a)+c(p\quad a)(p\quad b)+2(p\quad a)(p\quad b)(p\quad c$$

Podstawmy: $t=p\quad a$, $u=p\quad b$, $v=p\quad c$. Wówczas otrzymujemy: a $b=v+t$, $c=t+u$. Zatem tożsamość, którą chcemy otrzymać, wyg stępująco:

$$(5)\qquad (u+v)uv+(v+t)vt+(t+u)tu+2tuv=(u+v)(v+t)(t+u).$$

Powyższa zależność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistyc Mamy bowiem następujące równości:

$$\begin{aligned}(u+v)(v+t)(t+u)&=uvt+u^2v+ut^2+u^2t+v^2t+v^2u+vt^2+vt\\&=(u+v)uv+(v+t)vt+(t+u)tu+2tuv.\end{aligned}$$

Dowód równości (1) został tym samym zakończony.

IX Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

Zadanie **1.** Znaleźć wszystkie funkcje dwóch zmiennych f, których a x, y i wartości $f(x,y)$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, s ce następujące warunki (dla wszystkich dodatnich liczb ca x i y):

$$\begin{aligned}f(x,x)&=x,\\f(x,y)&=f(y,x),\\(x+y)f(x,y)&=yf(x,x+y).\end{aligned}$$

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że istnieje co najwyżej jedna funkcja f spe warunki zadania.

Z pierwszego równania mamy $f(1,1)=1$. Korzystając z drugieg ciego równania otrzymujemy $f(1,2)=f(2,1)=2$. Ogólnie: jeśli obli już wartości liczb $f(x,y)$ dla wszystkich $0<x,y<z$, gdzie $z\geqslant 2$ jes ustaloną liczbą naturalną, to podstawiając do trzeciego równania znajdujemy wartości $f(x,z)$ dla $0<x<z$. Potem korzystając z drugi nania obliczamy liczby $f(z,y)$ dla $0<y<z$. Z pierwszego równania o jemy $f(z,z)=z$. Tak więc taka funkcja f, jeśli istnieje, to jest tylko

Z drugiej strony funkcja

$$f(x,y)=\text{najmniejsza wspólna wielokrotność liczb } x,\ y$$

wspólną wielokrotność oraz największy wspólny dzielnik liczb a i b
korzystując tożsamość $(a,b)[a,b]=ab$ otrzymujemy

$$(x+y)[x,y]=(x+y)\ \frac{xy}{(x,y)}=y\ \frac{x(x+y)}{(x,x+y)}=y\quad [x,x+y]\,,$$

a to jest trzecia spośród danych w zadaniu równości.

Tak więc jedyną funkcją f spełniającą dane warunki jest $f(x,y)$

Zadanie **2.** Trójkę liczb całkowitych dodatnich (a,b,c) nazywamy *qua*
rejską, jeśli istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c, w któr
kąta naprzeciwko boku c wynosi 120°. Udowodnić, że jeśli (
trójką quasi-pitagorejską, to c ma dzielnik pierwszy większ

Rozwiązanie

Niech (a,b,c) będzie trójką quasi-pitagorejską. Na mocy twierdze
nusów otrzymujemy równość

(1) $$c^2=a^2+ab+b^2.$$

Załóżmy najpierw, że liczby a, b są względnie pierwsze, tzn. ich na
wspólny dzielnik jest równy 1. Przy tym założeniu udowodnimy nawe
każdy dzielnik pierwszy liczby c jest większy od 5.

Niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby c. Liczby a, b nie m
jednocześnie parzyste, gdyż są względnie pierwsze. Stąd wynika,
$c^2=a^2+ab+b^2$ jest nieparzysta, a więc $p\neq 2$.

Przypuśćmy teraz, że $p=3$. Największy wspólny dzielnik liczb
równy 1, więc jedna z liczb a, b (powiedzmy, że jest nią a) nie jest p
przez 3. Równość (1) przepisujemy w postaci

(2) $$4c^2=(a+2b)^2+3a^2.$$

Wtedy $3|(a+2b)^2$, skąd $3|a+2b$ i w konsekwencji $9|(a+2b)^2$. Zatem l
na równości (2) jest podzielna przez 9, zaś prawa nie. Otrzymaliśmy
ność.

Przypuśćmy z kolei, że $p=5$. Tak jak w poprzednim przypadku
założyć, że liczba a nie jest podzielna przez 5. Kwadrat liczby c
może z dzielenia przez 5 dawać jedynie reszty 0, 1, 4. Stąd $3a^2\equiv\ 3$
Zatem na mocy równości (2) dostajemy $(a+2b)^2\equiv\ 2\pmod 5$.
liczby całkowitej $a+2b$ daje więc z dzielenia przez 5 resztę 2 lub 3,
wspomnieliśmy wyżej, nie jest możliwe. Otrzymana sprzeczność do
$p>5$.

Niech teraz a, b, c będą dowolnymi liczbami całkowitymi speł

$c = dc_1$ ma więc dzielnik pierwszy większy od 5 — jest nim każdy
pierwszy liczby c_1.

Uwaga 1.

Jeśli liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniają równość (1), t
(a,b,c) jest quasi-pitagorejska. Istotnie, z równości (1) wynika, że $a <$
$c^2 = a^2 + ab + b^2 < (a+b)^2$, co oznacza, że z odcinków długości a, b,
zbudować trójkąt. Ponadto z twierdzenia cosinusów wynika, że mi
naprzeciwko boku c wynosi $120°$.

Warto zauważyć, że dowód tej implikacji nie był potrzebny w po
rozwiązaniu.

Uwaga 2.

Trójka $(3,5,7)$ jest quasi-pitagorejska, co oznacza, że liczby „5" n
w treści zadania zastąpić przez większą liczbę pierwszą. Można mimo
ko wzmocnić znacznie tezę — patrz *uwaga* 4.

Uwaga 3.

Znana jest ogólna postać trójek quasi-pitagorejskich (a,b,c):

$$a = d(2xy + y^2), \quad b = d(x^2 \quad y^2), \quad c = d(x^2 + xy + y^2),$$

gdzie d jest dowolną liczbą naturalną, $x > y > 0$ i x, y są względni
sze. Jak się Czytelnik nietrudno przekona, znajomość powyższego f
pomaga w rozwiązaniu zadania!

Uwaga 4.

Można wykazać, że jeśli (a,b,c) jest trójką quasi-pitagorejską,
c ma dzielnik pierwszy postaci $6k+1$. Stąd oczywiście wynika teza
zadania, gdyż każda liczba pierwsza postaci $6k+1$ jest większa od
jest bowiem następujące, niełatwe

Twierdzenie

*Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Jeżeli istnieje taka liczba całkow
$x^2 \equiv \quad 3 \pmod{p}$, to liczba p jest postaci $6k+1$.*

W oparciu o powyższe twierdzenie dowód wspomnianego uogólni
jest trudny. Wykorzystując bowiem fragmenty zaprezentowanego r
nia, wystarczy udowodnić następujący

Fakt

Jeśli $p > 3$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $a^2 + ab + b^2$, przy czym l

tożsamości $4(a^2+ab+b^2)=(a+2b)^2+3a^2$ oraz małego twierdzenia
ta otrzymujemy $x^2=(a+2b)^2a^{p\ \ 3} \equiv \ \ 3a^{p\ \ 1} \equiv \ \ 3 \pmod{p}$. Z pow
twierdzenia wynika więc, że liczba p jest postaci $6k+1$.

Zadanie **3.** Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x,y, k
niają równanie

$$2x^2+5y^2=11(xy\ \ \ 11).$$

Rozwiązanie

Dane równanie jest równoważne równaniu $(2x\ \ \ y)(5y\ \ \ x)=121.$
czynniki stojące po lewej stronie powyższego równania muszą mieć
znak. Gdyby oba były ujemne, to mielibyśmy $2x<y<x/5$, co ozna
że liczba x jest ujemna, a to przeczy założeniom. Liczby $2x\ \ \ y$, $5y$
dodatnimi dzielnikami liczby 121. Zatem dane równanie prowadzi
układów równań:

$$\begin{cases} 2x\ \ \ y = 1 \\ 5y\ \ \ x = 121, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x\ \ \ y = 11 \\ 5y\ \ \ x = 11, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x\ \ \ y = 121 \\ 5y\ \ \ x = 1. \end{cases}$$

Rozwiązując powyższe układy dostajemy odpowiednio:

$$(x,y)=(14,27), \qquad (x,y)=(22/3,11/3), \qquad (x,y)=(202/3,41$$

Tak więc jedynym rozwiązaniem danego równania w liczbach całkowi
para $(x,y)=(14,27)$.

Zadanie **4.** Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowityc
my, że dla $n=1,2,\ldots,1998$ wartości $P(n)$ są liczbami nat
trzycyfrowymi. Udowodnić, że wielomian P nie ma pierwias
kowitych.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje taka liczba całkowita m, że $P(m)=0$. Zna
taką liczbę $n\in\{1,2,\ldots,1998\}$, że $m\equiv n \pmod{1998}$. Wtedy $0=P(m$
(mod 1998). Liczba $P(n)$ jest trzycyfrowa, nie może być więc podziel
1998. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie **5.** Niech a będzie cyfrą nieparzystą, zaś b cyfrą parzystą. Ud
że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje liczba
dodatnia, podzielna przez 2^n, w której zapisie dziesiętnym n
pują cyfry inne niż a i b.

Rozwiązanie

Dla $n=1$ wystarczy przyjąć $d_1=b$. Załóżmy, że dla pewnego n
skonstruować liczbę d_n. Wtedy liczba ta z dzielenia przez 2^{n+1} daje
lub 2^n. De niujemy liczbę

$$d_{n+1}=\begin{cases}10^n b+d_n & \text{jeśli } d_n\equiv 0 \pmod{2^{n+1}},\\ 10^n a+d_n & \text{jeśli } d_n\equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}.\end{cases}$$

(Innymi słowy, d_{n+1} powstaje z liczby d_n przez dopisanie na jej p
cyfry b bądź a, w zależności od tego, czy d_n dzieli się przez 2^{n+1},
Liczba d_{n+1} ma oczywiście $n+1$ cyfr, z których każda jest równa
Pozostaje wykazać, że d_{n+1} dzieli się przez 2^{n+1}. Cyfra a jest niep
zaś b parzysta, więc na mocy powyższych równości dostajemy

$$d_{n+1}\equiv\begin{cases}0+0 \pmod{2^{n+1}} & \text{jeśli } d_n\equiv 0 \pmod{2^{n+1}},\\ 2^n+2^n \pmod{2^{n+1}} & \text{jeśli } d_n\equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}.\end{cases}$$

W obu przypadkach liczba d_{n+1} jest podzielna przez 2^{n+1}. Dowód in
jest więc zakończony.

