TEKSTY ZADAŃ

Zawody stopnia pierwszego

1. Dowieść, że wśród liczb postaci $50^n+(50n+1)^{50}$, gdzie n jest liczbą naturalną, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

2. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność

$$(a+b+c+d)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab.$$

3. W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD=2\cdot CD$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AD. Wyznaczyć miarę kąta CED.

4. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że liczby $x+y$, x^2+y^2, x^3+y^3 i x^4+y^4 są całkowite. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba x^n+y^n jest liczbą całkowitą.

5. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniające równanie $y^x=x^{50}$.

6. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q. Dowieść, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ.

7. Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ mające dokładnie n pierwiastków nie większych niż -1 oraz spełniające warunek

$$a_0^2+a_1a_n=a_n^2+a_0a_{n-1}.$$

Uwaga: Pierwiastki są liczone z uwzględnieniem krotności: jeśli liczba x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $P(x)$ (tzn. jeśli wielomian $P(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x-x_0)^k$, ale nie przez $(x-x_0)^{k+1}$), wówczas liczba x_0 jest traktowana jak k pierwiastków wielomianu $P(x)$.

8. Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$ oraz zbiór n-elementowy S. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną k, dla której istnieją podzbiory $A_1,A_2,\ldots,A_k$ zbioru S o następującej własności: *dla dowolnych dwóch różnych elementów $a,b\in S$ istnieje taka liczba $j\in\{1,2,\ldots,k\}$, że zbiór $A_j\cap\{a,b\}$ jest jednoelementowy.*

9. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

10. Dana jest liczba $x_1 > 0$. Ciąg (x_n) jest zdefiniowany wzorem:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \qquad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots\ .$$

Udowodnić, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$, i obliczyć ją.

11. W urnie znajdują się dwie kule: biała i czarna. Ponadto mamy do dyspozycji 50 kul białych i 50 czarnych. Wykonujemy 50 razy następującą czynność: losujemy z urny kulę, a następnie wrzucamy ją z powrotem do urny oraz dokładamy jedną kulę tego samego koloru, co wylosowana kula. Po zakończeniu tych czynności mamy więc w urnie 52 kule. Jaka liczba kul białych znajdujących się w urnie jest najbardziej prawdopodobna?

12. Wszystkie wierzchołki sześcianu o krawędzi a leżą na powierzchni czworościanu foremnego o krawędzi 1. Wyznaczyć możliwe wartości a.

Zawody stopnia drugiego

1. Dana jest funkcja $f\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ taka, że $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ dla $n = 1,2,\ldots$. Wykazać, że nie istnieją funkcje rosnące $g\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, $h\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, dla których $f = g - h$.

2. Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów jednostkowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.

3. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i CD, przy czym $AE{:}EB = CF{:}FD$. Punkt P leży na odcinku EF i spełnia warunek $EP{:}PF = AB{:}CD$. Udowodnić, że stosunek pól trójkątów APD i BPC nie zależy od wyboru punktów E i F.

4. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki:

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCA \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle PAC = \sphericalangle PBA.$$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to kąt APO jest prosty.

5. Niech $S=\{1,2,3,4,5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon S\to S$ spełniających równość $f^{50}(x)=x$ dla wszystkich $x\in S$.

Uwaga: $f^{50}(x)=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{50}(x)$.

6. Dana jest liczba naturalna $k\geqslant 2$ oraz liczby całkowite $a_1,a_2,\ldots,a_n$ spełniające warunki

$$a_1+2^ia_2+3^ia_3+\ldots+n^ia_n=0 \qquad \text{dla}\ \ i=1,2,\ldots,k-1.$$

Dowieść, że liczba $a_1+2^ka_2+3^ka_3+\ldots+n^ka_n$ jest podzielna przez $k!$.

Zawody stopnia trzeciego

1. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, przy czym $AD>BC$. Punkt E leży na boku AC i spełnia warunek

$$\frac{AE}{EC}=\frac{BD}{AD-BC}.$$

Udowodnić, że $AD>BE$.

2. Dane są liczby całkowite nieujemne $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{101}$ mniejsze od 5050. Dowieść, że spośród nich można wybrać takie cztery różne a_k, a_l, a_m, a_n, że liczba $a_k+a_l-a_m-a_n$ jest podzielna przez 5050.

3. Dowieść, że istnieją takie liczby naturalne $n_1<n_2<\ldots<n_{50}$, że

$$n_1+S(n_1)=n_2+S(n_2)=n_3+S(n_3)=\ldots=n_{50}+S(n_{50}),$$

gdzie $S(n)$ jest sumą cyfr liczby n.

4. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb naturalnych $n\geqslant 2$ układ równań

$$\left\{\begin{array}{c} x_1^2+x_2^2+50=16x_1+12x_2 \\ x_2^2+x_3^2+50=16x_2+12x_3 \\ x_3^2+x_4^2+50=16x_3+12x_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}^2+x_n^2+50=16x_{n-1}+12x_n \\ x_n^2+x_1^2+50=16x_n+12x_1 \end{array}\right.$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$.

5. Niech $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnić, że

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(|a_i-a_j|+|b_i-b_j|\right)\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_i-b_j|\ .$$

6. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości:

$$\sphericalangle A+\sphericalangle C+\sphericalangle E=360^\circ\ , \qquad \frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1\ .$$

Dowieść, że $\dfrac{AB}{BF}\cdot\dfrac{FD}{DE}\cdot\dfrac{EC}{CA}=1\,.$

XXXIX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są prostopadłe, a przeciwległe boki AB i DC nie są równoległe. Zakładamy, że symetralne boków AB i DC przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta $ABCD$. Udowodnić, że czworokąt $ABCD$ da się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABP i CDP mają równe pola.

2. W konkursie bierze udział a uczestników, ocenianych przez b egzaminatorów, gdzie $b\geqslant 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Każdy egzaminator ocenia każdego uczestnika, wydając werdykt „zdał” lub „nie zdał”. Załóżmy, że k jest liczbą o własności: oceny każdych dwóch egzaminatorów są zgodne dla co najwyżej k uczestników. Dowieść, że

$$\frac{k}{a}\geqslant\frac{b-1}{2b}.$$

3. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oznaczmy przez $d(n)$ liczbę jej dodatnich dzielników (włącznie z 1 oraz n). Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite k takie, że

$$\frac{d(n^2)}{d(n)}=k$$

dla pewnego n.

4. Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich takie, że liczba a^2b+a+b jest podzielna przez ab^2+b+7.

5. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg ten jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach K, L i M. Prosta przechodząca przez B i równoległa do MK przecina proste LM i LK odpowiednio w punktach R i S. Wykazać, że kąt RIS jest ostry.

6. Rozważamy wszystkie funkcje f ze zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb całkowitych dodatnich do tego samego zbioru, spełniające warunek

$$f(t^2f(s))=s(f(t))^2$$

dla wszystkich $s,t\in\mathbb{N}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość $f(1998)$.

XXI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

1. Niech x_1, x_2, y_1, y_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$. Udowodnić nierówność

$$(x_1y_1+x_2y_2-1)^2\geqslant(x_1^2+x_2^2-1)(y_1^2+y_2^2-1).$$

2. Rozważamy n punktów $P_1,P_2,\ldots,P_n$ położonych w tej kolejności na jednej linii prostej. Malujemy każdy z tych n punktów na jeden z następujących kolorów: biały, czerwony, zielony, niebieski, fioletowy. Kolorowanie nazwiemy *dopuszczalnym*, jeśli dla dowolnych dwóch kolejnych punktów P_i, P_{i+1} $(i=1,2,\ldots,n-1)$ oba są tego samego koloru lub co najmniej jeden z nich jest biały. Ile jest dopuszczalnych kolorowań?

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (x,y) spełniające następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2-x^3=y \\ 2-y^3=x. \end{cases}$$

4. Niech m, n będą danymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech

$$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt[k^2]{k^m}\right]$$

($[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x). Udowodnić, że

$$S_m(n)\leqslant n+m\cdot(\sqrt[4]{2^m}-1).$$

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich takich, że równanie $x^3-17x^2+ax-b^2=0$ ma trzy pierwiastki całkowite (niekoniecznie różne).

6. Różne punkty A, B, C, D, E, F są położone na okręgu k w tej kolejności. Proste styczne do okręgu k w punktach A i D oraz proste BF i CE przecinają się w jednym punkcie P. Udowodnić, że proste AD, BC i EF są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

7. Rozważamy pary (a,b) liczb naturalnych takich, że iloczyn $a^a\cdot b^b$ w zapisie dziesiętnym kończy się dokładnie 98 zerami. Wyznaczyć parę (a,b) o tej własności, dla której iloczyn ab jest najmniejszy.

8. Niech $n>2$ będzie daną liczbą naturalną. Rozważamy siatkę kwadratową na płaszczyźnie. W każdym kwadracie jednostkowym siatki wpisana jest liczba naturalna. Wielokąty o polu równym n, których boki są zawarte w prostych tworzących siatkę, nazwiemy wielokątami *dopuszczalnymi*. *Wartością* wielokąta dopuszczalnego nazwiemy sumę wszystkich liczb wpisanych w kwadraty zawarte w tym wielokącie. Udowodnić, że jeśli wartości dowolnych dwóch przystających wielokątów dopuszczalnych są równe, to wszystkie liczby wpisane w kwadraty siatki są równe.

Uwaga. Przypominamy, że obraz symetryczny Q wielokąta P jest wielokątem przystającym do P.

9. Niech K, L, M będą środkami boków BC, AC, AB trójkąta ABC. Punkty A, B, C dzielą okrąg opisany na trójkącie ABC na trzy łuki: AB, BC, CA. Niech X będzie takim punktem łuku BC, że $BX=XC$. Analogicznie, niech Y będzie takim punktem łuku AC, że $AY=YC$, zaś Z takim punktem łuku AB, że $AZ=ZB$. Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że $r+KX+LY+MZ=2R$.

IX Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

1. Znaleźć wszystkie funkcje dwóch zmiennych f, których argumenty x, y i wartości $f(x,y)$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, spełniające następujące warunki (dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x i y):

$$\begin{aligned} f(x,x) &= x, \\ f(x,y) &= f(y,x), \\ (x+y)f(x,y) &= yf(x,x+y). \end{aligned}$$

2. Trójkę liczb całkowitych dodatnich (a,b,c) nazywamy *quasi-pitagorejską*, jeśli istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c, w którym miara kąta naprzeciwko boku c wynosi 120°. Udowodnić, że jeśli (a,b,c) jest trójką quasi-pitagorejską, to c ma dzielnik pierwszy większy od 5.

3. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x,y, które spełniają równanie

$$2x^2+5y^2=11(xy-11).$$

4. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że dla $n=1,2,\ldots,1998$ wartości $P(n)$ są liczbami naturalnymi trzycyfrowymi. Udowodnić, że wielomian P nie ma pierwiastków całkowitych.

5. Niech a będzie cyfrą nieparzystą, zaś b cyfrą parzystą. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje liczba całkowita dodatnia, podzielna przez 2^n, w której zapisie dziesiętnym nie występują cyfry inne niż a i b.

6. Niech P będzie wielomianem stopnia 6 i niech a, b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0<a<b$. Załóżmy, że $P(a)=P(-a)$, $P(b)=P(-b)$, $P'(0)=0$. Udowodnić, że $P(x)=P(-x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

7. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ równanie

$$f(x)+f(y)=f(f(x)f(y)).$$

8. Niech $P_k(x)=1+x+x^2+\dots+x^{k-1}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_k(x)=2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej dodatniej n.

9. Liczby α, β spełniają $0<\alpha<\beta<\pi/2$. Niech γ, δ będą liczbami określonymi przez warunki:

(i) $0<\gamma<\pi/2$ oraz liczba $\operatorname{tg}\gamma$ jest średnią arytmetyczną liczb $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$;

(ii) $0<\delta<\pi/2$ oraz liczba $\dfrac{1}{\cos\delta}$ jest średnią arytmetyczną liczb $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ i $\dfrac{1}{\cos\beta}$.

Udowodnić, że $\gamma<\delta$.

10. Niech $n\geqslant 4$ będzie parzystą liczbą całkowitą. W okrąg o promieniu 1 wpisane są n-kąt foremny i $(n-1)$-kąt foremny. Dla każdego wierzchołka n-kąta rozważmy odległość od tego wierzchołka do najbliższego wierzchołka $(n-1)$-kąta, mierzoną po obwodzie okręgu. Niech S będzie sumą tych n odległości. Udowodnić, że S nie zależy od wzajemnego położenia tych dwóch wielokątów.

11. Niech a, b, c będą długościami boków pewnego trójkąta, zaś R — promieniem okręgu opisanego na nim. Udowodnić, że

$$R\geqslant\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}\,.$$

Kiedy zachodzi równość?

12. W trójkącie ABC zachodzi $\sphericalangle BAC=90^\circ$. Punkt D leży na boku BC i $\sphericalangle BDA=2\sphericalangle BAD$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{AD}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}\right).$$

13. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $\sphericalangle ADE=\sphericalangle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $\sphericalangle EAD=\sphericalangle BDP$ oraz $\sphericalangle CBD=\sphericalangle ADP$.

14. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB<AC$. Prosta przechodząca przez B i równoległa do AC przecina dwusieczną kąta zewnętrznego $\sphericalangle BAC$ w punkcie D. Prosta przechodząca przez C i równoległa do AB przecina tę dwusieczną w punkcie E. Punkt F leży na boku AC i spełniona jest równość $FC=AB$. Udowodnić, że $DF=FE$.

15. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na bok BC. Punkt E leży na odcinku AD i spełnione jest równanie

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Punkt F jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D na bok BE. Udowodnić, że $\sphericalangle AFC = 90^\circ$.

16. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 czterdziestoma dwoma klockami o wymiarach 4×1 w taki sposób, że tylko środkowe pole szachownicy pozostanie nie zakryte? (Zakładamy, że każdy klocek zakrywa cztery pełne pola szachownicy).

17. Niech n i k będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Danych jest nk przedmiotów (tych samych rozmiarów) i k pudełek, z których każde pomieści n przedmiotów. Każdy przedmiot jest pokolorowany jednym z k różnych kolorów. Wykazać, że można rozmieścić te przedmioty w pudełkach w taki sposób, że w każdym pudełku znajdą się przedmioty w co najwyżej dwóch kolorach.

18. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieje zbiór S o następujących własnościach:

(i) S składa się z n liczb całkowitych dodatnich, z których wszystkie są mniejsze od 2^{n-1};

(ii) dla dowolnych dwóch różnych niepustych podzbiorów A i B zbioru S suma elementów zbioru A jest różna od sumy elementów zbioru B.

19. Rozważmy mecz ping-ponga między dwiema drużynami, z których każda składa się z 1000 graczy. Każdy gracz grał przeciwko każdemu z graczy przeciwnej drużyny dokładnie raz (w ping-pongu nie ma remisów). Udowodnić, że istnieje dziesięciu graczy z jednej drużyny takich, że każdy z graczy drużyny przeciwnej przegrał z co najmniej jednym z tych dziesięciu graczy.

20. Powiemy, że liczba całkowita dodatnia m *pokrywa* liczbę 1998, jeśli 1, 9, 9, 8 pojawiają się w tej właśnie kolejności jako cyfry m. (Na przykład 1998 jest pokrywana przez 2**1**59**9**36**98**, ale nie przez 213326798). Niech $k(n)$ oznacza liczbę tych liczb całkowitych dodatnich, które pokrywają 1998 i mają dokładnie n cyfr ($n \geqslant 5$), z których wszystkie są różne od 0. Jaką resztę z dzielenia przez 8 daje $k(n)$?

æ

ROZWIĄZANIA ZADAŃ[1]

Zawody stopnia pierwszego

Zadanie **1.** Dowieść, że wśród liczb postaci $50^n+(50n+1)^{50}$, gdzie n jest liczbą naturalną, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

Rozwiązanie

Sposób I

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba 50^n z dzielenia przez 3 daje resztę 2. Jeśli ponadto n dzieli się przez 3, to liczba $(50n+1)^{50}$ z dzielenia przez 3 daje resztę 1. Stąd wynika, że liczba $50^n+(50n+1)^{50}$ jest podzielna przez 3 dla liczb n postaci $6k+3$. Zatem dla liczb n dających z dzielenia przez 6 resztę 3, liczba $50^n+(50n+1)^{50}$ jest złożona.

Sposób II

Dla liczb n podzielnych przez 5 liczba $50^n+(50n+1)^{50}$ jest sumą piątych potęg liczb naturalnych. Przyjmijmy w tożsamości

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4), \tag{1}$$

$x=50^{n/5}$ oraz $y=(50n+1)^{10}$. Z nierówności

$$1<x+y<x^5+y^5$$

wynika, że oba czynniki stojące po prawej stronie równości (1) są większe od 1. To oznacza, że liczba $x^5+y^5=50^n+(50n+1)^{50}$ jest dla liczb n podzielnych przez 5 liczbą złożoną.

Uwaga 1.

Podobnie jak w sposobie I można wykazać, że liczba $50^n+(50n+1)^{50}$ dzieli się przez 3 dla liczb n postaci $6k+5$.

Uwaga 2.

Nie wszystkie wyrazy ciągu $50^n+(50n+1)^{50}$ są liczbami złożonymi. Na przykład dla $n=28$ otrzymujemy liczbę pierwszą, która ma 158 cyfr. Kolejna liczba pierwsza podanej w zadaniu postaci pojawia się dopiero dla $n=484$ i ma 823 cyfry!

[1]Na podstawie materiałów Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej oraz prac uczestników opracowali *Waldemar Pompe* i *Jarosław Wróblewski*.

Zadanie **2.** Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność

$$(a+b+c+d)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Na mocy nierówności pomiędzy średnią kwadratową a arytmetyczną (zob. uwaga niżej) zastosowanej do liczb $a+b$, c i d otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2+c^2+d^2}{3}} \geqslant \left|\frac{(a+b)+c+d}{3}\right|,$$

skąd $3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab \geqslant (a+b+c+d)^2$.

Sposób II

Zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned}
3(a^2&+b^2+c^2+d^2)+6ab-(a+b+c+d)^2 = \\
&= 3a^2+3b^2+3c^2+3d^2+6ab \\
&\qquad -a^2-b^2-c^2-d^2-2ab-2ac-2ad-2bc-2bd-2cd = \\
&= 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+4ab-2ac-2ad-2bc-2bd-2cd = \\
&= \tfrac{1}{2}(4a^2+4b^2+c^2+d^2+8ab-4ac-4ad-4bc-4bd+2cd) \\
&\qquad\qquad +\tfrac{3}{2}(c^2+d^2-2cd) = \\
&= \tfrac{1}{2}(2a+2b-c-d)^2+\tfrac{3}{2}(c-d)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

To kończy dowód danej nierówności.

Uwaga

Nierówność pomiędzy średnią kwadratową a arytmetyczną orzeka, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1,x_2,\ldots,x_n$,

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right|. \qquad (1)$$

Jest to szczególny przypadek nierówności Schwarza (zob. *Dodatek* „Nierówność Schwarza”, str. 112). Równość w nierówności (1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Zadanie **3.** W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD=2\cdot CD$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AD. Wyznaczyć miarę kąta CED.

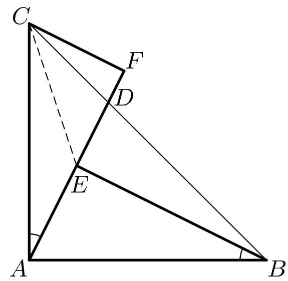
Rozwiązanie

Sposób I

Niech F będzie rzutem prostokątnym punktu C na prostą AD (rys. 1). Ponieważ

$$\sphericalangle CAF = 90^\circ - \sphericalangle BAE = \sphericalangle ABE \qquad \text{oraz} \qquad AB=AC,$$

więc trójkąty prostokątne CAF i ABE są przystające. Stąd



rys. 1

(1) $\qquad AE = CF \qquad$ oraz $\qquad BE = AF.$

Ponadto na mocy twierdzenia Talesa,

(2) $\qquad \dfrac{CF}{BE} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{1}{2}, \qquad$ skąd $\quad BE = 2 \cdot CF.$

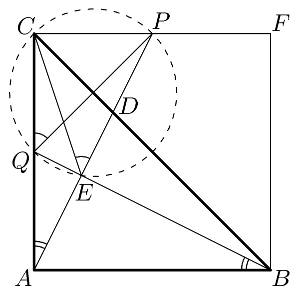
Korzystając z równości (1) oraz (2) otrzymujemy

$$EF = AF - AE = BE - AE = 2 \cdot CF - CF = CF.$$

Trójkąt CFE jest więc trójkątem prostokątnym równoramiennym, a to oznacza, że $\measuredangle CED = \measuredangle CEF = 45^\circ$.

Sposób II

Uzupełnijmy trójkąt ABC do kwadratu $ABFC$ (rys. 2). Załóżmy, że prosta AD przecina odcinek CF w punkcie P, zaś prosta BE przecina bok AC w punkcie Q. Ponieważ



rys. 2

$$\frac{CP}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{2},$$

więc $CP = \frac{1}{2}CF$. Ponadto

$$\measuredangle ABE = 90^\circ - \measuredangle BAE = \measuredangle CAP,$$

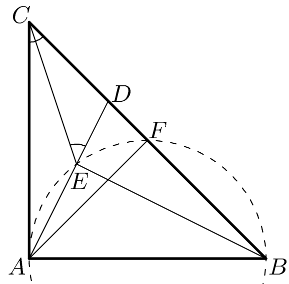
co dowodzi, że trójkąty prostokątne ABQ oraz CAP są przystające. Zatem $CP = AQ$, i w konsekwencji $CP = CQ$ $(= \frac{1}{2}AB)$.

Ponieważ $\measuredangle PCQ = \measuredangle PEQ = 90^\circ$, więc punkty C, Q, E, P leżą na jednym okręgu. Stąd $\measuredangle CED = \measuredangle CQP = 45^\circ$.

Sposób III

Oznaczmy przez F środek odcinka BC (rys. 3). Wykażemy najpierw, że zachodzi równość:

(3) $\qquad CD^2 = DF \cdot DB.$



rys. 3

Oznaczmy: $AB = AC = a$. Wówczas z definicji punktu D,

(4) $\qquad CD^2 = (\frac{1}{3}a\sqrt{2})^2 = \frac{2}{9}a^2$

oraz

$$DF \cdot DB = (DB - BF) \cdot DB = DB^2 - BF \cdot DB =$$

(5) $\qquad = (\frac{2}{3}a\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2}a\sqrt{2}) \cdot (\frac{2}{3}a\sqrt{2}) = \frac{2}{9}a^2.$

Łącząc ze sobą równości (4) i (5), otrzymujemy równość (3).

Ponieważ $\measuredangle AEB = \measuredangle AFB = 90^\circ$, więc punkty A, B, F, E leżą na jednym okręgu (rys. 3). Zatem na mocy równości (3),

$$CD^2 = DF \cdot DB = DE \cdot DA, \qquad \text{skąd} \quad \frac{CD}{DE} = \frac{DA}{CD}. \tag{6}$$

Trójkąty ADC i CDE mają wspólny kąt przy wierzchołku D, więc na mocy równości (6) trójkąty te są podobne. Stąd

$$\sphericalangle CED = \sphericalangle ACD = 45^\circ.$$

Sposób IV

Niech F będzie rzutem prostokątnym punktu D na prostą AB (rys. 4). Wykażemy najpierw, że punkty C, E, F są współliniowe. W tym celu wystarczy udowodnić, że

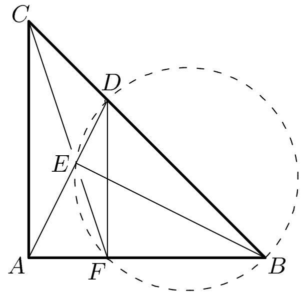
$$\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{DF}. \tag{7}$$

Na mocy twierdzenia Talesa mamy następujące równości:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{BD} = \frac{3}{2}. \tag{8}$$

Należy więc dowieść, że $AE\colon ED = 3\colon 2$.

Oznaczmy: $AB = AC = a$. Obliczmy długości odcinków AE i ED w zależności od a.



rys. 4

Na mocy twierdzenia Talesa $AF = \frac{1}{3}a$ oraz $DF = \frac{2}{3}a$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa $AD = \frac{1}{3}a\sqrt{5}$. Trójkąty prostokątne AFD i AEB mają wspólny kąt przy wierzchołku A, więc są podobne. Zatem

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD},$$

skąd wyliczając wielkość AE otrzymujemy $AE = \frac{1}{5}a\sqrt{5}$. Ponadto

$$ED = AD - AE = \tfrac{1}{3}a\sqrt{5} - \tfrac{1}{5}a\sqrt{5} = \tfrac{2}{15}a\sqrt{5},$$

skąd $AE\colon ED = 3\colon 2$. Dowód równości (7) został zakończony, co oznacza, że punkty C, E, F są współliniowe.

Ponieważ $\sphericalangle BED = \sphericalangle BFD = 90^\circ$, więc na czworokącie $FBDE$ można opisać okrąg (rys. 4). Zatem

$$\sphericalangle CED = \sphericalangle AEF = 90^\circ - \sphericalangle FEB = 90^\circ - \sphericalangle FDB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Zadanie **4.** Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że liczby $x+y$, x^2+y^2, x^3+y^3 i x^4+y^4 są całkowite. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba x^n+y^n jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie

Ponieważ

$$2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) \qquad \text{oraz} \qquad 2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - (x^4+y^4),$$

więc liczby $2xy$ i $2x^2y^2$ są całkowite. Gdyby liczba xy nie była całkowita, to liczba $2xy$ musiałaby być nieparzystą. Jednak wtedy liczba $2x^2y^2=(2xy)^2/2$ nie byłaby całkowita. Stąd wniosek, że liczba xy jest całkowita.

Tezę dowodzimy indukcyjnie. Dla $n=1$ i $n=2$ liczba x^n+y^n jest całkowita. Korzystając z tożsamości

$$x^n+y^n=(x^{n-1}+y^{n-1})(x+y)-xy(x^{n-2}+y^{n-2})$$

widzimy, że jeżeli $n\geqslant 3$ jest taką liczbą całkowitą dodatnią, że obie liczby $x^{n-2}+y^{n-2}$ oraz $x^{n-1}+y^{n-1}$ są całkowite, to liczba x^n+y^n jest również całkowita. Dowód indukcyjny jest więc zakończony.

Uwaga

Założenie, że liczba x^3+y^3 jest całkowita, nie było w dowodzie wykorzystywane. Natomiast założenia, że liczba x^4+y^4 jest całkowita, pominąć nie można. Pokazuje to przykład liczb $x=\sqrt{2}/2$ oraz $y=-\sqrt{2}/2$, dla których

$$x+y=0, \qquad x^2+y^2=1, \qquad x^3+y^3=0,$$

lecz $x^4+y^4=\frac{1}{2}$.

Zadanie **5.** Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniające równanie $y^x=x^{50}$.

Rozwiązanie

Dane równanie zapisujemy w postaci $y=x^{50/x}$. Ponieważ dla każdego x, będącego dzielnikiem liczby 50, liczba po prawej stronie jest całkowita, więc otrzymujemy rozwiązania równania dla $x\in\{1,2,5,10,25,50\}$. Inne rozwiązania tego równania otrzymamy tylko wtedy, gdy $x\geqslant 2$ oraz dla pewnego $k\geqslant 2$ liczba x jest jednocześnie k-tą potęgą pewnej liczby naturalnej oraz dzielnikiem liczby $50k$. Jeśli p jest dzielnikiem pierwszym takiej liczby x, to $p^k|50k$. Ponieważ zachodzi nierówność $p^k>k$, więc nie może być $p^k|k$. Stąd liczba p jest równa 2 lub 5. Jeżeli $p=2$, to $2^k|2k$, skąd $k=2$. Jeżeli zaś $p=5$, to $5^k|25k$, skąd znowu $k=2$. Zatem liczba x musi być jednocześnie kwadratem pewnej liczby naturalnej oraz dzielnikiem liczby 100. Otrzymujemy dwie nowe wartości x w tym przypadku: $x=4$ oraz $x=100$. Zatem dane równanie ma 8 rozwiązań (x,y):

$$(1,1),\ \ (2,2^{25}),\ \ (4,2^{25}),\ \ (5,5^{10}),\ \ (10,10^5),\ \ (25,625),\ \ (50,50),\ \ (100,10).$$

Zadanie **6.** Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q. Dowieść, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ.

Rozwiązanie

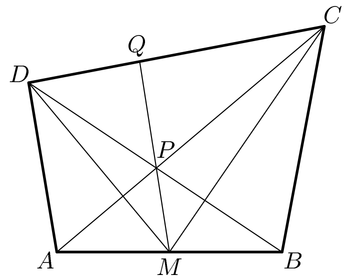
Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ.

Sposób I

Prawdziwe są następujące równości (rys. 1):

$$[MPC] = [AMC] - [AMP] = \tfrac{1}{2}[ABC] - \tfrac{1}{2}[ABP] = \tfrac{1}{2}[BCP].$$

Analogicznie dowodzimy, że $[MPD] = \frac{1}{2}[ADP]$. Zatem stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi pól trójkątów MPC i MPD. Trójkąty MPC i MPD mają wspólną podstawę MP, a więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi wysokości opuszczonych na tę podstawę, czyli (na mocy twierdzenia Talesa) wielkości $CQ:DQ$.



rys. 1

Sposób II

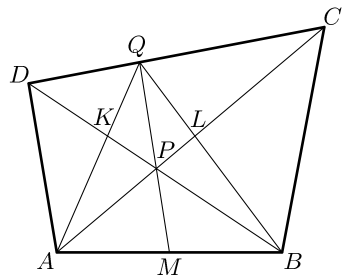
Niech K będzie punktem przecięcia odcinków BD i AQ, zaś niech L będzie punktem przecięcia odcinków AC i BQ (rys. 2).

Ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AB, więc na mocy twierdzenia Cevy (p. str. 120) zastosowanego do trójkąta ABQ otrzymujemy

$$\frac{BL}{LQ} = \frac{AK}{KQ}, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{[BCP]}{[CQP]} = \frac{[ADP]}{[DQP]}.$$

Zatem

$$\frac{[BCP]}{[ADP]} = \frac{[CQP]}{[DQP]} = \frac{CQ}{DQ}.$$



rys. 2

Sposób III

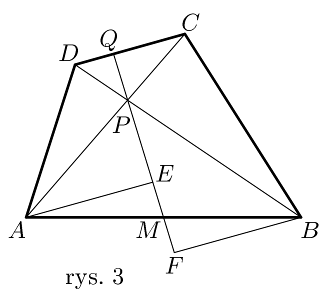
Niech E będzie punktem przecięcia prostej MQ z prostą przechodzącą przez punkt A i równoległą do CD. Podobnie, niech F będzie punktem przecięcia prostej MQ z prostą przechodzącą przez punkt B i równoległą do CD (rys. 3).

Na mocy twierdzenia Talesa

$$\frac{AE}{BF} = \frac{AM}{MB} = 1,$$

skąd

$$\frac{[BCP]}{[ADP]} = \frac{CP}{AP} \cdot \frac{BP}{DP} = \frac{CQ}{AE} \cdot \frac{BF}{DQ} = \frac{CQ}{DQ}.$$



rys. 3

Sposób IV

Wprowadźmy następujące oznaczenia (rys. 4):

$$\alpha = \sphericalangle APD = \sphericalangle CPB, \quad \beta = \sphericalangle DPQ = \sphericalangle BPM, \quad \gamma = \sphericalangle QPC = \sphericalangle MPA.$$

Mamy dowieść, że

$$\frac{[BCP]}{[ADP]} = \frac{CQ}{DQ}. \tag{1}$$

Wielkość $CQ{:}DQ$ jest równa stosunkowi pól trójkątów CPQ i DPQ, gdyż oba trójkąty mają wspólną wysokość opuszczoną na podstawy CQ i DQ. Zatem równość (1) przybiera postać

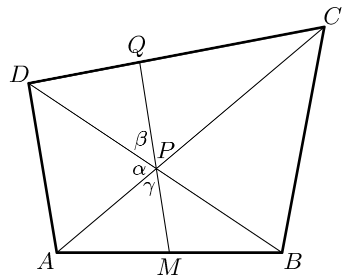
$$\frac{BP\cdot CP}{AP\cdot DP} = \frac{[CPQ]}{[DPQ]},$$

czyli

$$\frac{BP\cdot CP}{AP\cdot DP} = \frac{CP\cdot CQ\cdot \sin\gamma}{DP\cdot CQ\cdot \sin\beta}.$$

Należy więc dowieść, że

$$\frac{BP}{AP} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$



rys. 4

lub $BP\cdot\sin\beta = AP\cdot\sin\gamma$. Po pomnożeniu ostatniej równości przez $\frac{1}{2}MP$ dowodzona przez nas tożsamość przybiera postać $[BPM]=[APM]$. Ta równość jest prawdziwa, gdyż punkt M jest środkiem boku AB. Dowód równości (1) jest więc zakończony.

Zadanie **7.** Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ mające dokładnie n pierwiastków nie większych niż -1 oraz spełniające warunek

$$a_0^2+a_1a_n = a_n^2+a_0a_{n-1}.$$

Uwaga: Pierwiastki są liczone z uwzględnieniem krotności: jeśli liczba x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $P(x)$ (tzn. jeśli wielomian $P(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x-x_0)^k$, ale nie przez $(x-x_0)^{k+1}$), wówczas liczba x_0 jest traktowana jak k pierwiastków wielomianu $P(x)$.

Rozwiązanie

Niech $-p_1 \leqslant -p_2 \leqslant \ldots \leqslant -p_n$ będą pierwiastkami wielomianu spełniającego warunki zadania. Wówczas $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant 1$ oraz $a_n \neq 0$. Ponadto

$$a_{n-1} = a_n(p_1+p_2+\ldots+p_n), \quad a_1 = a_np_1p_2\ldots p_n\Big(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}\Big),$$

oraz $a_0 = a_np_1p_2\ldots p_n$. Warunek $a_0^2+a_1a_n = a_n^2+a_0a_{n-1}$ można więc przepisać w postaci

$$p_1p_2\ldots p_n + \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_1p_2\ldots p_n}+p_1+p_2+\ldots+p_n.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że dla $n \geqslant 2$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$p_1p_2\ldots p_n + \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n} \geqslant \frac{1}{p_1p_2\ldots p_n}+p_1+p_2+\ldots+p_n \tag{1}$$

oraz, że

(2) równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2 = p_3 = \ldots = p_n = 1$.

Dla $n=2$ nierówność (1) przybiera postać

$$p_1p_2 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geqslant \frac{1}{p_1p_2} + p_1 + p_2. \tag{3}$$

Jest ona równoważna nierówności

$$p_1^2p_2^2 - p_1^2p_2 - p_1p_2^2 + p_1p_2 \geqslant p_1p_2 - p_1 - p_2 + 1,$$

czyli $p_1p_2(p_1-1)(p_2-1) \geqslant (p_1-1)(p_2-1)$, co przy założeniu $p_1 \geqslant p_2 \geqslant 1$ jest spełnione. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2 - 1 = 0$.

Załóżmy teraz prawdziwość nierówności (1) oraz stwierdzenia (2) dla pewnej liczby $n \geqslant 2$. Niech ponadto dane będą liczby $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant p_{n+1} \geqslant 1$. Wówczas $p_1p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots \geqslant p_{n+1} \geqslant 1$, skąd na mocy założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned}(p_1p_2)p_3 \ldots p_np_{n+1} + \frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} &\geqslant \\ \geqslant \frac{1}{(p_1p_2)p_3\ldots p_np_{n+1}} + p_1p_2 + p_3 + \ldots + p_n + p_{n+1}\end{aligned} \tag{4}$$

oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_3 = \ldots = p_n = p_{n+1} = 1$.

Dodanie nierówności (3) i (4) stronami daje

$$\begin{aligned}p_1p_2p_3\ldots p_np_{n+1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} &\geqslant \\ \geqslant \frac{1}{p_1p_2p_3\ldots p_np_{n+1}} + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n + p_{n+1}.\end{aligned}$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2 = p_3 = \ldots = p_n = p_{n+1} = 1$.

Ze stwierdzenia (2) wynika zatem, że wielomiany spełniające warunki zadania mają postać $P(x) = a(x+1)^{n-1}(x+b)$, gdzie a jest dowolną niezerową liczbą rzeczywistą, zaś $b \geqslant 1$.

Zadanie **8.** Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$ oraz zbiór n-elementowy S. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną k, dla której istnieją podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru S o następującej własności: *dla dowolnych dwóch różnych elementów $a, b \in S$ istnieje taka liczba $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, że zbiór $A_j \cap \{a, b\}$ jest jednoelementowy.*

Rozwiązanie

Wykażemy, że $k = [\log_2(n-1)+1]$, tzn. $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$.

Mając liczbę k określoną jak wyżej, konstruujemy zbiory A_j następująco: numerujemy elementy zbioru S liczbami k-cyfrowymi w układzie dwójkowym (dopuszczamy zera początkowe). Mamy więc do dyspozycji $2^k \geqslant n$ liczb. Następnie za A_i bierzemy zbiór tych elementów zbioru S, których numer ma na i-tym miejscu jedynkę. Dowolne różne elementy a i b zbioru S mają wówczas przypisane różne numery, które różnią się, powiedzmy, na j-tym miejscu. Wtedy do zbioru A_j należy dokładnie jeden z elementów a, b.

Tak znaleziona liczba k jest najmniejsza. Załóżmy bowiem, że istnieją zbiory $A_1,A_2,\ldots,A_k$ spełniające warunki zadania dla $2^k<n$. Każdemu elementowi x zbioru S przypisujemy układ k liczb $(c_1,c_2,\ldots,c_k)$ według następującej zasady:

$$c_i=\begin{cases}0 & \text{gdy} \quad x\notin A_i\\ 1 & \text{gdy} \quad x\in A_i\end{cases} \qquad (i=1,2,\ldots,k).$$

Ponieważ $2^k<n$, więc istnieją dwa różne elementy $a,b\in S$, które mają przypisany ten sam układ liczb. To zaś oznacza, że element a należy do dokładnie tych samych zbiorów spośród $A_1,A_2,\ldots,A_k$, co element b.

Zadanie **9.** Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

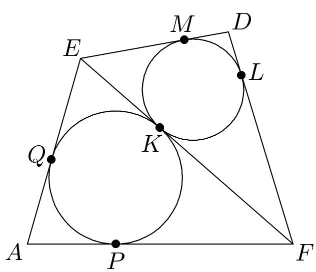
Rozwiązanie

Sposób I

Rozwiązanie to opiera się na twierdzeniu mówiącym o tym, że złożenie dwóch jednokładności jest (na ogół) jednokładnością. Dokładne sformułowanie tego twierdzenia oraz jego dowód znajduje się na końcu niniejszej broszury (zob. *Dodatek*, „Twierdzenie o złożeniu jednokładności”, str. 114).

Niech K, L, M będą odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt DEF z bokami EF, FD, DE (rys. 1). Przyjmijmy ponadto, że okrąg wpisany w trójkąt AFE jest styczny do boków EF, FA, AE odpowiednio w punktach K, P, Q. Wówczas $ME=KE=QE$ oraz $LF=KF=PF$. Stąd otrzymujemy

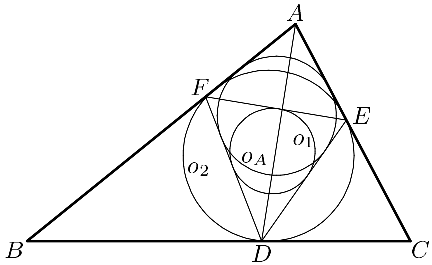
$$AF+DE=AP+PF+DM+ME=AQ+QE+FL+LD=AE+DF.$$



rys. 1

Udowodniliśmy więc, że *jeśli okręgi wpisane w trójkąty AFE oraz DEF są styczne, to w czworokąt $AFDE$ można wpisać okrąg*. Oznaczmy ten okrąg przez o_A.