Uwaga

Każda liczba całkowita dodatnia ma *dwa* rozwinięcia dziesiętne, n
17 można także zapisać jako 16,99999... . W treści zadania milcząc
daliśmy, że chodzi o zapis dziesiętny „bez przecinka”. Bez tego z
można bardzo łatwo rozwiązać zadanie w przypadku gdy $a=9$: liczb
ci $d_n=b999\ldots 99{,}99999\ldots$ (gdzie przed przecinkiem wypisano n dzi
ma jak widać w zapisie dziesiętnym tylko cyfry a i b oraz jest podziel
2^n, gdyż $d_n=10^n\ \ (b+1)$.

Zadanie **6.** Niech P będzie wielomianem stopnia 6 i niech a, b będą
rzeczywistymi takimi, że $0<a<b$. Założmy, że

$$P(a)=P(\ a),\qquad P(b)=P(\ b),\qquad P\ \ '(0)=0.$$

Udowodnić, że $P(x)=P(\ x)$ dla wszystkich liczb rzeczywis

Rozwiązanie

Niech $Q(x)=P(x)\quad P(\ \ x)$. Wtedy Q jest wielomianem stopnia c
żej 5, $Q'(0)=0$ oraz $Q(0)=Q(a)=Q(\ \ a)=Q(b)=Q(\ \ b)=0$. Za
lomian Q ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych. Przy tym x
pierwiastkiem wielomianu Q i jego pochodnej, jest więc pierwiastkie
krotnym wielomianu Q. Zatem wielomian Q jest tożsamościowo rów
skąd $P(x)=P(\ \ x)$ dla wszystkich x rzeczywistych.

Rozwiązanie

Niech x_0 będzie dowolną liczbą rzeczywistą oraz niech $f(x_0) =$
stawiając do danego równania $x=y=x_0$ dostajemy $f(c^2)=2c$. Kł
lej $x=y=c^2$ otrzymujemy $f(4c^2)=4c$. Podstawiając wreszcie $x=$
$y=4c^2$ mamy $f(4c^2)=5c$. Zatem $4c=5c$, skąd $c=0$. Ponieważ liczb
ła wybrana dowolnie, więc jedyną funkcją f spełniającą dane równ
$f(x)=0$.

Zadanie **8.** Niech $P_k(x)=1+x+x^2+\quad +x^{k\;1}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_k(x)=2^{n\;1}\,P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej do

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $L(x)$ oraz $P(x)$ odpowiednio lewą oraz prawą st
nej w zadaniu równości. Ponieważ $(1 \quad x)P_k(x)=1 \quad x^k$, więc

$$(1 \quad x) \quad L(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(1 \quad x^k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=2^n \quad (1+$$

Ponadto otrzymujemy

$$(1 \quad x) \quad P(x) = 2\left(1 \quad \frac{1+x}{2}\right) \quad 2^{n\;1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)=2^n\left(1 \quad \left(\frac{1+x}{2}\right)\right.$$

$$= 2^n \quad (1+x)^n.$$

Zatem $L(x)=P(x)$ dla $x\neq 1$. Obie funkcje $L(x)$ i $P(x)$ są wielor
skąd wynika, że $L(x)=P(x)$ dla wszystkich x.

Zadanie **9.** Liczby α, β spełniają $0<\alpha<\beta<\pi/2$. Niech γ, δ będą liczb
ślonymi przez warunki:

(i) $0<\gamma<\pi/2$ oraz liczba $\mathrm{tg}\gamma$ jest średnią arytmetyczną
i $\mathrm{tg}\beta$;

(ii) $0<\delta<\pi/2$ oraz liczba $1/\cos\delta$ jest średnią arytmety
$1/\cos\alpha$ i $1/\cos\beta$.

Udowodnić, że $\gamma<\delta$.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech $f(t)=\sqrt{1+t^2}$. Wówczas dla dowolnych liczb rzeczywistyc
nich $u\neq v$ zachodzi nierówność $f(\frac{1}{2}(u+v))<\frac{1}{2}f(u)+\frac{1}{2}f(v)$, tzn.

(1) $$\sqrt{1+\tfrac{1}{4}(u+v)^2}<\tfrac{1}{2}\sqrt{1+u^2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1+v^2}\,.$$

Podnosząc ponownie do kwadratu, upraszczamy powyższą nierównos
staci $2uv < u^2 + v^2$, czyli $(u \quad v)^2 > 0$). Wykorzystując nierówność (
mujemy

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma} = f(\mathrm{tg}\gamma) = f\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{2}\right) <$$

$$< \frac{f(\mathrm{tg}\alpha)+f(\mathrm{tg}\beta)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right) =$$

skąd $\gamma < \delta$.

Sposób II

Przedstawimy rozwiązanie geometryczne.

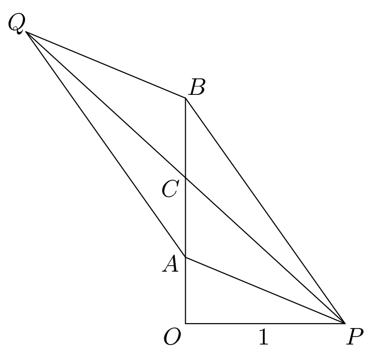
Na płaszczyźnie rysujemy odcinek jednostkowy OP (rys. 1). Wy
punkty A, B leżące po tej samej stronie prostej OP tak, aby zachod
ności: $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB = 90^\circ$, $\sphericalangle OPA = \alpha$, $\sphericalangle OPB = \beta$. Wtedy O
$OB = \mathrm{tg}\beta$, $PA = 1/\cos\alpha$, $PB = 1/\cos\beta$. Oznaczmy przez C środek
AB. Na mocy założeń

$$OC = \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{2} = \mathrm{tg}\gamma, \qquad \text{skąd} \quad \sphericalangle OPC = \gamma \quad \text{oraz} \quad PC = \frac{1}{\cos}$$

Niech Q będzie punktem symetrycznym do P względem punktu C. C
$PAQB$ jest równoległobokiem, a więc $AQ = PB = 1/\cos\beta$. Stąd

$$\frac{2}{\cos\delta} = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} = PA + AQ > PQ = 2 \quad PC = \frac{2}{\cos\gamma},$$

czyli $\gamma < \delta$.



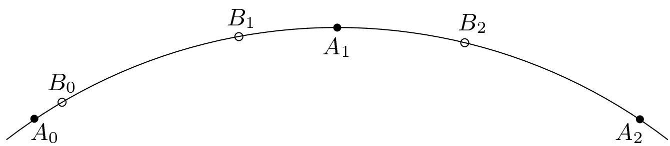
rys. 1

Zadanie **10.** Niech $n \geqslant 4$ będzie parzystą liczbą całkowitą. W okrąg o pr

Rozwiązanie

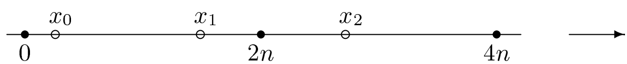
Bez straty ogólności możemy założyć, że rozważany okrąg ma
$2n(n\;\;1)$, zamiast 2π.

Wierzchołki $(n\;\;1)$-kąta foremnego $A_0A_1\ldots A_{n\;2}$ dzielą dany o
$n\;\;1$ łuków, każdy długości $2n$. Na mocy zasady szu adkowej, pew
kolejne wierzchołki n-kąta foremnego $B_0B_1\ldots B_{n\;1}$ leżą w jednym z
ków. Bez straty ogólności możemy więc przyjąć, że punkty B_0, B_1
łuku A_0A_1, przy czym $A_0B_0 < A_0B_1$ oraz $A_0B_0 \leqslant B_1A_1$ (rys. 1).



rys. 1

Rozetnijmy dany okrąg w punkcie A_0 i rozłóżmy go na osi liczbowej
punkty $A_0, A_1, A_2, \ldots$ pokryły się odpowiednio ze współrzędnymi 0, 2
(rys. 2). Wówczas punkty $B_0, B_1, B_2, \ldots$ pokryją się odpowiednio z
rzędnymi $x_0, x_1, x_2, \ldots$, gdzie $x_k = x_0 + 2k(n\;\;1)$ $(k = 0,1,2,\ldots,n\;\;1)$.



rys. 2

Niżej udowodnimy, że:

(a) jeżeli $1 \leqslant k \leqslant n/2$, to punkt B_k leży między $A_{k\;1}$ a A_k, bliżej A
(b) jeżeli $n/2 < k \leqslant n\;\;1$, to punkt B_k leży między $A_{k\;1}$ a A_k, bliże

Zatem jeżeli $1 \leqslant k \leqslant n/2$, to odległość od punktu B_k do najbliższeg
chołka n-kąta $A_0A_1\ldots A_{n\;1}$ wynosi $2kn\;\;\;x_k = 2k\;\;\;x_0$; w przeciwn
odległość ta wynosi $x_k\;\;\;(2k\;\;\;2)n = x_0\;\;\;2k + 2n$. Stąd

$$S = x_0 + \sum_{k=1}^{n/2}(2k\quad x_0) + \sum_{k=n/2+1}^{n\;\;1}(x_0\quad 2k + 2n) = \sum_{k=1}^{n/2} 2k + \sum_{k=n/2+1}^{n\;\;1}(2n$$

co jest wielkością zależną tylko od n.

Pozostało udowodnić zdania (a) oraz (b).

Na mocy poczynionych założeń otrzymujemy $0 \leqslant 2x_0 \leqslant x_0 + (2n$
skąd w szczególności

$$\begin{array}{lll} 2k\quad n \leqslant x_0 \leqslant 2k & \text{dla} & 1 \leqslant k \leqslant n/2, \\ 2k\quad 2n \leqslant x_0 \leqslant 2k\quad n & \text{dla} & n/2 < k \leqslant n. \end{array}$$

Zadanie **11.** Niech a, b, c będą długościami boków pewnego trójkąta,
promieniem okręgu opisanego na nim. Udowodnić, że

$$(1) \qquad R \geqslant \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}\,.$$

Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy kąty naprzeciwko boków a, b, c odpowiednio przez A,
mocy twierdzenia sinusów $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$. Po
jąc powyższe zależności do nierówności (1) sprowadzamy ją do nier

$$R \geqslant \frac{4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B)}{2\sqrt{8R^2(\sin^2 A+\sin^2 B)-4R^2\sin^2 C}}\,.$$

Przekształcając równoważnie ostatnią nierówność dostajemy kolejn

$$2(\sin^2 A+\sin^2 B)-\sin^2 C \geqslant (\sin^2 A+\sin^2 B)^2,$$
$$(\sin^2 A+\sin^2 B)(2-\sin^2 A-\sin^2 B) \geqslant \sin^2 C,$$
$$(\sin^2 A+\sin^2 B)(\cos^2 A+\cos^2 B) \geqslant \sin^2 C.$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności Schwarza (p. *Dodatek*,
ność Schwarza", str. 112):

$$(2) \quad (\sin^2 A+\sin^2 B)(\cos^2 B+\cos^2 A) \geqslant (\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A)^2 =$$

Dowód nierówności (1) jest więc zakończony.

W nierówności (1) zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy s
jest równość w nierówności (2). To natomiast jest możliwe wted
wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista λ, że

$$(3) \qquad \sin A = \lambda\cos B \qquad \text{oraz} \qquad \sin B = \lambda\cos A.$$

Z powyższych związków wynika, że $\lambda>0$ oraz że kąty A, B są ostre.
stronami równości (3) otrzymujemy $\sin 2A=\sin 2B$. To oznacza, że
lub $2A+2B=\pi$, czyli $A=B$ lub $A+B=\pi/2$.