Niech o_1 będzie okręgiem wpisanym w trójkąt DEF, zaś o_2 okręgiem wpisanym w trójkąt ABC (rys. 2). Punkt D jest środkiem jednokładności j_1 o skali dodatniej, przekształcającej okrąg o_1 na o_A; punkt A jest środkiem jednokładności j_2 o skali dodatniej, przekształcającej okrąg o_A na o_2. Zatem jednokładność j o skali dodatniej, przekształcająca okrąg o_1 na o_2, jest złożeniem jednokładności j_1 i j_2 — jej środek leży więc na prostej AD.



rys. 2

Analogicznie dowodzimy, że środek jednokładności j leży na prostych BE i CF.

Wniosek: proste AD, BE, CF mają punkt wspólny, będący środkiem jednokładności okręgów o_1 i o_2.

Uwaga

Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do tego, z którego korzystaliśmy na początku powyższego rozwiązania, a mianowicie: *jeśli w czworokąt $AFDE$ można wpisać okrąg, to okręgi wpisane w trójkąty AFE oraz DEF są styczne.* Nietrudny dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Sposób II

Ponieważ okrąg wpisany w trójkąt DEF jest styczny do okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BFD, CDE, więc w czworokąty $AFDE$, $BDEF$, $CEFD$ można wpisać okręgi (zob. początek sposobu I). Oznaczmy okręgi wpisane w wyżej wymienione czworokąty odpowiednio przez o_A, o_B, o_C.

Wykażemy, że trójkąty ABC oraz DEF mają oś perspektywiczną (p. *Dodatek*, „Twierdzenie Desarguesa”, str. 117). Wówczas na mocy twierdzenia Desarguesa, trójkąty te mają środek perspektywiczny. To oznacza, że odcinki AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Pozostało więc udowodnić, że trójkąty ABC, DEF mają oś perspektywiczną. W tym celu rozpatrzymy trzy przypadki.

(a) Załóżmy najpierw, że żadna z par (AB,DE), (BC,EF), (CA,FD) nie tworzy pary boków równoległych, tzn. $AB \nparallel DE$, $BC \nparallel EF$, $CA \nparallel FD$. Oznaczmy symbolem $k \cap \ell$ punkt przecięcia prostych k oraz ℓ. Przyjmijmy: $X = BA \cap DE$, $Y = BC \cap EF$, $Z = CA \cap FD$. Ponieważ okręgi o_A, o_B są styczne do prostych AB i DE, więc punkt X jest środkiem jednokładności j_1 o skali dodatniej, przekształcającej okrąg o_A na okrąg o_B. Analogicznie, punkt Y jest środkiem jednokładności j_2 o skali dodatniej, która przekształca okrąg o_B na okrąg o_C. Zatem złożenie $j_2 \circ j_1$ jest jednokładnością, której środek leży na prostej XY. Z drugiej strony jednokładność $j_2 \circ j_1$ ma skalę dodatnią i przeprowadza okrąg o_A na okrąg o_C. Środkiem jej jest więc punkt Z. Wykazaliśmy tym samym, że punkty X, Y, Z są współliniowe. Zatem trójkąty ABC i DEF mają oś perspektywiczną.

(b) Załóżmy z kolei, że dokładnie jedna spośród par (AB,DE), (BC,EF), (CA,FD) jest parą prostych równoległych. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $CA \parallel FD$, oraz oznaczyć $X = BA \cap DE$, $Y = BC \cap EF$. Rozumując tak samo jak w przypadku (a) widzimy, że punkt X jest środkiem jednokładności j_1 o skali dodatniej, przekształcającej okrąg o_A na okrąg o_B, zaś punkt Y jest środkiem jednokładności j_2 o skali dodatniej, która przekształca okrąg o_B na okrąg o_C. Ponieważ promienie okręgów o_A i o_C są jednakowe, więc złożenie $j_2 \circ j_1$ jest przesunięciem. Wektor tego przesunięcia jest równoległy do prostej XY jak również do prostej łączącej środki okręgów o_A i o_C. Proste XY, AB, CD są więc równoległe, co w tym przypadku oznacza, że trójkąty ABC i DEF mają oś perspektywiczną.

(c) Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym co najmniej dwie pary spośród (AB,DE), (BC,EF), (CA,FD) są parami boków równoległych. Bez straty ogólności przyjmijmy, że tymi dwiema parami są (BC,EF) i (CA,FD). Wówczas na mocy twierdzenia Talesa

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB},$$

skąd wynika, że również $AB \parallel DE$. Zatem, zgodnie z przyjętą konwencją, również w tym przypadku trójkąty ABC i DEF mają oś perspektywiczną.

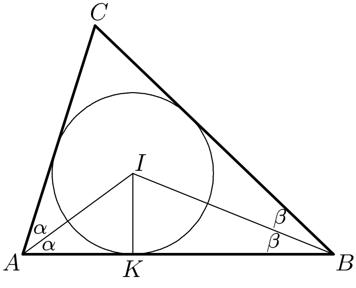
* * *

W dwóch kolejnych sposobach skorzystamy z następującego lematu.

Lemat

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC (rys. 3); okrąg ten jest styczny do boku AB w punkcie K. Wówczas

$$(1) \qquad \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AK}{BK} = \left(\frac{AI}{BI}\right)^2.$$



rys. 3

Dowód

Oznaczmy:

$$\alpha = \sphericalangle CAI = \sphericalangle KAI, \quad \beta = \sphericalangle CBI = \sphericalangle KBI.$$

Równość (1) przepisujemy w następującej, równoważnej postaci

$$\frac{AK}{AI} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{BK}{BI} \cdot \frac{AI}{BI}.$$

Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych oraz stosując twierdzenie sinusów do trójkątów ABC i ABI, możemy powyższą równość przepisać kolejno jako:

$$\cos\alpha\cdot\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}=\cos\beta\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\qquad \cos\alpha\cdot\frac{2\sin\beta\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\beta\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Ostatnia zależność jest spełniona dla dowolnych liczb $0<\alpha<\pi/2$ oraz $0<\beta<\pi/2$. Dowód lematu jest więc zakończony.

Sposób III

Oznaczmy przez I_A, I_B, I_C, I odpowiednio środki okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BFD, CDE, DEF. Niech ponadto K, L, M będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt DEF odpowiednio z bokami EF, FD, DE. Punkty K, L, M są również punktami styczności okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BFD, CDE z bokami trójkąta DEF (rys. 4). Stosując powyższy lemat do trójkątów EDC, FEA, DFB otrzymujemy kolejno:

$$\frac{CD}{CE}\cdot\frac{MD}{EM}=\left(\frac{DI_C}{EI_C}\right)^2,\quad \frac{AE}{AF}\cdot\frac{KE}{FK}=\left(\frac{EI_A}{FI_A}\right)^2,\quad \frac{BF}{BD}\cdot\frac{LF}{DL}=\left(\frac{FI_B}{DI_B}\right)^2.$$

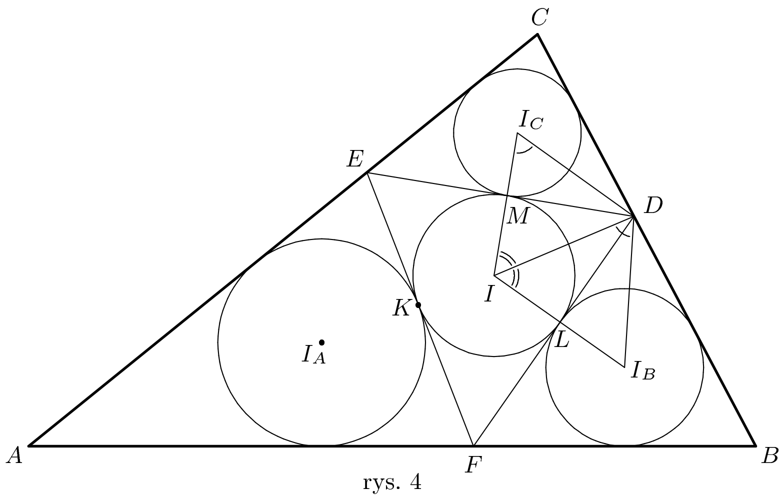
Ponieważ $EM=KE$, $FK=LF$ oraz $DL=MD$, więc mnożąc stronami powyższe zależności otrzymujemy

$$(4)\quad \frac{CD}{CE}\cdot\frac{AE}{AF}\cdot\frac{BF}{BD}=\left(\frac{DI_C}{EI_C}\cdot\frac{EI_A}{FI_A}\cdot\frac{FI_B}{DI_B}\right)^2=\left(\frac{DI_C}{DI_B}\right)^2\cdot\left(\frac{EI_A}{EI_C}\right)^2\cdot\left(\frac{FI_B}{FI_A}\right)^2.$$

Dalej zauważamy, że

$$2(\sphericalangle MDI_C+\sphericalangle I_BDI)=2\sphericalangle MDI_C+2\sphericalangle LDI+2\sphericalangle I_BDL=180^\circ,$$

skąd $\sphericalangle I_BDI=90^\circ-\sphericalangle MDI_C=\sphericalangle II_CD$. Ponadto $\sphericalangle I_BID=\sphericalangle DMI_C$. Z ostatnich dwóch równości wynika, że trójkąty IDI_B oraz II_CD są podobne.



rys. 4

Uzyskujemy zatem następujące proporcje:

$$\frac{DI_C}{DI_B}=\frac{II_C}{ID} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{DI_C}{DI_B}=\frac{ID}{II_B}.$$

Mnożąc je stronami dostajemy $\left(\frac{DI_C}{DI_B}\right)^2=\frac{II_C}{II_B}$. Analogicznie dowodzimy, że

$$\left(\frac{EI_A}{EI_C}\right)^2=\frac{II_A}{II_C} \qquad \text{oraz} \qquad \left(\frac{FI_B}{FI_A}\right)^2=\frac{II_B}{II_A}.$$

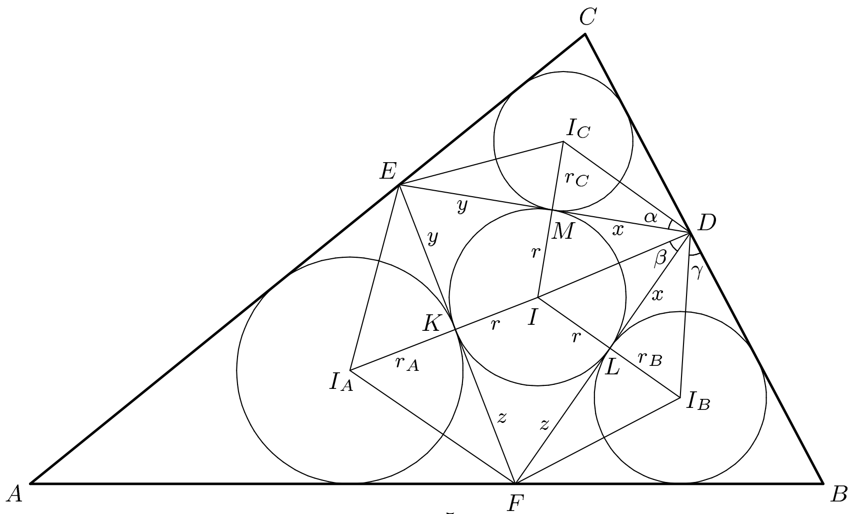
Łącząc ze sobą trzy ostatnie równości oraz zależność (4) otrzymujemy

$$\frac{CD}{CE}\cdot\frac{AE}{AF}\cdot\frac{BF}{BD}=\frac{II_C}{II_B}\cdot\frac{II_A}{II_C}\cdot\frac{II_B}{II_A}=1,$$

skąd, na mocy twierdzenia Cevy (zob. str. 120), odcinki AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Sposób IV

Przyjmijmy takie same oznaczenia jak w sposobie III. Niech ponadto r_A, r_B, r_C, r będą odpowiednio promieniami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BFD, CDE, DEF oraz niech $x=DL=DM$, $y=EM=EK$, $z=FK=FL$, $\alpha=\sphericalangle MDI_C$, $\beta=\sphericalangle IDM=\sphericalangle IDL$, $\gamma=\sphericalangle I_BDL$ (rys. 5).



rys. 5

Ponieważ $\sphericalangle CDE+\sphericalangle EDF+\sphericalangle FDB=180^\circ$, więc $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$, skąd otrzymujemy równości: $\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)=\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$. Przekształcając równoważnie ostatni związek dostajemy kolejno:

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}=\operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{\frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r_B}-1}{\frac{x}{r}+\frac{x}{r_B}}=\frac{r_C}{x}, \qquad \frac{x^2-rr_B}{r_B+r}=r_C,$$

skąd $x^2=r(r_B+r_C)+r_Br_C$. Analogicznie obliczamy:
$$y^2=r(r_C+r_A)+r_Cr_A \qquad \text{oraz} \qquad z^2=r(r_A+r_B)+r_Ar_B.$$
Korzystając z lematu oraz z powyższych trzech wzorów otrzymujemy
$$\frac{EC}{CD}\cdot\frac{y}{x}=\frac{y^2+r_C^2}{x^2+r_C^2}=\frac{r(r_C+r_A)+r_Cr_A+r_C^2}{r(r_B+r_C)+r_Br_C+r_C^2}=$$
$$=\frac{(r+r_C)(r_C+r_A)}{(r+r_C)(r_C+r_B)}=\frac{r_C+r_A}{r_C+r_B}.$$
W ten sam sposób dowodzimy, że
$$\frac{DB}{BF}\cdot\frac{x}{z}=\frac{r_B+r_C}{r_B+r_A} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{FA}{AE}\cdot\frac{z}{y}=\frac{r_A+r_B}{r_A+r_C}.$$
Mnożąc stronami trzy ostatnie równości dostajemy
$$\frac{EC}{CD}\cdot\frac{DB}{BF}\cdot\frac{FA}{AE}=\frac{r_C+r_A}{r_C+r_B}\cdot\frac{r_B+r_C}{r_B+r_A}\cdot\frac{r_A+r_B}{r_A+r_C}=1,$$
skąd, na mocy twierdzenia Cevy (zob. str. 120), odcinki AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie **10.** Dana jest liczba $x_1>0$. Ciąg (x_n) jest zdefiniowany wzorem:
$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n^2} \qquad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots\,.$$
Udowodnić, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$, i obliczyć ją.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego twierdzenia:

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g, to ciąg (b_n), określony wzorem
$$b_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$
jest również zbieżny i jego granica wynosi g.