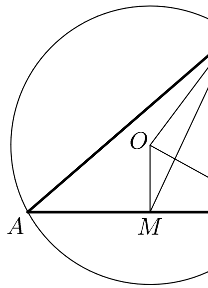
Również odwrotnie: jeśli $A=B$, to zależność (3) jest spełniona
wolnej liczby dodatniej λ. Jeśli natomiast $A+B=\pi/2$, to związk
prawdziwe dla $\lambda=1$. Zatem w obu przypadkach istnieje taka liczba
spełnione są obie równości (3).

Oznaczmy przez A, B, C wierzchołki leżące odpowiednio nap
boków a, b, c. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkąc
zaś niech M będzie środkiem boku AB (rys. 1).

Długość środkowej m_c poprowadzonej do boku c spełnia zależno

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 \quad c^2. \tag{4}$$

Zatem nierówność (1) można przepisać w następującej, równoważne
$4Rm_c \geqslant a^2 + b^2$. Ze związku (4) wyliczamy wielkość $a^2 + b^2$ i podstaw
do ostatniej nierówności. W ten sposób nierówność, którą mamy ud
sprowadza się do zależności $8Rm_c \geqslant 4m_c^2 + c^2$.



rys. 1

Tę nierówność z kolei traktujemy jako nierówność kwadratową z „niewiadomą” m_c i „parametrami” R, c. Rozwiązując ją dostajemy równoważną formę nierówności (1):

$$|m_c \quad R| \leqslant \sqrt{R^2 \quad (c/2)^2},$$

czyli $|MC \quad OC| \leqslant OM$. Otrzymaliśmy nierówność trójkąta zastosowaną do trójkąta COM, a więc tym samym udowodniliśmy nierówność (1).

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkty C, O, M są
niowe. To zaś jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BC$ lub
czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$ lub $\sphericalangle ACB = 90°$.

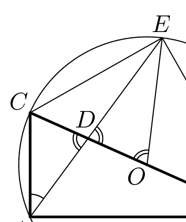
Zadanie **12.** W trójkącie ABC zachodzi $\sphericalangle BAC = 90°$. Punkt D leży na
i $\sphericalangle BDA = 2\sphericalangle BAD$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}\right).$$

Rozwiązanie

Sposób I

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. O
przez E punkt przecięcia prostej AD z tym okręgiem (rys. 1).



Wówczas $\sphericalangle BOE = 2\sphericalangle BAE = \sphericalangle CDE$, co dowodzi, że $DE = OE$. Na mocy podobieństwa trójkątów ADC i BDE otrzymujemy

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{DE}.$$

Stąd

Sposób II

Oznaczmy: $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle CAD$. Z danych w treści zadania
że $\sphericalangle BDA = 2\alpha$, $\sphericalangle CDA = 2\beta$. Z twierdzenia sinusów wynika, że

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AD}{CD} = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta}\,.$$

Korzystając z tożsamości

$$\sin 3\varphi = \sin\varphi \cos 2\varphi + \cos\varphi \sin 2\varphi = \sin\varphi(\cos 2\varphi + 2\cos^2\varphi)$$

oraz równości $\alpha + \beta = 90^\circ$ otrzymujemy

$$\frac{AD}{BD} + \frac{AD}{CD} = (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = 0 + 2 = 2\,,$$

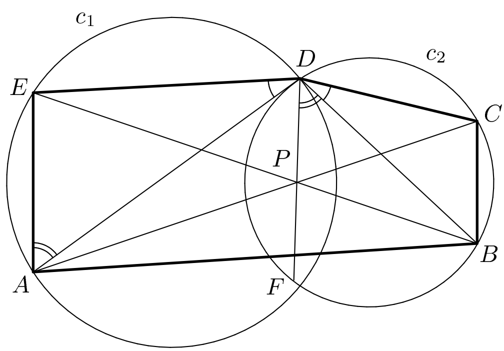
co kończy dowód danej tożsamości.

Zadanie **13.** W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równo
$\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w p
Udowodnić, że $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BDP$ oraz $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ADP$.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech c_1 i c_2 będą odpowiednio okręgami opisanymi na trójkąta
i BCD. Załóżmy, że prosta DP przecina okrąg c_2 w punkcie F (rys



rys. 1

Ponieważ $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$, więc stosunek długości odcinków E
jest równy stosunkowi długości okręgów c_1 i c_2. Zatem jednokładnoś
ku P, przekształcająca odcinek AE na odcinek CB, przekształca
na okrąg c_2. Ta sama jednokładność przeprowadza łuk DE okręgu c

Sposób II

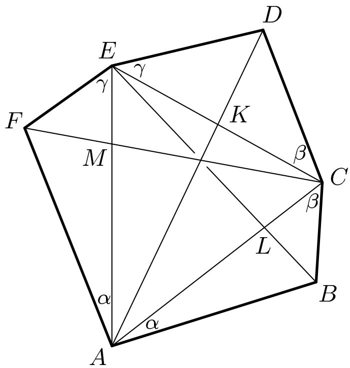
Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

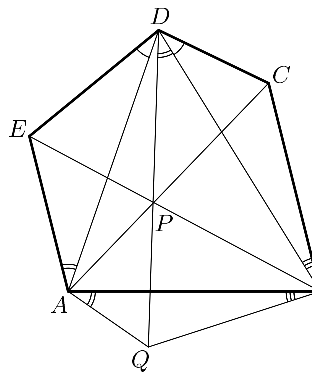
Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Czworokąty $ABCE$, $CDEA$, E
wypukłe oraz zachodzą równości:

$$\sphericalangle EAF = \sphericalangle CAB = \alpha, \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle ECD = \beta, \quad \sphericalangle CED = \sphericalangle AE$$

Wówczas przekątne AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie



rys. 2



rys. 3

Dowód

Przez $[XYZ]$ będziemy oznaczać pole trójkąta XYZ.

Niech K, L, M będą odpowiednio punktami przecięcia następują
odcinków: AD,EC; BE,CA; CF,AE (rys. 2). Dostajemy równości

$$\frac{AL}{LC}\ \frac{CK}{KE}\ \frac{EM}{MA} = \frac{[ABE]}{[CBE]}\ \frac{[CDA]}{[EDA]}\ \frac{[EFC]}{[AFC]} = \frac{[ABE]}{[AFC]}\ \frac{[CDA]}{[CBE]}\ \frac{[E}{[E}$$

$$= \frac{AB \quad AE}{AF \quad AC}\frac{CD \quad CA}{CB \quad CE}\frac{EF \quad EC}{ED \quad EA} = \frac{AB}{CB}\ \frac{CD}{ED}\ \frac{EF}{AF}$$

$$= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\ \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\ \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 1.$$

(Pierwsza równość wynika z twierdzenia Talesa oraz z faktu, że stos
trójkątów o wspólnej podstawie jest równy stosunkowi wysokości o
nych na tę podstawę. Trzecia równość to zastosowanie wzoru

$$[XYZ] = \tfrac{1}{2} XY \quad XZ \quad \sin \sphericalangle YXZ.$$

Piątą równość otrzymujemy z twierdzenia sinusów). Na mocy tw

(rys. 3). Na mocy lematu, zastosowanego do sześciokąta $AQBCDE$
D, P, Q są współliniowe. Ponieważ odcinki AE i BC są równoległe

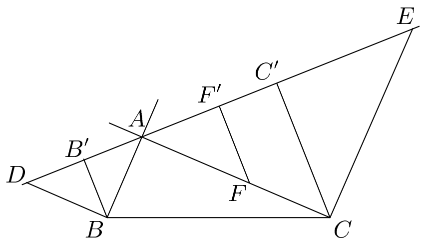
$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle EAD + \sphericalangle CBD = \sphericalangle QAB + \sphericalangle QBA = 180^\circ \quad \sphericalangle AQ$$

Zatem na czworokącie $AQBD$ da się opisać okrąg, stąd $\sphericalangle EAD =$
$= \sphericalangle BDQ = \sphericalangle BDP$. Drugą równość dostajemy analogicznie.

Zadanie **14.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Prosta prze
przez B i równoległa do AC przecina dwusieczną kąta zew
$\sphericalangle BAC$ w punkcie D. Prosta przechodząca przez C i równ
AB przecina tę dwusieczną w punkcie E. Punkt F leży na
i spełniona jest równość $FC = AB$. Udowodnić, że $DF = F$

Rozwiązanie

Ponieważ proste BD i AC są równoległe oraz AD jest dwusiec
zewnętrznego BAC, więc $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BDA = \alpha$. Stąd $\sphericalangle CAE = \sphericalangle C$
Również $AB = BD$ oraz $AC = CE$. Niech B', C', F' będą odpowie
tami prostokątnymi punktów B, C, F na prostą DE (rys. 1).



rys. 1

Z warunku $FC = AB$ wynika, że $AB + AF = AC$, skąd dostajemy
$B'F' = (AB + AF)\cos\alpha = AC\cos\alpha = AC' = C'E$. Ponadto $DB' = B$
$= FC\cos\alpha = F'C'$. Zatem $DF' = F'E$, czyli $DF = FE$.

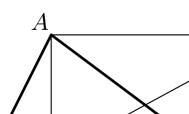
Zadanie **15.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest spodkiem
opuszczonej z wierzchołka A na bok BC. Punkt E leży n
AD i spełnione jest równanie

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Punkt F jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzcho
bok BE. Udowodnić, że $\sphericalangle AFC = 90^\circ$.

Rozwiązanie

Niech P będzie takim punktem, że czworo-
kąt $ADCP$ jest prostokątem (rys. 1). Wówczas



leży na okręgu opisanym na prostokącie $ADCP$. Zatem

$$\sphericalangle AFC = \sphericalangle ADC = 90^\circ.$$

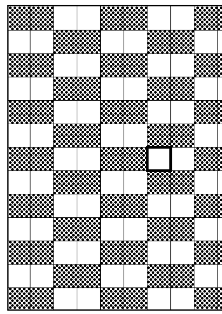
Zadanie **16.** Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13 13 czterd
dwoma klockami o wymiarach 4 1 w taki sposób, że tylko
we pole szachownicy pozostanie nie zakryte? (Zakładamy,
klocek zakrywa cztery pełne pola szachownicy).

Rozwiązanie

Nie można.

Sposób I

Pokolorujmy daną szachownicę tak jak na rysunku 1. Każdy klocek o wymiarach 4 1, położony pionowo lub poziomo, przykrywa dokładnie dwa pokolorowane i dwa niepokolorowane pola. Środkowe pole jest niepokolorowane. Gdyby więc żądane pokrycie istniało, to liczba pól pokolorowanych danej szachownicy musiałaby być o 1 *mniejsza* niż liczba pól niepokolorowanych.



rys. 1

Jednak bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że jest odwrotnie: p
lorowanych jest 85, zaś niepokolorowanych 84. Otrzymaliśmy sprzec

Sposób II

Ponumerujmy pola szachownicy jak na rysunku 2. Wówczas każd
4 1 położony na szachownicy przykrywa 4 pola z różnymi numera

Cała szachownica zawiera po 42 pola z liczbami 2, 3 i 4 oraz
z liczbą 1. Po usunięciu środkowego pola pozostanie tylko 41 pól z
nie można więc umieścić 42 klocków na szachownicy bez pokrycia t

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	$\boxed{4}$	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	$\boxed{1}$	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Uwaga

Bardziej narzucające wydaje się ponumerowanie pól szachownic sób pokazany na rysunku 3. W wielu zadaniach olimpijskich o pok szachownicy właśnie takie ponumerowanie rozstrzyga, czy daną szac da się pokryć odpowiednimi kostkami. Jednak w tym przypadku po wanie z rysunku 3 do niczego nie prowadzi: po usunięciu środkowego szachownicy pozostaną po 42 pola z każdą z liczb 1, 2, 3, 4.

Zadanie **17.** Niech n i k będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Danyc przedmiotów (tych samych rozmiarów) i k pudełek, z któr pomieści n przedmiotów. Każdy przedmiot jest pokolorov nym z k różnych kolorów. Wykazać, że można rozmieścić mioty w pudełkach w taki sposób, że w każdym pudełku z przedmioty w co najwyżej dwóch kolorach.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem k. Dla $k=1$ teza j wiście prawdziwa. Załóżmy więc, że żądane rozmieszczenie jest mo pewnego k; wykażemy, że można rozmieścić przedmioty, gdy kolorów łek jest $k+1$.

Ponieważ wszystkich przedmiotów jest $n(k+1)$, więc przedmiot nego koloru (powiedzmy białego) jest co najwyżej n. Z tego sam wodu przedmiotów pewnego innego koloru (na przykład czarnego najmniej n. Wkładamy do pudełka wszystkie przedmioty białe oraz niamy wolne miejsce przedmiotami czarnymi. W pudełku tym zna więc n przedmiotów co najwyżej dwóch kolorów. Pozostało do wype pudełek nk przedmiotami k kolorów (białych przedmiotów już nie r na mocy założenia indukcyjnego jest wykonalne.

Zadanie **18.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla który zbiór S o następujących własnościach:

(i) S składa się z n liczb całkowitych dodatnich, z których są mniejsze od $2^{n\ 1}$;

(ii) dla dowolnych dwóch różnych niepustych podzbiorów A i S suma elementów zbioru A jest różna od sumy elemen ru B.

Rozwiązanie

Dla $n=1$ lub $n=2$ nie istnieje zbiór S mający własność (i). D jedynym zbiorem S spełniającym warunek (i) jest zbiór $\{1,2,3\}$, je

Jeżeli $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ *jest zbiorem spełniającym warunki* (i), (ii)
nego n*, to zbiór* $S\ =\{1,2a_1,2a_2,\dots,2a_n\}$ *spełnia warunki* (i), (ii) *d*

Istotnie, na mocy własności (i) zbioru S, każdy element zbioru S je
szy od 2^n. Zbiór S ma więc własność (i). Jeśli teraz A, B są do
rozłącznymi podzbiorami zbioru S , przy czym żaden z nich nie za
to sumy elementów tych zbiorów są różne (na mocy własności (ii) zb
Jeśli natomiast jeden z podzbiorów A, B (na przykład A) zawiera 1,
elementów zbioru A jest nieparzysta, zaś zbioru B — parzysta; wie
są więc różne. To dowodzi, że zbiór S ma również własność (ii).

Odpowiedź: Zbiór S o żądanych własnościach istnieje wtedy i tylk
gdy $n\geqslant 4$.

Zadanie **19.** Rozważmy mecz ping-ponga między dwiema drużynami,
każda składa się z 1000 graczy. Każdy gracz grał przeciwko
z graczy przeciwnej drużyny dokładnie raz (w ping-pong
remisów). Udowodnić, że istnieje dziesięciu graczy z jedne
takich, że każdy z graczy drużyny przeciwnej przegrał z co
jednym z tych dziesięciu graczy.

Rozwiązanie

Rozważmy najpierw mecz ping-ponga, w którym uczestniczą d
drużyny: jedna składająca się z m zawodników, a druga z n. Wówcz
nej z tych drużyn istnieje zawodnik, który wygrał z co najmniej po
wodników drużyny przeciwnej.

Dowód: Przypuśćmy, że każdy zawodnik wygrał z mniej niż połow
drużyny przeciwnej. Wtedy liczba zwycięstw jednej drużyny jest mni
m $n/2$; zaś drugiej jest mniejsza niż n $m/2$. Zatem łączna liczba
w meczu jest *mniejsza* niż m n. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż łąc
wszystkich zwycięstw jest równa liczbie wszystkich rozgrywek, czyli

Powracamy do drużyn 1000-osobowych.

Zawodnika, który wygrał z co najmniej 500 graczami drużyny
nej, odznaczamy medalem (taki istnieje, na mocy powyższych ro
a wszystkich tych, którzy z nim przegrali, odsyłamy do domu. Po t
cji postępujemy analogicznie: znajdujemy zawodnika (być może z t
drużyny, co poprzednio), który wygrał z co najmniej połową graczy
przeciwnej, dajemy mu medal, a tych, którzy z nim przegrali, odsy
domu. Postępowanie to kontynuujemy do momentu, gdy ostatni z
którejś z drużyn (nazwijmy ją A) pojedzie do domu. Niech B bę

samym co najwyżej dziesięciu zawodników drużyny B dostało meda
staje zauważyć, że każdy zawodnik drużyny A przegrał z pewnym n
drużyny B.

Zadanie **20.** Powiemy, że liczba całkowita dodatnia m *pokrywa* liczbę 199
9, 9, 8 pojawiają się w tej właśnie kolejności jako cyfry m.
kład 1998 jest pokrywana przez 2**1**59**9**36**98**, ale nie przez 21
Niech $k(n)$ oznacza liczbę tych liczb całkowitych dodatnich,
krywają 1998 i mają dokładnie n cyfr ($n \geqslant 5$), z których ws
różne od 0. Jaką resztę z dzielenia przez 8 daje $k(n)$?

Rozwiązanie

Niech $1 \leqslant g < h < i < j \leqslant n$ będą ustalonymi liczbami całkowity
ważmy wszystkie takie liczby n-cyfrowe $a = \overline{a_1 \ldots a_n}$, o cyfrach różnych

(1)
$$\begin{array}{llll} a_g = 1, & a_i = 9, & a_\ell \neq 1 \ \text{ dla } \ell < g; & a_\ell \neq 9 \ \text{ dla } h < \\ a_h = 9, & a_j = 8, & a_\ell \neq 9 \ \text{ dla } g < \ell < h; & a_\ell \neq 8 \ \text{ dla } i < \end{array}$$

(Powyższy warunek oznacza, że spośród tych czwórek „1,9,9,8”, k
krywają liczbę a, czwórka pokrywająca tę liczbę na miejscach g, h,
usytuowana najbardziej na lewo).

Wszystkich liczb spełniających warunek (1) jest

(2)
$$8^{g\quad 1}\;\; 8^{h\;\; g\;\; 1}\;\; 8^{i\;\; h\;\; 1}\;\; 8^{j\;\; i\;\; 1}\;\; 9^{n\;\; j}\,.$$

Wyrażenie to daje resztę 1 z dzielenia przez 8 dla $g = 1$, $h = 2$, $i = 3$, j
jest podzielne przez 8 dla wszystkich innych układów $1 \leqslant g < h < i <$

Liczbę $k(n)$ otrzymujemy dodając wyrażenie (2) po wszystkich m
wyborach liczb $1 \leqslant g < h < i < j \leqslant n$. Zatem liczba $k(n)$ z dzielenia
daje resztę **1**.

DODATEK [2]

A. Rozwiązywanie rekurencji liniowych

Rozważamy ciągi spełniające równanie rekurencyjne

$$c_{n+2} = ac_{n+1} + bc_n \qquad (n \geqslant 0), \tag{1}$$

gdzie a, b są danymi liczbami rzeczywistymi. Chcielibyśmy umieć r
równanie rekurencyjne (1), tzn. wypisać wzór ogólny na n-ty wyraz c
znając wartości początkowe c_0 i c_1. Okazuje się, że istnieje ogólna
pozwalająca rozwiązywać równania rekurencyjne postaci (1). Zilustr
trzema przykładami.

Przykład 1.

Wyznaczymy wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu (c_n) danego wzor

$$c_0 = 5, \quad c_1 = 13, \qquad c_{n+2} = 2c_{n+1} + 3c_n \quad (n \geqslant 0). \tag{2}$$

(Ciąg $d_n = c_n \; 1$ pojawił się w rozwiązaniu zadania 2 z *XXI Austric*
skich Zawodów Matematycznych, zob. str. 76).

Zapominamy na chwilę o danych wartościach początkowych c_0,
ramy się znaleźć jak najwięcej ciągów c_n, które spełniają dane rów
kurencyjne. Najpierw szukamy niezerowych ciągów geometrycznych
$c_n = x^n$, dla których spełnione jest dane równanie rekurencyjne. Licz
musi więc dla dowolnego $n \geqslant 0$ spełniać równanie

$$x^{n+2} = 2x^{n+1} + 3x^n, \qquad \text{czyli} \qquad x^2 = 2x + 3.$$

Otrzymane równanie nazywamy *równaniem charakterystycznym* rów
kurencyjnego (2). Rozwiązując je uzyskujemy $x_1 = 3$, $x_2 = \; 1$. Zat
geometryczne $c_n = 3^n$ oraz $c_n = (\; 1)^n$ spełniają dane równanie rekur
Stąd wynika, że dla dowolnych liczb α, β, ciąg postaci

$$c_n = 3^n\alpha + (\; 1)^n\beta$$

również spełnia nasze równanie rekurencyjne. Pozostało dobrać ta
α, β, aby $c_0 = 5$ oraz $c_1 = 13$. W tym celu układamy układ równań

$$\begin{cases} \alpha + \beta = c_0 = 5 \\ 3\alpha \;\; \beta = c_1 = 13, \end{cases}$$

skąd otrzymujemy $\alpha = \frac{9}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$. Zatem wzór ogólny na n-ty wyraz
określonego warunkami (2) wygląda następująco:

Przykład 2.

Tym razem wyznaczymy wzór na n-ty wyraz ciągu c_n danego w

(3) $$c_0 = 0, \quad c_1 = 2, \qquad c_{n+2} = \quad 2c_{n+1} \quad 2c_n \quad (n \geqslant 0).$$

Podobnie jak poprzednio, staramy się znaleźć niezerowe ciągi geo ne postaci $c_n = x^n$ spełniające powyższe równanie rekurencyjne. W podstawiamy powyższą równość do danego równania rekurencyjneg mując jego równanie charakterystyczne:

(4) $$x^2 = \quad 2x \quad 2.$$

Niestety, powyższe równanie *nie ma* rozwiązań rzeczywistych, a wię nieją niezerowe rzeczywiste ciągi geometryczne spełniające równa rencyjne (3). Jednak wiemy, że istnieją *zespolone* rozwiązania równ dane wzorami $x_1 = 1 \quad i$ oraz $x_2 = 1 + i$, dzięki czemu możemy konty naszą metodę przy użyciu liczb zespolonych.