Dowód tego twierdzenia znajduje się w *Dodatku*, str. 116.

Podstawmy $y_n=x_n^3$. Wtedy
$$y_{n+1}=y_n\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^3=y_n+3+\frac{3}{y_n}+\frac{1}{y_n^2}.$$
Skoro $y_{n+1}>y_n+3$, więc ciąg (y_n) jest rozbieżny do nieskończoności. Zatem na mocy powyższej równości $(y_{n+1}-y_n)\to 3$. Z ostatniej zbieżności oraz z zacytowanego wyżej twierdzenia zastosowanego do ciągu
$$a_n=\begin{cases} y_1 & \text{dla} \quad n=1\\ y_n-y_{n-1} & \text{dla} \quad n>1\end{cases}$$
otrzymujemy
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\ldots+(y_n-y_{n-1})}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n}=3,$$
skąd $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt[3]{n}}=\sqrt[3]{3}$.

Zadanie **11.** W urnie znajdują się dwie kule: biała i czarna. Ponadto mamy do dyspozycji 50 kul białych i 50 czarnych. Wykonujemy 50 razy następującą czynność: losujemy z urny kulę, a następnie wrzucamy ją z powrotem do urny oraz dokładamy jedną kulę tego samego koloru, co wylosowana kula. Po zakończeniu tych czynności mamy więc w urnie 52 kule. Jaka liczba kul białych znajdujących się w urnie jest najbardziej prawdopodobna?

Rozwiązanie

Niech $P(k,n)$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n-1$, oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że gdy w urnie jest n kul, to dokładnie k z nich ma kolor biały. Udowodnimy, że

$$(1) \qquad P(1,2)=1 \quad \text{oraz} \quad P(k,n+1)=\frac{n-k}{n}P(k,n)+\frac{k-1}{n}P(k-1,n).$$

Pierwsza z powyższych równości jest oczywista. Druga wynika z następujących rozważań.

Zastanawiamy się, kiedy po dołożeniu $(n+1)$-szej kuli do urny zawierającej n kul w urnie znajdzie się dokładnie k kul białych. Jest to możliwe w następujących dwóch sytuacjach:

(a) *Jako* $(n+1)$*-szą kulę dołożono kulę czarną.* Wówczas przed dołożeniem tej kuli musiało być w urnie k kul białych. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $P(k,n)$. Kulę czarną wylosowano więc z prawdopodobieństwem $\frac{n-k}{n}$. Zatem prawdopodobieństwo tego, że w urnie zawierającej $n+1$ kul dokładnie k jest białych, pod warunkiem, że ostatnia dorzucona kula jest *czarna*, wynosi

$$\frac{n-k}{n}P(k,n).$$

(b) *Jako* $(n+1)$*-szą kulę dołożono kulę białą.* Wówczas przed dołożeniem tej kuli musiało być w urnie dokładnie $k-1$ kul białych. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $P(k-1,n)$. Kulę białą wylosowano więc z prawdopodobieństwem $\frac{k-1}{n}$. Stąd prawdopodobieństwo tego, że w urnie zawierającej $n+1$ kul dokładnie k jest białych, pod warunkiem, że ostatnia dorzucona kula jest *biała*, wynosi

$$\frac{k-1}{n}P(k-1,n).$$

Łącząc ze sobą dwa powyższe przypadki dostajemy drugą z równości (1).

Korzystając ze wzorów (1) dowodzimy indukcyjnie (ze względu na n), że $P(k,n)=1/(n-1)$ dla $k=1,2,\ldots,n-1$. Istotnie, dla $n=2$ mamy $P(1,2)=1$. Jeśli $n \geqslant 2$ jest taką liczbą naturalną, że

$$P(k,n)=\frac{1}{n-1} \qquad \text{dla} \;\; k=1,2,\ldots,n-1\ ,$$

to dla $k=1,2,\ldots,n$ mamy

$$P(k,n+1)=\frac{n-k}{n}P(k,n)+\frac{k-1}{n}P(k-1,n)=\frac{n-k}{n}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{k-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}.$$

W szczególności

$$P(k,52)=\frac{1}{51}\qquad \text{dla}\quad k=1,2,\ldots,51.$$

Zatem każda możliwa liczba kul białych po 50 losowaniach (od 1 do 51) jest jednakowo prawdopodobna.

Zadanie **12.** Wszystkie wierzchołki sześcianu o krawędzi a leżą na powierzchni czworościanu foremnego o krawędzi 1. Wyznaczyć możliwe wartości a.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że dany sześcian $ABCDA'B'C'D'$ leży wewnątrz danego czworościanu $KLMN$. Możliwe są dwa przypadki:

(a) Istnieje ściana czworościanu $KLMN$ (na przykład KLM), na której leżą co najmniej trzy wierzchołki sześcianu;

(b) Na każdej ścianie czworościanu $KLMN$ leżą dokładnie dwa wierzchołki sześcianu.

Rozważmy najpierw przypadek (a). Trzy wierzchołki sześcianu, które leżą na ścianie KLM, muszą być wierzchołkami jednej ściany tego sześcianu. To oznacza, że pewna ściana sześcianu, powiedzmy $ABCD$, leży wewnątrz trójkąta KLM; pozostałe cztery wierzchołki A', B', C', D' znajdują się na ścianach KLN, LMN, MKN. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że ściana KLN zawiera któreś dwa spośród punktów A', B', C', D'. Muszą one być dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $A'B'C'D'$. Nie tracąc ogólności rozważań, możemy przyjąć, że punkty A', B' leżą na ścianie KLN, punkt C' leży na ścianie LMN, zaś punkt D' znajduje się na ścianie MKN (rys. 1).

Warunek (a) wyznacza więc jednoznacznie (z dokładnością do przyjętych oznaczeń) położenie danego sześcianu wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi 1. Przystępujemy do wyznaczenia długości krawędzi a.

Oznaczmy przez K', L', M', odpowiednio punkty przecięcia krawędzi KN, LN, MN z płaszczyzną $A'B'C'D'$. Czworościan $K'L'M'N$ jest foremny. Oznaczmy jego krawędź przez b. Wtedy $K'A'=B'L'=(a\sqrt{3})/3$, skąd

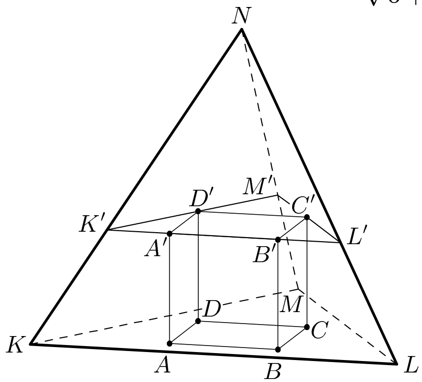
$$b=a+\frac{2\sqrt{3}}{3}a. \tag{1}$$

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi λ wyraża się wzorem $h=\frac{\sqrt{6}}{3}\lambda$. Porównując wysokości czworościanów $KLMN$ oraz $K'L'M'N$ otrzymujemy równość

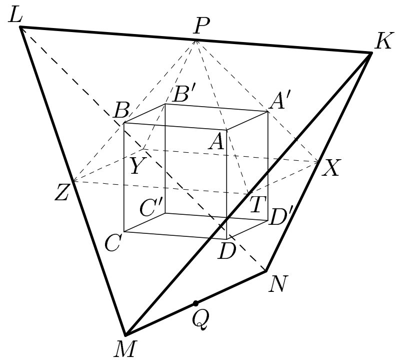
$$\frac{\sqrt{6}}{3}b+a=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

skąd wykorzystując równość (1) mamy

$$a=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2\sqrt{2}+3}.$$



rys. 1



rys. 2

Pozostał do rozpatrzenia przypadek (b).

Każdy z czterech odcinków łączących wierzchołki danego sześcianu, leżący na tej samej ścianie czworościanu $KLMN$, jest krawędzią tego sześcianu. Odcinki te nie mają wspólnych końców. Przypuśćmy, że krawędź AB leży na ścianie KLM. Wówczas jedna z krawędzi $A'B'$ lub CD leży na jednej ze ścian KLN, LMN, MKN. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $A'B'$ leży na KLN. Wtedy proste AB i $A'B'$ są równoległe do krawędzi KL, a co za tym idzie, proste CD i $C'D'$ są prostopadłe do krawędzi MN; nie mogą więc one leżeć na ścianach LMN i KMN. Możemy zatem założyć, że odcinek CC' leży na ścianie LMN, zaś odcinek DD' znajduje się na ścianie KMN (rys. 2).

Oznaczmy przez X, Y, Z, T odpowiednio środki krawędzi KN, NL, LM, MK. Wówczas kwadraty $A'B'BA$ oraz $D'C'CD$ mają boki równoległe odpowiednio do boków kwadratu $XYZT$. Stąd istnieje (w przestrzeni) środek jednokładności P kwadratów $A'B'BA$ i $XYZT$, leżący na krawędzi KL oraz środek jednokładności Q kwadratów $D'C'CD$ i $XYZT$, leżący na krawędzi MN. Skale jednokładności w obu przypadkach są równe i wynoszą $2a$. Odległości od punktów P i Q do płaszczyzny $XYZT$ są równe i wynoszą $\sqrt{2}/4$. Stąd wynika, że odległości od płaszczyzn $A'B'BA$ i $D'C'CD$ do płaszczyzny $XYZT$ są równe — a więc każda z nich wynosi $a/2$. Te trzy wielkości są związane ze sobą zależnością

$$1-2a=\frac{a/2}{\sqrt{2}/4},\qquad \text{skąd otrzymujemy}\qquad a=\frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

Pozostaje zauważyć, że powyższą wartość można zrealizować biorąc za P i Q środki krawędzi KL i MN.

Reasumując: możliwe wartości a wynoszą

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2\sqrt{2}+3} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

æ

Zawody stopnia drugiego

Zadanie **1.** Dana jest funkcja $f\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ taka, że $f(\frac{1}{n})=(-1)^n$ dla $n=1,2,\ldots$. Wykazać, że nie istnieją funkcje rosnące $g\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, $h\colon\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, dla których $f=g-h$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieją funkcje g i h spełniające warunki zadania. Ponieważ funkcje te są rosnące, więc dla każdego $k\in\mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} g(\tfrac{1}{2k+1}) &= f(\tfrac{1}{2k+1})+h(\tfrac{1}{2k+1}) = -1+h(\tfrac{1}{2k+1}) < \\ &< -1+h(\tfrac{1}{2k}) = 1+h(\tfrac{1}{2k})-2 = \\ &= f(\tfrac{1}{2k})+h(\tfrac{1}{2k})-2 = g(\tfrac{1}{2k})-2 < g(\tfrac{1}{2k-1})-2. \end{aligned}$$

Z monotoniczności funkcji g oraz powyższych nierówności dostajemy

$$g(0) < g(\tfrac{1}{2k+1}) < g(\tfrac{1}{2k-1})-2 < g(\tfrac{1}{2k-3})-4 < \ldots < g(\tfrac{1}{3})-2(k-1) < g(1)-2k.$$

Zatem $g(1)-g(0) > 2k$ dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$, co nie jest możliwe.

Uwaga

Zadanie wiąże się z pojęciem funkcji o wahaniu ograniczonym. Mówimy, że funkcja $f\colon\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ ma *wahanie ograniczone*, jeżeli istnieje taka liczba M, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnych liczb rzeczywistych

$$a \leqslant x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n \leqslant b$$

zachodzi nierówność

$$|f(y_1)-f(x_1)|+|f(y_2)-f(x_2)|+\ldots+|f(y_n)-f(x_n)| < M\,.$$

Funkcje, które nie spełniają powyższego warunku, nazywamy funkcjami o *wahaniu nieograniczonym*.

Zauważmy, że dana w treści zadania funkcja f ma wahanie nieograniczone. Wystarczy bowiem przyjąć

$$x_k=\frac{1}{2n-2k+2} \qquad \text{oraz} \qquad y_k=\frac{1}{2n-2k+1} \qquad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Wówczas $0\leqslant x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n \leqslant 1$ oraz

$$|f(y_1)-f(x_1)|+|f(y_2)-f(x_2)|+\ldots+|f(y_n)-f(x_n)| = 2n,$$

co wraz ze wzrostem n jest nieograniczone.

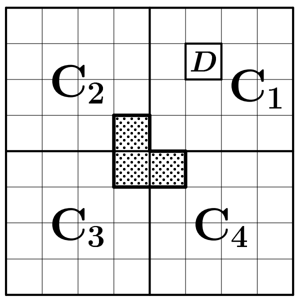
Okazuje się, że wahanie ograniczone mają te i tylko te funkcje, które dają się przedstawić w postaci różnicy dwóch funkcji rosnących.