Ciągi $c_n = (1 \quad i)^n$ oraz $c_n = (1+i)^n$ spełniają nasze równanie rek ne. Stąd dla dowolnych liczb zespolonych α, β, ciąg c_n dany wzore

$$c_n = (1 \quad i)^n \alpha + (1+i)^n \beta$$

również spełnia dane równanie rekurencyjne.

Pozostało wyznaczyć takie liczby (zespolone) α, β, dla któryc $c_1 = 2$. Podobnie jak poprzednio, układamy i rozwiązujemy odpowie równań, skąd dostajemy $\alpha = i$, $\beta = \quad i$. Zatem wzór ogólny na n-t ciągu c_n danego wzorami (3) wynosi

$$c_n = (1 \quad i)^n i \quad (1+i)^n i.$$

Ponieważ ciąg c_n składa się z wyrazów rzeczywistych, więc chci tak przekształcić powyższy wzór, aby wyeliminować z niego liczby ze W tym celu skorzystamy ze wzoru de Moivre'a:

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + \sin nt,$$

gdzie n jest liczbą naturalną, a t rzeczywistą. Mamy bowiem:

$$(1 \quad i)^n = (\sqrt{2})^n \quad (\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{i}{\sqrt{2}})^n = (\sqrt{2})^n \; (\cos(\quad \frac{\pi}{4}) + i \sin(\quad \frac{\pi}{4}))^n =$$
$$= (\sqrt{2})^n \; (\cos(\quad \frac{n\pi}{4}) + i \sin(\quad \frac{n\pi}{4})) = (\sqrt{2})^n \; (\cos(\frac{n\pi}{4}) \quad i \sin$$

Analogicznie obliczamy, że

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \; (\cos(\frac{n\pi}{4}) + i \sin(\frac{n\pi}{4})).$$

Przykład 3.

Wyznaczymy z kolei wzór na n-ty wyraz ciągu c_n danego wzoram

(5) $$c_0 = 1, \quad c_1 = \quad 4, \qquad c_{n+2} = 4c_{n+1} \quad 4c_n \quad (n \geqslant 0).$$

Tak jak w poprzednich dwóch przykładach, szukamy niezerowych geometrycznych postaci $c_n = x^n$, spełniających dane równanie rekur Tym razem układając i rozwiązując odpowiednie równanie charakte ne, widzimy, że ma ono jeden podwójny pierwiastek: $x_1 = x_2 = 2$. Za nieje tylko jeden ciąg geometryczny $c_n = 2^n$ spełniający dane równa rencyjne. Aby ułożyć odpowiedni układ równań i wykorzystać war czątkowe, musimy znaleźć drugi, „całkiem inny” ciąg spełniający na nanie rekurencyjne. Jak Czytelnik bez trudu sprawdzi, ciąg $c_n = n2^n$ dane równanie rekurencyjne. (Ogólnie: jeśli x_1 jest pierwiastkiem *po* równania charakterystycznego, to ciągi x_1^n oraz nx_1^n spełniają dane r rekurencyjne).

Pozostało kontynuować jak w poprzednich przykładach: Dla do liczb rzeczywistych α, β, ciąg

$$c_n = 2^n \alpha + n 2^n \beta$$

spełnia dane równanie rekurencyjne. Wykorzystując wartości po c_0, c_1, układamy i rozwiązujemy odpowiedni układ równań, skąd ot my $\alpha = 1$, $\beta = \quad 3$. Zatem wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu c_n daneg mi (5) ma postać

$$c_n = (1 \quad 3n) \quad 2^n.$$

Podsumowanie, zarys ogólnej metody

Mamy nadzieję, że powyższe przykłady wyczerpująco ilustrują p wioną metodę. Jednak dla wygody Czytelnika naszkicujemy na konie algorytm postępowania w ogólnym przypadku.

Chcemy rozwiązać równanie rekurencyjne postaci (1), gdy znan by a, b oraz wartości początkowe c_0, c_1. Zastanawiamy się najpier niezerowe ciągi geometryczne postaci $c_n = x^n$ (być może o wyrazac lonych) spełniają równanie (1). W tym celu podstawiamy powyższą do związku (1) otrzymując równanie

$$x^{n+2} = ax^{n+1} + bx^n \ ,$$

które sprowadza się do $x^2 = ax + b$. Równanie to nazywamy *równan*

(a) *Liczby x_1 i x_2 są różne*

Wówczas dwa różne ciągi geometryczne $c_n = x_1^n$ oraz $c_n = x_2^n$ s
dane równanie rekurencyjne. Ciągi te nazywamy *ciągami bazowymi r*
rekurencyjnego (1). Zależność (1) jest więc spełniona przez wszyst
postaci

$$c_n = x_1^n \alpha + x_2^n \beta, \tag{6}$$

gdzie α, β są dowolnymi liczbami zespolonymi. Ponieważ wszystkie
ciągu rekurencyjnego są wyznaczone przez wartości początkowe c_0
ramy się tak dopasować liczby α i β, aby równanie (6) było spełn
$n = 0$ i $n = 1$. Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{cases} \alpha + \beta = c_0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = c_1, \end{cases}$$

który ma zawsze rozwiązanie:

$$\alpha = \frac{c_1 \quad x_2 c_0}{x_1 \quad x_2}, \qquad \beta = \frac{x_1 c_0 \quad c_1}{x_1 \quad x_2}.$$

(b) *Liczby x_1 i x_2 są równe*

Jeśli $x_1 = x_2 = 0$, to $a = b = 0$, skąd $c_n = 0$ dla dowolnego $n \geqslant 0$.

Przyjmijmy więc, że $x_1 = x_2 = y \neq 0$. Wówczas równanie (1) jest s
przez dwa ciągi: $c_n = y^n$ oraz $c_n = ny^n$. Ciągi te nazywamy *ciągami b*
równania rekurencyjnego (1). Kontynuujemy jak w przypadku (a): Z
my, że zależność (1) jest spełniona przez wszystkie ciągi postaci

$$c_n = y^n \alpha + ny^n \beta, \tag{7}$$

gdzie α, β są dowolnymi liczbami zespolonymi. Następnie szukam
liczb α, β, aby równanie (7) było spełnione dla $n = 0$ i $n = 1$. Otrzy
zatem układ równań

$$\begin{cases} \alpha = c_0 \\ y\alpha + y\beta = c_1, \end{cases}$$

który ma zawsze rozwiązanie:

$$\alpha = c_0, \qquad \beta = \frac{c_1 \quad yc_0}{y}.$$

Uwaga

Podobnie postępujemy w przypadku równań rekurencyjnych wyżs
du, tzn. w przypadku równań postaci

$$c_{n+k} = a_1 c_{n+k\ 1} + a_2 c_{n+k\ 2} + \ldots + a_k c_n \qquad (k \geqslant 2),$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oraz $c_0, c_1, \ldots, c_{k\ 1}$ są znanymi liczbami rzeczywist

B. Dwustosunek i biegunowa

Dwustosunek i podział harmoniczny

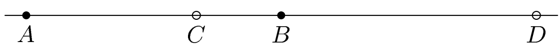
Dane są cztery różne punkty A, B, C, D leżące na jednej prostej.
wyrażenia

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

nazywamy *dwustosunkiem czwórki punktów* A, B, C, D i oznaczan
$(A,B;C,D)$. Wprost z de nicji wynikają następujące równości:

$$(A,B;C,D) = (D,C;B,A) \qquad \text{oraz} \qquad (A,B;C,D) = \frac{1}{(B,A;C,I}$$

Zatem jeśli $(A,B;C,D) = 1$, to $(A,B;C,D) = (B,A;C,D) = (A,B;I$
W tym przypadku (tzn. gdy $(A,B;C,D) = 1$) punkt C nazywamy
nym harmonicznie do punktu D względem pary punktów (A,B) (rys



rys. 1

Bezpośrednio z de nicji wynikają następujące wnioski:

(a) Jeżeli punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu D w
pary punktów (A,B), to punkt D jest sprzężony harmonicznie do p
względem tej samej pary.

(b) Jeżeli punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu D w
pary (A,B), to punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu D w
pary (B,A).

Z wniosków (a), (b) wynika, że w de nicji sprzężenia harmoniczneg
ty C, D, jak również punkty A, B, odgrywają symetryczne role. Z te
du, zamiast pisać: *punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu*
dem pary (A,B), możemy napisać: *punkty C i D są sprzężone harm*
do siebie względem punktów A, B; czy też po prostu: *punkty C,*
harmonicznie odcinek AB.

(c) Jeżeli punkty C i D dzielą harmonicznie odcinek AB, to punk
dzielą harmonicznie odcinek CD.

Również odwrotnie: jeżeli punkt C leży na zewnątrz odcinka
punkt D, sprzężony harmonicznie do C, leży pomiędzy punktami A

Udowodnimy teraz twierdzenie mówiące o tym, że dwustosunek
chowywany przez rzut środkowy.

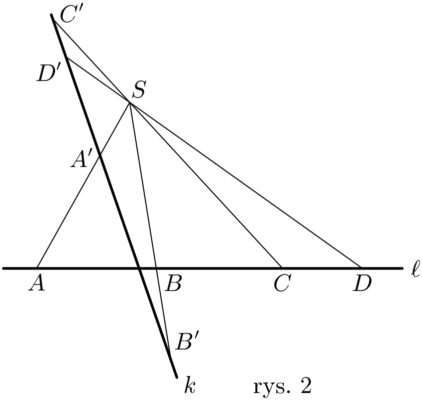
Twierdzenie 1.

Niech S będzie punktem, zaś ℓ prostą nie zawierającą punktu S
punkty A, B, C, D leżą na prostej ℓ (rysunki 2 i 3). Prosta k nie pr
przez punkt S i przecina proste AS, BS, CS, DS odpowiednio w p
A', B', C', D'. Wówczas

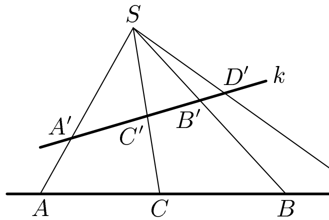
$$(A,B;C,D) = (A',B';C',D').$$

Dowód

Niech ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D będą czterema różnymi, ustalonymi prosty
chodzącymi przez punkt S. Przyjmijmy, że prosta ℓ, nie przechodzą
punkt S, przecina proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D odpowiednio w punktach A,
Wystarczy dowieść, że wartość wyrażenia $(A,B;C,D)$ nie zależy od
prostej ℓ.



rys. 2



rys. 3

Oznaczmy przez $[KLM]$ pole trójkąta KLM. Mamy następujące

$$\frac{AC}{BC} = \frac{[ACS]}{[BCS]} = \frac{\frac{1}{2}\, AS \quad CS \quad \sin\sphericalangle ASC}{\frac{1}{2}\, BS \quad CS \quad \sin\sphericalangle BSC} = \frac{AS}{BS} \quad \frac{\sin\sphericalangle ASC}{\sin\sphericalangle BSC}.$$

Dzieląc stronami powyższe równości uzyskujemy

$$(A,B;C,D)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{\sin\sphericalangle ASC}{\sin\sphericalangle BSC}:\frac{\sin\sphericalangle ASD}{\sin\sphericalangle BSD}.$$

Ponieważ $\sin\alpha=\sin(180^\circ \quad \alpha)$ dla $0<\alpha<180^\circ$, więc wielkość po pra
nie powyższej równości nie zależy od wyboru prostej ℓ. Dowód twi
został więc zakończony.

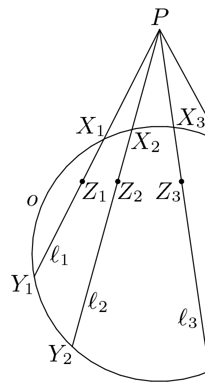
Biegunowa

Niech o będzie dowolnym okręgiem, zaś P dowolnym punktem leż
zewnątrz tego okręgu.

Przez punkt P prowadzimy prostą ℓ, która przecina okrąg o w punktach X, Y. Niech Z będzie punktem sprzężonym harmonicznie do punktu P względem punktów X, Y. Innymi słowy, punkt Z leży na odcinku XY i jest wyznaczony przez warunek

$$(X,Y;Z,P)=1, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{XZ}{YZ}=\frac{XP}{YP}.$$

Naszym celem jest wyznaczenie zbioru punktów Z przy ustalonym okregu o, ustalonym punkcie P oraz zmieniającej się prostej ℓ (rys. 4).



rys. 4

Jak podpowiada rysunek 4, zbiór punktów Z powinien leżeć na
prostej. Udowodnimy teraz, że tak rzeczywiście jest.

Twierdzenie 2.

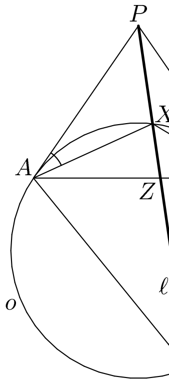
Niech proste PA, PB będą styczne do okręgu o odpowiednio
tach A, B (rys. 5). Wówczas zbiorem wyżej zde niowanych punktów
odcinek AB.

Prostą AB nazywamy *biegunową punktu P względem okręgu*
prostu *biegunową*, gdy nie ma wątpliwości, któremu punktowi i okrę
ona przyporządkowana.

Dowód

Niech ℓ będzie dowolną prostą przechodzącą przez punkt P i prze
okrąg o odpowiednio w punktach X, Y (rys. 5). Oznaczmy przez
przecięcia odcinków XY i AB. Położenie punktu sprzężonego harm
do punktu P względem punktów X, Y jest wyznaczone jednoznaczni

Ponieważ $\sphericalangle PAX = \sphericalangle PYA$, więc trójkąty PAX i PYA są podob
my więc następujące tożsamości:



rys. 5

$$\frac{XP}{YP} = \frac{[PAX]}{[PYA]} = \left(\frac{AX}{AY}\right)^2, \tag{2}$$

gdzie $[KLM]$ oznacza pole trójkąta KLM. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie otrzymujemy równość

$$\frac{XP}{YP} = \left(\frac{BX}{BY}\right)^2. \tag{3}$$

Z równości (2) i (3) wynika następująca zależność:

$$\frac{AX}{AY} = \frac{BX}{BY}.$$

Ponieważ $\sphericalangle AXB = 180^\circ \quad \sphericalangle AYB$, więc otrzymujemy następujące z

$$\left(\frac{AX}{AY}\right)^2 = \frac{AX}{AY} \quad \frac{BX}{BY} = \frac{\frac{1}{2}\, AX \quad BX \quad \sin \sphericalangle AXB}{\frac{1}{2}\, AY \quad BY \quad \sin \sphericalangle AYB} = \frac{[AXB]}{[AYB]} = \frac{XZ}{YZ} \tag{4}$$

Łącząc równości (3) i (4) dostajemy równość (1).

Twierdzenie 3.

Dwie różne proste przechodzące przez punkt P przecinają okrąg
wiednio w punktach X, Y oraz U, V (rys. 6 i 7). Wówczas:

(a) Przekątne czworokąta $XYVU$ przecinają się na biegunowej p
względem okręgu o;

(b) Proste XU, YV przecinają się na biegunowej punktu P względe
gu o lub są równoległe do tej biegunowej.

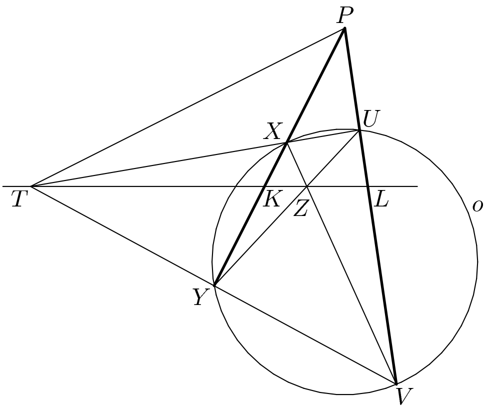
Dowód

Udowodnimy najpierw zdania (a) oraz (b) przy założeniu, że X
(rys. 6).

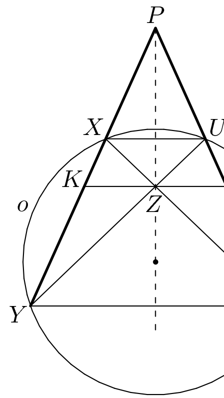
Niech Z będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta XY
niech proste XU, YV przecinają się w punkcie T. Przyjmijmy, że pr
przecina proste XY, UV odpowiednio w punktach K, L.

Należy dowieść, że prosta TZ jest biegunową punktu P względe
gu o. W tym celu wystarczy wykazać, że na prostej TZ znajdu
najmniej dwa punkty z tej biegunowej. Udowodnimy, że tymi pun
K oraz L. Tak więc powinniśmy dowieść, że $(X,Y;K,P) = (U,V;L,$

skąd $(X,Y;K,P)^2=1$ i w konsekwencji $(X,Y;K,P)=1$. Korzystaj
ności (5) otrzymujemy $(U,V;L,P)=(X,Y;K,P)=1$, co dowodzi pra
ści zdań (a) i (b) w przypadku, gdy $XU \nparallel YV$.



rys. 6



rys. 7

Pozostało udowodnić zdania (a) oraz (b) przy założeniu, że X
(rys. 7).

Niech Z będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta XYV
sta równoległa do prostych XU i YV przecina odcinki XY, UV odp
w punktach K, L.

Punkty X, K, Y są odpowiednio symetryczne do punktów U, L,
dem prostej łączącej punkt P ze środkiem okręgu o. Mamy więc nas
równości:

$$(X,Y;K,P)=(U,V;L,P)=(Y,X;K,P)=\frac{1}{(X,Y;K,P)}\,. \tag{6}$$

Zatem $(X,Y;K,P)=1$, skąd również $(U,V;L,P)=1$. Z dwóch ostat
ności wynika, że prosta KL jest biegunową punktu P względem okr
dowodzi prawdziwości zdań (a) oraz (b) przy założeniu $XU \parallel YV$.

Jako zastosowanie powyższych twierdzeń, proponujemy Czyteln
stępujące

Zadanie konstrukcyjne

Z danego punktu, leżącego na zewnątrz okręgu o, poprowadzić st
okręgu o posługując się jedynie linijką.

C. Nierówność Schwarza

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej n oraz liczb rzeczywistych x_1,x
$y_1,y_2,\ldots,y_n$ prawdziwa jest nierówność

$$(1) \qquad x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\ \sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje tak
rzeczywista $t \geqslant 0$, że $y_i = tx_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$.

Uwaga 1.

Z powyższego twierdzenia wynika nieco silniejsza nierówność, a mi

$$(2) \qquad |x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\ \sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+}$$

Istotnie: jeżeli liczba $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ jest nieujemna, to nierów
niczym się nie różni od nierówności (1). Jeśli natomiast powyższa s
liczbą ujemną, to wstawiając do zależności (1) liczby $\ \ x_1,\ \ x_2,\ldots,$
wiednio w miejsce liczb $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dostajemy nierówność (2).

Nierówność (1) (jak również jej nieco mocniejsza forma (2)) je
pod wieloma nazwami. Jedną z nich jest *nierówność Schwarza*. Inn
spotykane w literaturze to: *nierówność Cauchy'ego* lub *nierównoś*
kowskiego. Niektórzy też posługują się nazwami łączonymi, np. *ni*
Cauchy'ego-Schwarza, *Schwarza-Buniakowskiego*, itp.

Dowód twierdzenia

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n}(x_it \quad y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)t^2 + \left(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)t + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 = at^2+b$$

Ponieważ $w(t) \geqslant 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej t, więc

$$\Delta = b^2 \quad 4ac = \left(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \quad 4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\ \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right) \geqslant 0.$$

Przekształcając równoważnie powyższą nierówność otrzymujemy w
z którego uzyskujemy nierówność (1).

Równość w nierówności (2) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy
kwadratowy $w(t)$ ma dokładnie jeden (podwójny) pierwiastek rze
Tak się dzieje jedynie wtedy, gdy dla pewnej liczby rzeczywistej t

$$(3) \quad x_1t \quad y_1 = x_2t \quad y_2 = \ldots = x_nt \quad y_n = 0, \quad \text{tzn. } y_i = tx_i \text{ dla } i=1,2$$

Uwaga 2.

Oto inny, bardziej bezpośredni dowód nierówności (1). Z ciągu z

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(x_j\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \quad y_j\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}x_j^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \quad 2\sum_{j=1}^{n}x_jy_j \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \sum_{k=1}^{n}x_k^2 + \sum_{j=1}^{n}y_j^2 \left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right.$$

$$= \sum_{j=1}^{n}y_j^2 \left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^2 \quad \left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \sum_{k=1}^{n}x_k^2$$

otrzymujemy

$$0 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right) \quad \left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2.$$

Przekształcając równoważnie powyższą nierówność uzyskujemy zależ
skąd natychmiast wynika nierówność (1).

Uwaga 3.

W przypadku, gdy $n=2$ lub $n=3$, nierówność Schwarza ma nas
interpretację geometryczną:

Dla wektorów $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ *zachodzi nierówn*

(4) $$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y} \leqslant |\boldsymbol{x}| \quad |\boldsymbol{y}|,$$

gdzie $\circ$ *oznacza iloczyn skalarny, zaś* $|\boldsymbol{z}|$ *jest długością wektora* $\boldsymbol{z}$.

Wobec wzoru $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{x}| \quad |\boldsymbol{y}| \quad \cos\sphericalangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, nierówność (4) jest rów
stwierdzeniu, że *cosinus nie przekracza* 1.

Uwaga 4.