Zadanie **2.** Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów jednostkowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n=1$ teza zadania jest oczywiście prawdziwa.

Niech n będzie liczbą naturalną, dla której teza zadania jest prawdziwa. Rozważmy sześcian C o krawędzi 2^{n+1} z wyróżnionym sześcianem jednostkowym D. Sześcian C dzielimy na osiem przystających sześcianów $C_1,C_2,\ldots,C_8$, każdy o krawędzi 2^n. W jednym z nich (przyjmijmy, że w C_1) znajduje się sześcian jednostkowy D. Połóżmy klocek K w samym środku sześcianu C tak, aby jego część wspólna z każdym z sześcianów $C_2,C_3,\ldots,C_8$ była sześcianem jednostkowym (analogiczna sytuacja przedstawiona jest na rys. 1 w przypadku dwuwymiarowym).



rys. 1

Na mocy założenia indukcyjnego można wypełnić klockami zarówno sześcian C_1 z usuniętym sześcianem jednostkowym D, jak i każdy z sześcianów $C_2,C_3,\ldots,C_8$ z usuniętym sześcianem jednostkowym stanowiącym część wspólną z klockiem K.

W ten sposób wypełnimy klockami sześcian C z usuniętym sześcianem jednostkowym D, co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **3.** Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i CD, przy czym $AE:EB=CF:FD$. Punkt P leży na odcinku EF i spełnia warunek $EP:PF=AB:CD$. Udowodnić, że stosunek pól trójkątów APD i BPC nie zależy od wyboru punktów E i F.

Rozwiązanie

Sposób I

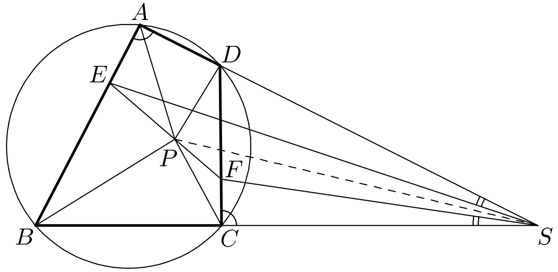
Załóżmy najpierw, że proste AD i BC nie są równoległe i przecinają się w punkcie S (rys. 1). Ponieważ $\sphericalangle BAS = 180^\circ - \sphericalangle BCD = \sphericalangle DCS$, więc trójkąty ASB i CSD są podobne. Ponadto

$$\frac{AB}{AE} = 1 + \frac{EB}{AE} = 1 + \frac{FD}{CF} = \frac{CD}{CF}, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CD} = \frac{AS}{CS}.$$

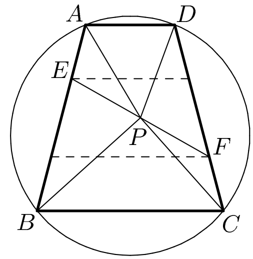
Z powyższych związków oraz z równości $\sphericalangle EAS = \sphericalangle FCS$ wynika, że trójkąty ASE i CSF są podobne. Stąd $\sphericalangle DSE = \sphericalangle CSF$ oraz

$$\frac{SE}{SF} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD} = \frac{EP}{PF},$$

co dowodzi, że $\sphericalangle ESP = \sphericalangle FSP$. Zatem punkt P leży na dwusiecznej kąta ASB, czyli jest on równoodległy od prostych AD i BC. Stosunek pól trójkątów APD i BPC jest więc równy stosunkowi długości boków AD i BC, czyli nie zależy od wyboru punktów E i F.



rys. 1



rys. 2

Załóżmy teraz, że proste AD i BC są równoległe (rys. 2). Wtedy czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, gdzie $AB = CD$. Punkt P jest więc środkiem odcinka EF, co oznacza, że jest on równoodległy od prostych przechodzących przez punkty E, F i równoległych do podstaw trapezu $ABCD$. Ponadto $BE = DF$, skąd wynika, że punkty E i F są jednakowo odległe odpowiednio od prostych BC i AD. Zatem odległości od punktu P do prostych BC i AD są takie same. Tym samym stosunek pól trójkątów APD i BPC jest równy stosunkowi długości odcinków AD i BC, czyli nie zależy od wyboru punktów E i F.

Sposób II

Udowodnimy najpierw następujący

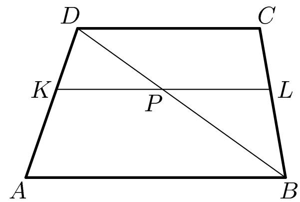
Lemat

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Prosta równoległa do podstaw tego trapezu przecina odcinki AD i BC odpowiednio w punktach K i L (rys. 3). Wówczas

$$KL = \frac{LC}{BC} \cdot AB + \frac{LB}{BC} \cdot CD.$$

Dowód

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnej BC z odcinkiem KL. Wówczas na mocy twierdzenia Talesa



rys. 3

$$KP = \frac{DP}{BD} \cdot AB = \frac{LC}{BC} \cdot AB$$

oraz

$$PL = \frac{BP}{BD} \cdot CD = \frac{LB}{BC} \cdot CD.$$

Dodając stronami powyższe równości dostajemy tezę.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Ponieważ $AE{:}EB = CF{:}FD$, więc

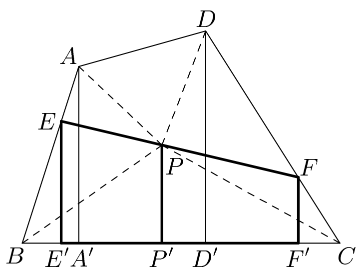
(1) $$\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD} = \lambda \qquad \text{oraz} \qquad \frac{BE}{AB} = \frac{FD}{CD} = \mu.$$

Z warunku $EP{:}PF = AB{:}CD$ wynika natomiast, że

(2) $$\frac{EP}{EF} = \frac{AB}{AB+CD} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{PF}{EF} = \frac{CD}{AB+CD}.$$

Oznaczmy przez A', D', E', F', P' odpowiednio rzuty prostokątne punktów A, D, E, F, P na prostą BC (rys. 4). Na mocy udowodnionego wyżej lematu oraz równości (2) otrzymujemy

$$PP' = \frac{EP}{EF} \cdot FF' + \frac{FP}{EF} \cdot EE' = \frac{AB}{AB+CD} \cdot FF' + \frac{CD}{AB+CD} \cdot EE'.$$



rys. 4

Korzystając z twierdzenia Talesa oraz równości (1) uzyskujemy

$$PP' = \frac{\lambda \cdot AB}{AB+CD} \cdot DD' + \frac{\mu \cdot CD}{AB+CD} \cdot AA'.$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez $\frac{1}{2}BC$ mamy

(3) $$[BPC] = \frac{\lambda \cdot AB}{AB+CD} \cdot [BCD] + \frac{\mu \cdot CD}{AB+CD} \cdot [BCA],$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ. Analogicznie dowodzimy, że

(4) $$[APD] = \frac{\mu \cdot AB}{AB+CD} \cdot [ADC] + \frac{\lambda \cdot CD}{AB+CD} \cdot [ADB].$$

Wprowadźmy dla zwięzłości zapisu następujące oznaczenia:

$$\alpha = \sphericalangle DAB, \quad \beta = \sphericalangle ABC, \quad \gamma = \sphericalangle BCD, \quad \delta = \sphericalangle CDA.$$

Ponieważ na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, więc $\sin\alpha = \sin\gamma$ oraz $\sin\beta = \sin\delta$. Stąd oraz z równości (3) i (4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{[APD]}{[BPC]} &= \frac{\mu\cdot AB\cdot[ADC]+\lambda\cdot CD\cdot[ADB]}{\lambda\cdot AB\cdot[BCD]+\mu\cdot CD\cdot[BCA]} = \\ &= \frac{\mu\cdot AB\cdot AD\cdot CD\cdot\sin\delta+\lambda\cdot CD\cdot AB\cdot AD\cdot\sin\alpha}{\lambda\cdot AB\cdot BC\cdot CD\cdot\sin\gamma+\mu\cdot CD\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\beta} = \\ &= \frac{AB\cdot AD\cdot CD\cdot(\mu\sin\delta+\lambda\sin\alpha)}{AB\cdot BC\cdot CD\cdot(\lambda\sin\gamma+\mu\sin\beta)} = \frac{AD}{BC}.\end{aligned}$$

Otrzymana wielkość nie zależy od wyboru punktów E, F, co kończy dowód.

Zadanie **4.** Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki:

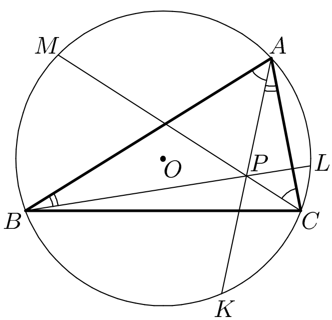
(1) $\qquad \sphericalangle PAB = \sphericalangle PCA \qquad$ oraz $\qquad \sphericalangle PAC = \sphericalangle PBA.$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to kąt APO jest prosty.

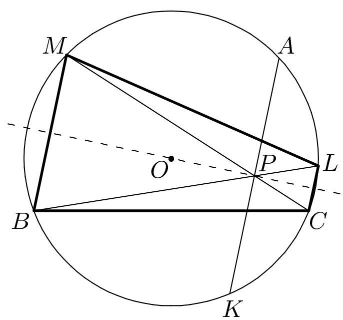
Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez K, L, M odpowiednio punkty przecięcia prostych AP, BP, CP z okręgiem opisanym na trójkącie ABC (rys. 1). Na mocy równości $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ACM$ długości łuków BK i AM są równe. Analogicznie, długości łuków KC i LA są równe. (Długość łuku XY jest mierzona od punktu X do punktu Y w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).



rys. 1

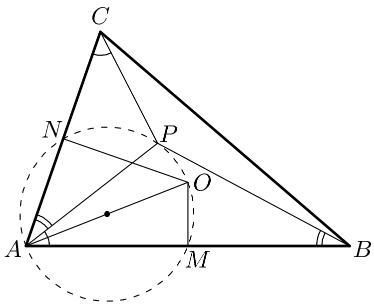


rys. 2

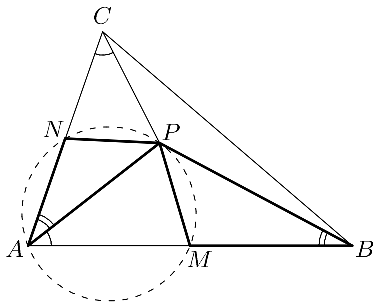
Odcinki LC, AK, MB są więc równoległe (rys. 2). Zatem mają one wspólną symetralną, która przechodzi przez punkt O. Na tej symetralnej leży również punkt P, gdyż punkt ten jest punktem przecięcia przekątnych MC i BL trapezu równoramiennego $MBCL$. Stąd, w szczególności, $\sphericalangle APO = 90^\circ$.

Sposób II

Niech M i N będą odpowiednio środkami boków AB i AC (rys. 3). Ponieważ $\sphericalangle ANO = \sphericalangle AMO = 90^\circ$, więc *okrąg opisany na trójkącie AMN przechodzi przez punkt O* (średnicą tego okręgu jest odcinek AO). Wykażemy, że punkt P leży na tym okręgu.



rys. 3



rys. 4

Na mocy równości (1), trójkąty ABP oraz CAP są podobne. Zatem

$$\frac{BM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AP}.$$

Ponadto $\sphericalangle MBP = \sphericalangle NAP$. Tożsamości te dowodzą, że trójkąty MBP oraz NAP są podobne (rys. 4). Stąd $\sphericalangle BMP = \sphericalangle ANP$, czyli

$$\sphericalangle AMP + \sphericalangle ANP = 180^\circ.$$

Powyższa równość oznacza, że *okrąg opisany na trójkącie AMN przechodzi przez punkt P*. Zatem punkty A, M, O, P, N leżą na jednym okręgu, skąd

$$\sphericalangle APO = \sphericalangle ANO = 90^\circ.$$

Sposób III

Niech prosta AP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Q (rys. 5). Wówczas zachodzą równości:

(2) $\qquad \sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAQ = \sphericalangle ACP, \qquad$ skąd $\qquad \sphericalangle PCQ = \sphericalangle ACB.$

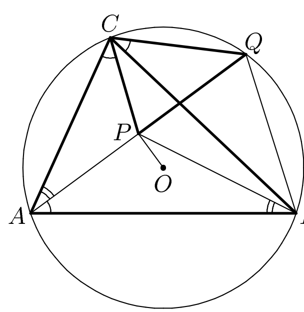
Mamy ponadto następujące zależności:

(3) $\qquad \sphericalangle PQC = \sphericalangle AQC = \sphericalangle ABC.$

Z drugiej równości (2) oraz z tożsamości (3) wynika, że trójkąty ABC i PQC są podobne. Podobne są również trójkąty APC oraz ABP. Stąd

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{PC}{CA} = \frac{PA}{AB},$$

czyli $PQ = PA$. Zatem punkt P jest środkiem cięciwy AQ, co oznacza, że $\sphericalangle APO = 90^\circ$.



rys. 5

Zadanie **5.** Niech $S=\{1,2,3,4,5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon S\to S$ spełniających równość $f^{50}(x)=x$ dla wszystkich $x\in S$.

Uwaga: $f^{50}(x)=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{50}(x)$.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech f będzie funkcją spełniającą warunki zadania. Dla liczb $x\neq y$ dostajemy $f^{49}(f(x))=x\neq y=f^{49}(f(y))$, skąd $f(x)\neq f(y)$. Ponieważ f jest również funkcją „na", więc f jest permutacją zbioru S. Oznaczmy przez $r(x)$ ($x\in S$) najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, dla której $f^{r(x)}(x)=x$. Wówczas $r(x)\leqslant 5$ oraz $r(x)|50$, skąd $r(x)\in\{1,2,5\}$.