Równość w nierówności Schwarza zachodzi wtedy i tylko wtedy, g
tory $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ mają ten sam kierunek i zwrot (lub co najmniej jeden z
wektorem zerowym). Dla wektorów $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ równość

$$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}= \quad |\boldsymbol{x}| \quad |\boldsymbol{y}|$$

jest równoważna równości

$$(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}) \quad \boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}| \quad \boldsymbol{y},$$

co (miejmy nadzieję) choć trochę wyjaśnia, dlaczego w dowodzie nie
Schwarza, przedstawionym w uwadze 2, wyszliśmy od oszacowania

D. Twierdzenie o złożeniu jednokładności

Twierdzenie 1.

Niech P_1, P_2 będą dwoma różnymi punktami na płaszczyźnie. O
przez j_1 jednokładność o środku P_1 i skali $0 < k_1 < 1$, zaś przez j_2 je
ność o środku P_2 i skali $0 < k_2 < 1$. Wówczas złożenie $j_2 \circ j_1$ jest je
nością o środku leżącym na prostej P_1P_2 i skali $k_1 \;\; k_2$.

Dowód

Dla dowolnego punktu T płaszczyzny oznaczmy: $T' = j_1(T)$, T''
Wybierzmy dowolny punkt X nie leżący na prostej P_1P_2. Niech
punktem przecięcia prostej XX'' z odcinkiem P_1P_2 (rys. 1). Wyka
położenie punktu Q nie zależy od wyboru punktu X oraz że pun
środkiem jednokładności $j_2 \circ j_1$.

Zachodzą następujące równości:

$$\frac{X''X'}{P_2X''} = \frac{P_2X' \quad P_2X''}{P_2X''} = \frac{P_2X'}{P_2X''} \quad 1 = \frac{1}{k_2} \quad 1 = \frac{1 \quad k_2}{k_2}.$$

Ponadto

$$\frac{X'X}{XP_1} = \frac{XP_1 \quad X'P_1}{XP_1} = 1 \quad \frac{X'P_1}{XP_1} = 1 \quad k_1.$$

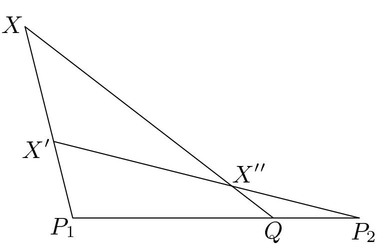
Stosując twierdzenie Menelausa (zob. str. 122) do trójkąta P_1P_2X'
korzystując powyższe związki otrzymujemy kolejno:

$$\frac{P_1Q}{QP_2} \; \frac{P_2X''}{X''X'} \; \frac{X'X}{XP_1} = 1, \qquad \frac{P_1Q}{QP_2} \; \frac{k_2}{1 \quad k_2} \quad (1 \quad k_1) = 1,$$

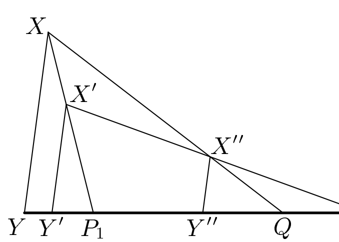
skąd

$$\frac{P_1Q}{QP_2} = \frac{1 \quad k_2}{k_2(1 \quad k_1)}. \tag{1}$$

Powyższa równość oznacza właśnie, że *położenie punktu Q nie zale*
boru punktu X spoza prostej P_1P_2.



rys. 1



rys. 2

$X \notin P_1P_2$ zachodzi równość

$$\frac{QX''}{QX} = k_1 \quad k_2. \tag{2}$$

Stosując twierdzenie Menelausa do trójkąta P_1QX uzyskujemy

$$\frac{QX''}{X''X} \quad \frac{XX'}{X'P_1} \quad \frac{P_1P_2}{P_2Q} = 1, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{QX''}{X''X} \quad \left(\frac{XP_1}{X'P_1} \quad 1\right) \quad \left(1 + \frac{P_1Q}{QP\ldots}\right.$$

Korzystając z równości (1) otrzymujemy

$$\frac{QX''}{X''X} \quad \left(\frac{1}{k_1} \quad 1\right) \quad \left(1 + \frac{1 \quad k_2}{k_2(1 \quad k_1)}\right) = 1.$$

Przekształcając równoważnie powyższą zależność dostajemy

$$\frac{X''X}{QX''} = \frac{1}{k_1 \quad k_2} \quad 1, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{QX}{QX''} = \frac{1}{k_1 \quad k_2}.$$

W ten sposób dowiedliśmy równości (2).

Aby zakończyć dowód twierdzenia należy wykazać, że dla dowolne tu Y leżącego na prostej P_1P_2 zachodzi równość

$$\frac{QY''}{QY} = k_1 \quad k_2.$$

W tym celu wybierzmy dowolny punkt X nie leżący na prostej P_1P_2

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, $XY \parallel X$ $X'Y' \parallel X''Y''$. Zatem $XY \parallel X''Y''$, skąd

$$\frac{QY''}{QY} = \frac{QX''}{QX} = k_1 \quad k_2.$$

Dowód twierdzenia jest więc zakończony.

Zmieniając nieznacznie fragmenty powyższego dowodu można ud poniższe, nieco ogólniejsze twierdzenie. Dopracowanie szczegółów wiamy Czytelnikowi.

Twierdzenie 2.

Niech P_1, P_2 będą dwoma różnymi punktami na płaszczyźnie. O przez j_1 jednokładność o środku P_1 i skali k_1, zaś przez j_2 jednok o środku P_2 i skali k_2, gdzie k_1, k_2 są dowolnymi liczbami rzeczy różnymi od 0. Wówczas

(a) jeżeli $k_1 \quad k_2 \neq 1$, to złożenie $j_2 \circ j_1$ jest jednokładnością o środku na prostej P_1P_2 i skali $k_1 \quad k_2$;

E. Twierdzenie o zbieżności ciągu średnich arytmetycznych

Udowodnimy twierdzenie, z którego korzystaliśmy w rozwiązan
nia 10 z zawodów pierwszego stopnia (zob. str. 46).

Twierdzenie

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g, to ciąg (b_n), określony

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{1}$$

jest również zbieżny i jego granica wynosi g.

Dowód

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Na mocy de nicji granicy
taka liczba naturalna N, że dla wszystkich liczb $n > N$ zachodzi nie

$$|a_n \quad g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wybierzmy tak dużą liczbę naturalną $M \geqslant N$, że

$$M > \frac{|a_1 + a_2 + \ldots + a_N \quad Ng|}{\varepsilon/2}.$$

Wtedy dla dowolnej liczby $m > M$ zachodzą nierówności:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_N \quad Ng| < \frac{M\varepsilon}{2},$$

$$|a_{N+1} \quad g| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_{N+2} \quad g| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \ldots, \quad |a_m \quad g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_m \quad mg| = \Big|(a_1 + a_2 + \ldots a_N \quad Ng) + \sum_{i=N+1}^{m} (a_i \quad g$$

$$\leqslant |a_1 + a_2 + \ldots a_N \quad Ng| + \sum_{i=N+1}^{m} |a_i \quad g| < \frac{(M + m \quad N)\varepsilon}{2} < m$$

Zatem

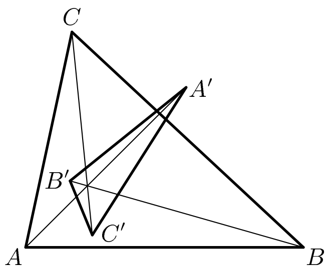
$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \quad g\right| < \varepsilon,$$

co na mocy de nicji granicy daje tezę twierdzenia.

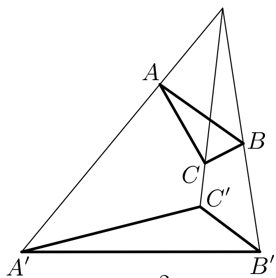
F. Twierdzenie Desarguesa

Środek perspektywiczny

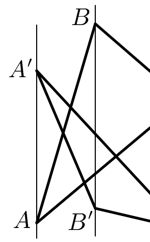
Na płaszczyźnie dane są takie dwa trójkąty ABC i $A'B'C'$, że
$B \neq B'$, $C \neq C'$. Jeśli proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym
lub są równoległe, to mówimy, że trójkąty ABC, $A'B'C'$ *mają środek*
tywiczny (rysunki 1, 2, 3). W przypadku, gdy proste AA', BB', C
punkt wspólny, punkt ten nazywamy *środkiem perspektywicznym* t
ABC, $A'B'C'$.



rys. 1



rys. 2

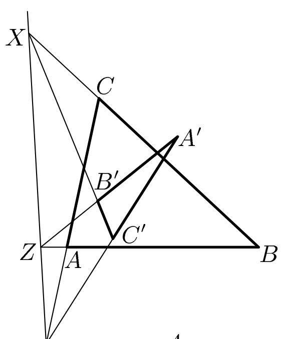


rys. 3

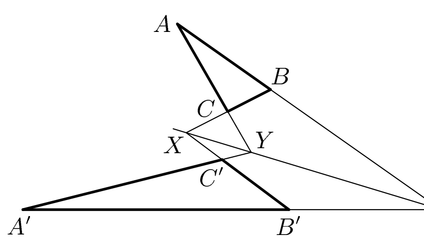
Oś perspektywiczna

Niech ABC, $A'B'C'$ będą takimi trójkątami leżącymi na płaszcz
$A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$. Rozpatrzymy trzy możliwe położenia tych tr

1. Załóżmy, że żadna z par $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$ ni
pary prostych równoległych, tzn. $BC \nparallel B'C'$, $CA \nparallel C'A'$, $AB \nparallel A'B'$.
my przez X, Y, Z odpowiednio punkty przecięcia prostych BC i B
i $C'A'$; AB i $A'B'$. Jeżeli punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej, to
że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ *mają oś perspektywiczną* (rysunki 4 i
stą zawierającą punkty X, Y, Z nazywamy *osią perspektywiczną* t
ABC, $A'B'C'$.



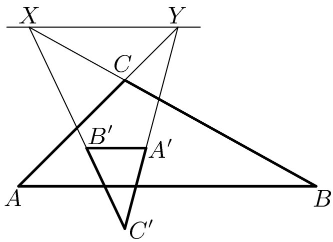
rys. 4



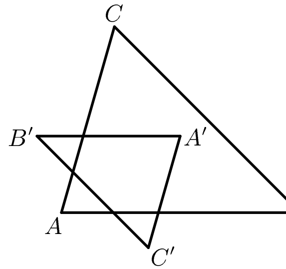
rys. 5

punktami przecięcia prostych BC, $B'C'$ oraz CA, $C'A'$. Jeżeli pro jest równoległa do prostych AB i $A'B'$, to mówimy, że trójkąty A $A'B'C'$ *mają oś perspektywiczną*. Prostą XY nazywamy *osią perspek* trójkątów ABC oraz $A'B'C'$.

Analogicznie de niujemy oś perspektywiczną, gdy zachodzi dokła den z warunków: $BC \parallel B'C'$; $CA \parallel C'A'$.



rys. 6



rys. 7

3. Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym co najmniej d śród par $(BC,B'C')$, $(CA,C'A')$, $(AB,A'B')$ tworzą pary boków głych. Wówczas jeżeli $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$ oraz $AB \parallel A'B'$ (rys. 7), mujemy (umownie), że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ *mają oś perspekt*

Twierdzenie Desarguesa[3]

Dwa trójkąty ABC, $A'B'C'$ takie, że $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, maj perspektywiczny wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywiczną

Dowód

Załóżmy najpierw, że trójkąty ABC, $A'B'C'$ mają środek perspe ny. Przyjmijmy ponadto, że $BC \nparallel B'C'$, $CA \nparallel C'A'$, $AB \nparallel A'B'$ oraz AA', BB', CC' przecinają się w punkcie P. (Dowód w pozostałych kach można bez trudu przeprowadzić, wzorując się na poniższym ro niu).

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $X = BC \cap B'C'$, $Y = C$ $Z = AB \cap A'B'$, gdzie $k \cap \ell$ jest punktem wspólnym prostych k i ℓ.

Stosując twierdzenie Menelausa (zob. str. 122) dla trójkątów PC $PC'B'$ (rys. 8), otrzymujemy odpowiednio

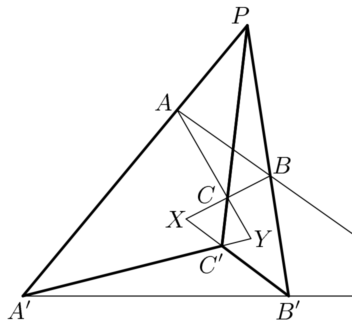
$$\frac{PC}{CC'} \cdot \frac{C'Y}{YA'} \cdot \frac{A'A}{AP} = 1, \qquad \frac{PC}{CC'} \cdot \frac{C'X}{XB'} \cdot \frac{B'B}{BP} = 1.$$

$$\frac{C'Y}{YA'}\,\frac{A'A}{AP}=\frac{C'X}{XB'}\,\frac{B'B}{BP},$$

skąd

$$(1)\qquad \frac{A'A}{AP}\,\frac{PB}{BB'}=\frac{C'X}{XB'}\,\frac{YA'}{C'Y}.$$

Stosując po raz kolejny twierdzenie Menelausa, lecz tym razem dla trójkąta $A'B'P$, dostajemy równość



rys. 8

$$(2)\qquad \frac{A'A}{AP}\,\frac{PB}{BB'}\,\frac{B'Z}{ZA'}=1.$$

Z równości (1) oraz (2) otrzymujemy związek

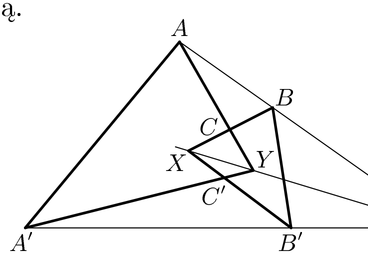
$$\frac{C'X}{XB'}\,\frac{YA'}{C'Y}=\frac{ZA'}{B'Z},\qquad \text{skąd mamy}\qquad \frac{C'X}{XB'}\,\frac{B'Z}{ZA'}\,\frac{YA'}{C'Y}=1$$

Ostatnia zależność, na mocy twierdzenia Menelausa zastosowanego kąta $A'B'C'$, oznacza, że punkty X, Y, Z są współliniowe. Zatem ABC, $A'B'C'$ mają oś perspektywiczną.

Załóżmy teraz, że trójkąty ABC, $A'B'C'$ mają oś perspektywiczną. Podobnie jak wyżej, dowód przeprowadzimy jedynie przy założeniu, że

$$BC \nparallel B'C',\ CA \nparallel C'A',\ AB \nparallel A'B',$$

pozostawiając Czytelnikowi do rozważenia pozostałe przypadki.



rys. 9

Punkty X, Y, Z są współliniowe, więc proste AB, $A'B'$, XY pr się w jednym punkcie. Zatem trójkąty $AA'Y$, $BB'X$ mają środek pe wiczny — jest nim punkt Z (rys. 9). Stąd, jak wykazaliśmy wyżej, że trójkąty $AA'Y$, $BB'X$ mają oś perspektywiczną. Zatem albo pro BB', CC' są równoległe, albo prosta CC' przechodzi przez punk ny prostych AA' i BB'. To w obu przypadkach oznacza, że trójkąt $A'B'C'$ mają środek perspektywiczny.

G. Twierdzenie Cevy

Jednym z najczęściej stosowanych twierdzeń z geometrii na Oli
Matematycznej jest twierdzenie Cevy. W niniejszej broszurze stos
je kilkakrotnie: w rozwiązaniach zadań 6 (sposób II, str. 38) oraz 9
III i IV, str. 44 i 45) zawodów stopnia pierwszego oraz w dowodzie
(str. 97), który znalazł zastosowanie w rozwiązaniu zadania 13 z IX Z
Matematycznych Państw Bałtyckich.

Twierdzenie Cevy[4]

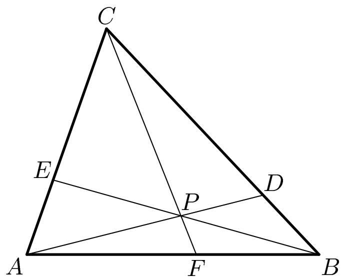
Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F, różne od wierzchołków
ABC, leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB, przy czym spełn
jeden z dwóch warunków:

(a) wszystkie trzy punkty D, E, F leżą na obwodzie trójkąta ABC

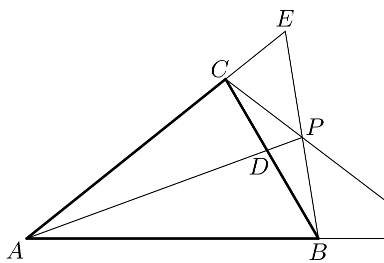
(b) dokładnie jeden spośród punktów D, E, F leży na obwodzie
ABC (rys. 2).

Wówczas proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wted
wtedy, gdy

(1) $$\frac{AF}{FB}\;\frac{BD}{DC}\;\frac{CE}{EA}=1.$$



rys. 1



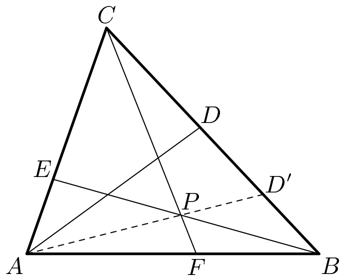
rys. 2

Dowód

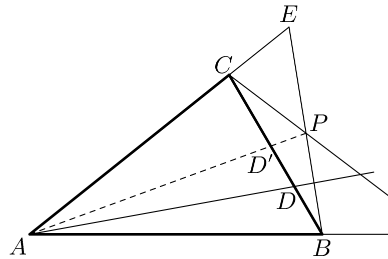
Załóżmy najpierw, że proste AD, BE, CF przecinają się w pu
Niech $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ. Stosunek pól dwóch t
o wspólnej podstawie jest równy stosunkowi wysokości opuszczony
podstawę. Stąd oraz z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{AF}{} = \frac{[CPA]}{}, \quad \frac{BD}{} = \frac{[APB]}{}, \quad \frac{CE}{} = \frac{[BPC]}{}$$

Załóżmy teraz, że zachodzi równość (1). Przyjmijmy również, b
ogólności, że punkt D leży na obwodzie trójkąta ABC (rys. 3 i 4).



rys. 3



rys. 4

Przypuśćmy, że proste AD, BE, CF nie przecinają się w jedny
cie. Niech P będzie punktem przecięcia prostych BE i CF. Wówcza
AP przecina *odcinek* BC w punkcie $D' \neq D$. Na mocy wyżej udow
implikacji oraz związku (1) uzyskujemy:

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{FB}{AF}\,\frac{EA}{CE} = \frac{BD}{DC}\,.$$

Ponieważ oba punkty D, D' leżą na odcinku BC, więc z powyższej
wnioskujemy, że $D = D'$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

H. Twierdzenie Menelausa

Twierdzenie Menelausa

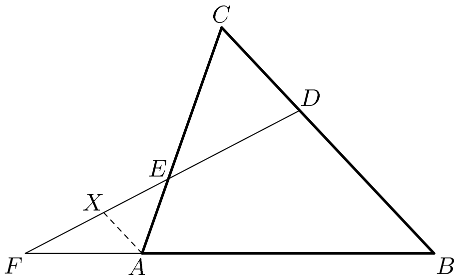
Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F, różne od wierzchołków ABC, leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB, przy czym spełn jeden z dwóch warunków:

(a) dokładnie dwa spośród punktów D, E, F leżą na obwodzie trójka (rys. 1);

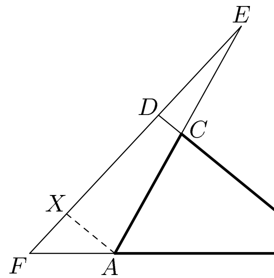
(b) żaden z punktów D, E, F nie leży na obwodzie trójkąta ABC (

Wówczas punkty D, E, F leżą na jednej prostej wtedy i tylko wted

$$\frac{AF}{FB}\;\frac{BD}{DC}\;\frac{CE}{EA} = 1. \tag{1}$$



rys. 1



rys. 2

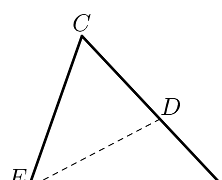
Dowód

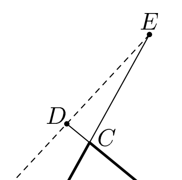
Załóżmy najpierw, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej. będzie punktem przecięcia prostej przechodzącej przez punkt A i rów do prostej BC z prostą zawierającą punkty D, E, F (rys. 1 i 2). na mocy twierdzenia Talesa

$$\frac{AF}{FB} = \frac{XA}{BD}, \qquad \frac{CE}{EA} = \frac{CD}{XA}.$$

Mnożąc stronami powyższe dwie równości otrzymujemy równość (1

Załóżmy teraz, że zachodzi równość (1). Przyjmijmy również, b ogólności, że punkt F leży na *przedłużeniu* boku AB (rys. 3 i 4).





Wówczas prosta DE przecina *przedłużenie* boku AB w punkcie
Na mocy wyżej udowodnionej implikacji oraz związku (1) uzyskujem

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{EA}{CE} \; \frac{DC}{BD} = \frac{AF}{FB}\,.$$

Ponieważ oba punkty F, F' leżą na przedłużeniu boku AB, więc
Otrzymaliśmy sprzeczność.

Z twierdzenia Menelausa korzystaliśmy w dowodzie *Faktu* (str. 6
znalazł zastosowanie w sposobie V rozwiązania zadania 1 z zawodów
trzeciego, w dowodzie twierdzenia Desarguesa (str. 117), jak równi
wodzie twierdzenia o złożeniu jednokładności (str. 114).

SPIS TREŚCI

L Olimpiada Matematyczna 1998/99
Sprawozdanie Komitetu Głównego

Uwaga. O wszelkich zauważonych błędach, niejasnościach i nieścisłościach prosimy poinformować Komitet Główny Olimpiady Matematycznej.