Jeżeli istnieje taka liczba $a\in S$, że $r(a)=5$, to liczby a, $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, $f^4(a)$ są różne — wyczerpują więc zbiór S. Wtedy dla dowolnej liczby $x\in S$, $r(x)=5$. Funkcja f jest więc jednoznacznie wyznaczona przez permutację $(f(1),f^2(1),f^3(1),f^4(1))$ zbioru $\{2,3,4,5\}$; zatem może być ona określona na $4!=$ **24** sposoby.

Jeżeli dla wszystkich $x\in S$ zachodzi $r(x)=1$, to f jest funkcją identycznościową. Taka funkcja jest **jedna**.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym największa wartość osiągana przez funkcję r wynosi 2. Niech więc a będzie takim elementem zbioru S, że $r(a)=2$. Wtedy także $r(b)=2$, gdzie $b=f(a)$.

Jeżeli $r(x)=1$ dla wszystkich $x\in S\setminus\{a,b\}$, to f jest wyznaczona przez wybór dwuelementowego podzbioru $\{a,b\}$ zbioru S, co można uczynić na $\binom{5}{2}=$ **10** sposobów.

Jeżeli natomiast istnieje taka liczba $c\in S\setminus\{a,b\}$, że $r(c)=2$, to przyjmując $d=f(c)$ oraz oznaczając przez e jedyny element zbioru $S\setminus\{a,b,c,d\}$, mamy

(1) $$f(a)=b,\quad f(b)=a,\quad f(c)=d,\quad f(d)=c,\quad f(e)=e.$$

Taka funkcja f jest wyznaczona przez wybór liczby e (można to zrobić na 5 sposobów) oraz podział zbioru $S\setminus\{e\}$ na dwa podzbiory dwuelementowe $\{a,b\}$ i $\{c,d\}$ (istnieją 3 takie podziały). Dostajemy więc **15** funkcji postaci (1).

Łącznie istnieje **50** funkcji spełniających warunki zadania.

Sposób II

Zamiast liczyć permutacje zbioru pięcioelementowego spełniające warunek podany w zadaniu, można policzyć te permutacje, które go nie spełniają.

Rozumowanie analogiczne do tego w sposobie I dowodzi, że są to permutacje f następujących trzech postaci:

(2) $$f(a)=b,\quad f(b)=c,\quad f(c)=a,\quad f(d)=d,\quad f(e)=e,$$

(3) $$f(a)=b,\quad f(b)=c,\quad f(c)=a,\quad f(d)=e,\quad f(e)=d,$$

$$(4) \qquad f(a)=b, \quad f(b)=c, \quad f(c)=d, \quad f(d)=a, \quad f(e)=e,$$

gdzie $\{1,2,3,4,5\}=\{a,b,c,d,e\}$.

Liczby a, b, c ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ można wybrać na $\binom{5}{3}=10$ sposobów, zaś ustawić cyklicznie na 2 sposoby. Zatem istnieje **20** permutacji postaci (2) oraz **20** permutacji postaci (3).

Podobnie, liczby a, b, c, d ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ można wybrać na $\binom{5}{4}=5$ sposobów, zaś ustawić cyklicznie na 6 sposobów. Zatem istnieje **30** permutacji postaci (4).

Stąd wynika, że istnieje **70** permutacji nie spełniających warunków zadania, a więc z ogólnej liczby $\mathbf{5!=120}$ permutacji pozostaje **50** szukanych permutacji.

Zadanie **6.** Dana jest liczba naturalna $k\geqslant 2$ oraz liczby całkowite $a_1,a_2,\ldots,a_n$ spełniające warunki

$$a_1+2^ia_2+3^ia_3+\ldots+n^ia_n=0 \qquad \text{dla} \;\; i=1,2,\ldots,k-1.$$

Dowieść, że liczba $a_1+2^ka_2+3^ka_3+\ldots+n^ka_n$ jest podzielna przez $k!$.

Rozwiązanie

Dla dowolnej liczby całkowitej $m\geqslant k$ liczba $\binom{m}{k}$ jest całkowita. Stąd, dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m, liczba $m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)$ jest podzielna przez $k!$. Istnieją więc takie liczby całkowite $b_1,b_2,\ldots,b_{k-1}$, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m,

$$m^k\equiv b_1m+b_2m^2+\ldots+b_{k-1}m^{k-1} \pmod{k!}.$$

Mnożąc powyższą kongruencję przez a_m, a następnie dodając stronami od $m=1$ do $m=n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_1+2^ka_2+\ldots+n^ka_n \equiv b_1(a_1+2a_2+\ldots+na_n)+ \\ +b_2(a_1+2^2a_2+\ldots+n^2a_n)+\ldots \\ \ldots+b_{k-1}(a_1+2^{k-1}a_2+\ldots+n^{k-1}a_n)= \\ =0 \pmod{k!}. \end{aligned}$$

To oznacza, że liczba $a_1+2^ka_2+3^ka_3+\ldots+n^ka_n$ jest podzielna przez $k!$, co kończy rozwiązanie zadania. æ

Zawody stopnia trzeciego

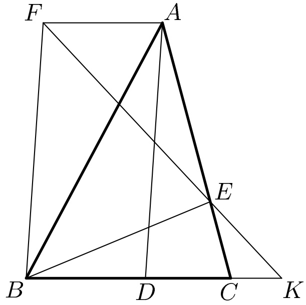
Zadanie **1.** Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, przy czym $AD>BC$. Punkt E leży na boku AC i spełnia warunek

$$(1) \qquad \frac{AE}{EC}=\frac{BD}{AD-BC}.$$

Udowodnić, że $AD>BE$.

Rozwiązanie

Sposób I



rys. 1

Uzupełniamy trójkąt BDA do równoległoboku $BDAF$ (rys. 1). Na półprostej $BC^{\rightarrow}$ odkładamy odcinek BK o długości AD. Dana w zadaniu zależność przyjmuje teraz postać

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{CK}.$$

Z tej równości oraz z równoległości odcinków CK i AF wynika, że punkty F, E, K są współliniowe.

Punkt E leży więc na podstawie KF trójkąta równoramiennego BKF. Stąd dostajemy $BF > BE$, czyli $AD > BE$.

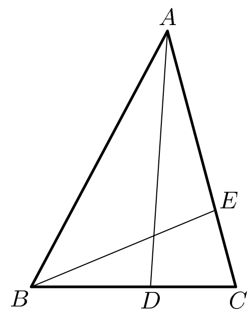
Sposób II

Skorzystamy z nierówności Ptolemeusza, która mówi, że *dla dowolnych punktów A, B, C, D leżących na płaszczyźnie zachodzi*

$$AC \cdot BD \leqslant CD \cdot AB + AD \cdot BC,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na jednym okręgu.

(Dowód znajduje się w broszurze *XLVI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 1996, str. 96).



rys. 2

Stosując zacytowaną nierówność do punktów A, B, C, E otrzymujemy $AC \cdot BE < AE \cdot BC + EC \cdot AB$, czyli

$$BE < \frac{AE}{AC} \cdot BC + \frac{EC}{AC} \cdot AB. \tag{2}$$

Korzystając ze związku (1) otrzymujemy następujące równości:

$$\frac{AC}{AE} = 1 + \frac{EC}{AE} = 1 + \frac{AD - BC}{BD},$$

skąd dostajemy

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BD}{AD - BC + BD} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{EC}{AC} = 1 - \frac{AE}{AC} = \frac{AD - BC}{AD - BC + BD}.$$

Na mocy nierówności (2) oraz powyższych zależności mamy

$$BE < \frac{BC \cdot BD}{AD - BC + BD} + \frac{(AD - BC) \cdot AB}{AD - BC + BD} <$$

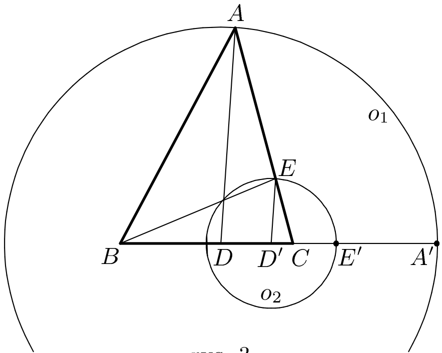
$$< \frac{BC \cdot BD}{AD - BC + BD} + \frac{(AD - BC) \cdot BD}{AD - BC + BD} + \frac{(AD - BC) \cdot AD}{AD - BC + BD} =$$

$$= \frac{AD \cdot BD}{AD - BC + BD} + \frac{(AD - BC) \cdot AD}{AD - BC + BD} = \frac{(BD + AD - BC) \cdot AD}{AD - BC + BD} = AD.$$

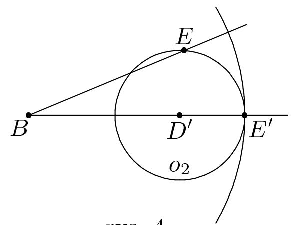
Sposób III

Niech o_1 będzie okręgiem o środku D i promieniu AD (rys. 3). Ponieważ $AD > BC$, więc okrąg ten przecina półprostą $BC^{\rightarrow}$ tylko w jednym punkcie; nazwijmy go A'. Z nierówności $AD > BC$ wynika również, że punkty B, C, A' leżą w tej właśnie kolejności na prostej BC.

Oznaczmy przez o_2 okrąg będący obrazem okręgu o_1 przy jednokładności j o środku C i skali $\lambda = EC : AC$. Wówczas $E = j(A)$. Ponadto punkt $E' = j(A')$ leży pomiędzy punktami C i A', jak również środek D' okręgu o_2 leży pomiędzy punktami D i C. Zatem punkt D' leży pomiędzy punktami B i E'. To natomiast oznacza, że okrąg o środku B i promieniu BE' jest styczny *wewnętrznie* do okręgu o_2 (rys. 4). Wniosek: $BE < BE'$.



rys. 3



rys. 4

Z powyższych rozważań wnioskujemy, że punkty B, D, C, E', A' leżą na prostej BC w tej właśnie kolejności.

Na mocy równości (1) skala jednokładności j jest równa

$$\lambda = \frac{EC}{AC} = \frac{AD - BC}{AD - BC + BD} = \frac{A'D - BC}{A'D - BC + BD} = \frac{A'C - BD}{A'C}.$$

Stąd dostajemy

$$BE < BE' = BC + CE' = BC + \lambda \cdot A'C = BC + A'C - BD = A'D = AD.$$

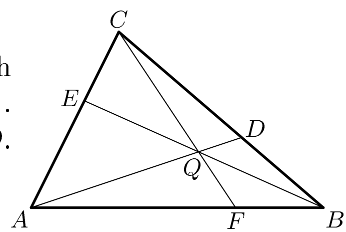
Sposób IV

Wykorzystamy następujące

Twierdzenie (*Van Aubela*):

Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB dowolnego trójkąta ABC (rys. 5). Odcinki AD, BE, CF przecinają się w punkcie Q. Wówczas

$$\frac{CQ}{QF} = \frac{CE}{EA} + \frac{CD}{DB}. \tag{3}$$



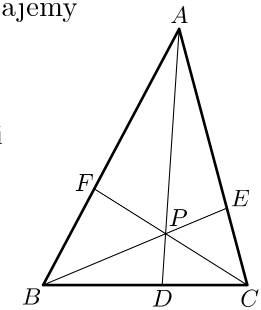
rys. 5

(Dowód tego twierdzenia można znaleźć w książce: S. I. Zetel, *Geometria trójkąta*, Warszawa 1964, rozdział I. 15, str. 22).

Oznaczmy przez P punkt przecięcia odcinków AD i BE (rys. 6). Niech prosta CP przecina bok AB w punkcie F. Na mocy twierdzenia Van Aubela oraz równości (1) otrzymujemy

$$\frac{CP}{PF}=\frac{CE}{EA}+\frac{CD}{DB}=\frac{AD-BC}{DB}+\frac{CD}{DB}=\frac{AD-BD}{DB}.$$

Dodając do obu stron powyższej równości liczbę 1 dostajemy



rys. 6

$$\frac{CF}{PF}=\frac{AD}{DB}. \tag{4}$$

Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ. Z równości

$$\frac{[BCP]}{[ABC]}+\frac{[CAP]}{[ABC]}+\frac{[ABP]}{[ABC]}=1$$

otrzymujemy związek

$$\frac{PD}{AD}+\frac{PF}{CF}=1-\frac{PE}{BE}.$$

Na mocy równości (4) powyższa równość przybiera postać

$$\frac{PD}{AD}+\frac{BD}{AD}=\frac{BE-PE}{BE}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{PD+BD}{AD}=\frac{BP}{BE}.$$

Z nierówności trójkąta PDB dostajemy ostatecznie

$$\frac{BP}{AD}<\frac{PD+BD}{AD}=\frac{BP}{BE},$$

skąd $AD>BE$.

Uwaga

Po zawodach wielu uczestników skarżyło się, że dana w treści zadania zależność (1) jest „sztuczna" i dlatego zadanie to sprawiło im sporo trudności (por. tabela w części sprawozdawczej). Nasuwa się więc pytanie: Czy można warunek (1) zastąpić innym, równoważnym, a przy tym „bardziej naturalnym"? Odpowiedź daje następujący

Fakt

Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, przy czym $AD>BC$. Punkt E leży na boku AC. Odcinki AD, BE przecinają się w punkcie P. Wówczas

$$\frac{AE}{EC}=\frac{BD}{AD-BC} \quad \Leftrightarrow \quad AP=BC.$$

Dowód faktu

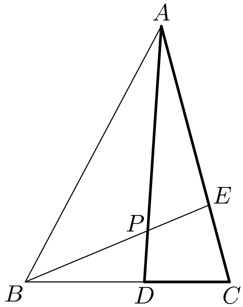
Na mocy twierdzenia Menelausa (zob. str. 122) zastosowanego do trójkąta ADC (rys. 7) otrzymujemy

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{DP}{AP}=1.$$

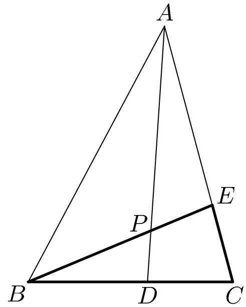
Zatem

$$\frac{AE}{EC}=\frac{BD}{AD-BC} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{BD}{AD-BC}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{DP}{AP}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{DP}{AP}=\frac{AD-BC}{BC}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{DP}{AP}+1=\frac{AD}{BC} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{AD}{AP}=\frac{AD}{BC} \quad\Leftrightarrow\quad AP=BC.$$



rys. 7



rys. 8

Sposób V

Korzystając z wyżej udowodnionego faktu, równość (1) możemy przepisać w postaci

(5) $$\frac{EC}{AE}=\frac{PD}{BD}.$$

Stosując twierdzenie Menelausa do trójkąta EBC (rys. 8) otrzymujemy

$$\frac{EP}{PB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CA}{AE}=1, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{EP}{PB}\cdot\frac{BD}{DC}+\frac{EP}{PB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{EC}{AE}=1.$$

Na mocy równości (5) ostatnia zależność przybiera postać

$$\frac{EP}{PB}\cdot\frac{BD}{DC}+\frac{EP}{PB}\cdot\frac{PD}{DC}=1,$$

skąd

$$\frac{EP}{DC}=\frac{PB}{BD+PD}<1.$$

Zatem $EP<DC$ oraz $PB<BD+PD$. Dodając stronami dwie ostatnie nierówności otrzymujemy $BE<BC+PD=AD$.

Zadanie **2.** Dane są liczby całkowite nieujemne $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{101}$ mniejsze od 5050. Dowieść, że spośród nich można wybrać takie cztery różne a_k, a_l, a_m, a_n, że liczba $a_k+a_l-a_m-a_n$ jest podzielna przez 5050.

Rozwiązanie

Rozważamy wszystkie wyrażenia postaci a_k+a_l, gdzie $1\leqslant k<l\leqslant 101$. Takich wyrażeń jest $\binom{101}{2}=5050$. Jeżeli znajdziemy wśród nich dwa, powiedzmy a_k+a_l i a_m+a_n, których wartości dają tę samą resztę z dzielenia przez 5050, to liczby a_k, a_l, a_m, a_n spełniają warunki zadania — liczby te są bowiem parami różne (jeśli np. $a_k=a_m$, to także $a_l=a_n$, gdyż $0\leqslant a_l,a_n<5050$).

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, w którym wszystkie powyższe sumy dają różne reszty z dzielenia przez 5050. Wykażemy, że ten przypadek zachodzić nie może. Gdyby bowiem tak było, to rozważane sumy dawałyby wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 5050 — każdą jeden raz. Stąd

$$S = \sum_{1\leqslant k<l\leqslant 101} (a_k + a_l) \equiv \sum_{i=0}^{5049} i = \frac{5049\cdot 5050}{2} \equiv 2525 \pmod{5050},$$

co dowodzi, że S jest liczbą nieparzystą.

Z drugiej strony

$$S = \sum_{1\leqslant k<l\leqslant 101} (a_k + a_l) = 100\cdot \sum_{k=1}^{101} a_k \ ,$$

co oznacza, że S jest liczba parzystą. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie **3.** Dowieść, że istnieją takie liczby naturalne $n_1 < n_2 < \ldots < n_{50}$, że

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = n_3 + S(n_3) = \ldots = n_{50} + S(n_{50}),$$

gdzie $S(n)$ jest sumą cyfr liczby n.

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$a_1(k) \;=\; 10^{10^k+k+1} - 9\cdot 10^k = \underbrace{9999...99}_{10^k}1\underbrace{0000...00}_{k},$$
$$a_2(k) \;=\; 10^{10^k+k+1} = 1\underbrace{0000...00}_{10^k+k+1}.$$

Wówczas $a_1(k)+S(a_1(k)) = a_2(k)+S(a_2(k)) = 10^{10^k+k+1}+1$. Określmy liczby $k_0, k_1, k_2, \ldots$ wzorami:

$$k_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad k_{i+1} = 10^{k_i} + k_i + 2 \quad \text{dla} \quad i \geqslant 0\ .$$

Dla dowolnego ciągu $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5)$, gdzie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5 \in \{1,2\}$, przyjmijmy

$$n_\varepsilon = \sum_{i=0}^{5} a_{\varepsilon_i}(k_i)\ .$$

Otrzymane w ten sposób 64 liczby n_ε są parami różne. Wykażemy, że dla wszystkich 64 ciągów ε wielkości $n_\varepsilon + S(n_\varepsilon)$ są jednakowe.

Ponieważ dla $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ liczba $a_{\varepsilon_i}(k_i)$ jest co najwyżej k_{i+1}-cyfrowa i ma co najmniej k_i zer końcowych, więc żadne dwie z liczb $a_{\varepsilon_i}(k_i)$ i $a_{\varepsilon_j}(k_j)$ (dla $i \neq j$) nie mają niezerowych cyfr na tym samym miejscu dziesiętnym. Stąd

$$S(n_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{5} S(a_{\varepsilon_i}(k_i))\ .$$

Zatem

$$n_\varepsilon + S(n_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{5} (a_{\varepsilon_i}(k_i) + S(a_{\varepsilon_i}(k_i))) = 6 + \sum_{i=0}^{5} 10^{10^{k_i}+k_i+1},$$

co jest wielkością niezależną od ε.

Zadanie **4.** Rozstrzygnąć, dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 2$ układ równań

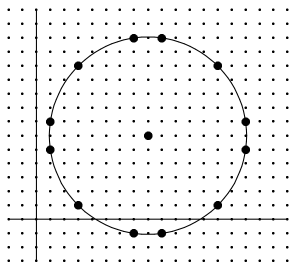
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2 \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3 \\ x_3^2 + x_4^2 + 50 = 16x_3 + 12x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Rozwiązanie

Równanie $x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2$ jest równoważne równaniu

$$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2 = 50.$$



Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają dany w treści zadania układ równań wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $(x_1,x_2), (x_2,x_3), \dots, (x_n,x_1)$ leżą na okręgu o środku $(8,6)$ i promieniu $\sqrt{50}$. Na tym okręgu leży 12 punktów o współrzędnych całkowitych (zob. rysunek obok): $(1,5)$, $(1,7)$, $(3,1)$, $(3,11)$, $(7,-1)$, $(7,13)$, $(9,-1)$, $(9,13)$, $(13,1)$, $(13,11)$, $(15,5)$, $(15,7)$.

Ponieważ każda z liczb x_i występuje raz jako odcięta, a raz jako rzędna punktu kratowego leżącego na tym okręgu, więc liczby x_i mogą przyjmować tylko wartości 1, 7 lub 13. To pozostawia nam trzy możliwe układy dla par (x_i, x_{i+1}), a mianowicie: $(1,7)$, $(7,13)$ lub $(13,1)$. Stąd wniosek, że w układzie liczb $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będącym rozwiązaniem wyjściowego układu równań, występują cyklicznie liczby 1, 7, 13. Taka sytuacja jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 3.

Zadanie **5.** Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnić, że

$$(1) \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_i - b_j| \,.$$

Rozwiązanie

Sumy występujące po obu stronach danej w zadaniu nierówności nie zmienią się, jeśli w dowolny sposób zmienimy kolejność liczb a_i oraz liczb b_i. Bez szkody dla ogólności możemy więc założyć, że $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ oraz

$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Wówczas

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i + b_j - b_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_j - b_i| + |b_j - a_i|) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_j - b_i| + |a_i - b_j|) + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i - b_i| =$$

$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_i - b_j| \ .$$

Uwaga 1.

Założenie, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są całkowite, nie było w rozwiązaniu wykorzystywane. Nierówność (1) jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych.

Uwaga 2.

Uważne prześledzenie podanego wyżej rozwiązania prowadzi do wniosku, że równość w nierówności (1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ po uporządkowaniu w sposób rosnący są identyczne.

Zadanie **6.** W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości:

(1) $$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ \ , \qquad \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1 \ .$$

Dowieść, że $\dfrac{AB}{BF} \cdot \dfrac{FD}{DE} \cdot \dfrac{EC}{CA} = 1$.

Rozwiązanie

Sposób I

Na mocy założenia $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$, istnieje taki punkt P, że zachodzą następujące równości kątów (rys. 1):

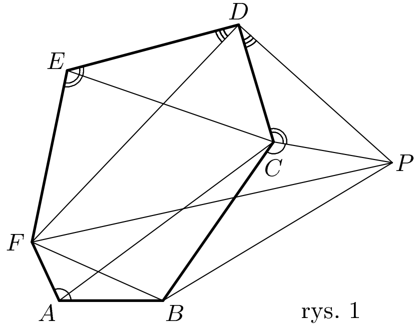
(2) $$\sphericalangle BCP = \sphericalangle BAF, \quad \sphericalangle PCD = \sphericalangle FED, \quad \sphericalangle CDP = \sphericalangle EDF.$$

Trójkąty DEF i DCP są więc podobne, skąd dostajemy

(3) $$\sphericalangle EDC = \sphericalangle FDP \quad \text{oraz} \quad \frac{ED}{DC} = \frac{FD}{DP}.$$

Korzystając z danej w treści zadania równości oraz z podobieństwa trójkątów EDF i CDP otrzymujemy

$$\frac{FA}{AB} = \frac{EF}{DE} \cdot \frac{CD}{BC} = \frac{CP}{CD} \cdot \frac{CD}{BC} = \frac{CP}{BC},$$



rys. 1

co na mocy pierwszej spośród równości (2) dowodzi, że trójkąty BAF i BCP są podobne. Zatem

$$(4) \qquad \sphericalangle CBA = \sphericalangle PBF \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{FB}{BP}.$$

Równości (3) oznaczają, że trójkąty EDC i FDP są podobne; z równości (4) wynika natomiast, że podobne są trójkąty CBA i PBF. Otrzymujemy więc odpowiednio następujące proporcje:

$$\frac{EC}{DE} = \frac{FP}{FD} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AB}{CA} = \frac{BF}{FP}.$$

Mnożąc stronami powyższe dwie równości dostajemy tezę.

Sposób II

Użyjemy algebry liczb zespolonych.

Niech liczby a, b, c, d, e, f reprezentują na płaszczyźnie zespolonej odpowiednio punkty A, B, C, D, E, F. Oznaczmy przez $\operatorname{Arg} z$ argument liczby zespolonej z będący liczbą z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$. Wówczas

$$\operatorname{Arg}\frac{f-a}{b-a} = \sphericalangle A, \qquad \operatorname{Arg}\frac{b-c}{d-c} = \sphericalangle C, \qquad \operatorname{Arg}\frac{d-e}{f-e} = \sphericalangle E.$$

Ponieważ $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 2\pi$, więc

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{f-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{d-c}\cdot\frac{d-e}{f-e}\right) = 2\pi.$$

Liczba $\dfrac{f-a}{b-a}\cdot\dfrac{b-c}{d-c}\cdot\dfrac{d-e}{f-e}$ jest więc dodatnią liczbą rzeczywistą. Ponadto

$$\left|\frac{f-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{d-c}\cdot\frac{d-e}{f-e}\right| = \frac{FA}{AB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DE}{EF} = 1.$$

Zatem warunek (1) implikuje równość

$$(5) \qquad \frac{f-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{d-c}\cdot\frac{d-e}{f-e} = 1.$$

Stąd $(f-a)(b-c)(d-e) = (b-a)(d-c)(f-e)$. Wymnażając nawiasy otrzymujemy

$$\begin{aligned}-abd + acd + abe - ace + bdf - cdf - bef + cef = \\ = -ace + bce + ade - bde + acf - bcf - adf + bdf,\end{aligned}$$

czyli po uporządkowaniu i redukcji wyrazów podobnych

$$(6) \qquad acd + abe + cef + bde + bcf + adf = bce + ade + acf + abd + cdf + bef.$$

Z drugiej strony, przekształcając analogicznie równość

$$(7) \qquad \frac{a-b}{f-b}\cdot\frac{f-d}{e-d}\cdot\frac{e-c}{a-c} = 1,$$

otrzymujemy $(a-b)(f-d)(e-c)=(f-b)(e-d)(a-c)$, skąd

$$acd-bcd-ade+bde-acf+bcf+aef-bef=$$
$$=abd-bcd-abe+bce-adf+cdf+aef-cef.$$

Porządkując i redukując dostajemy

(8) $$acd+bde+bcf+abe+adf+cef=abd+bce+cdf+ade+acf+bef.$$

Równość (8) niczym nie różni się od równości (6), co oznacza, że zależność (7) jest równoważna równości (5).

Porównując wartości bezwzględne liczb stojących po obu stronach związku (7) dostajemy

$$\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FD}{DE}\cdot\frac{EC}{CA}=\left|\frac{a-b}{f-b}\cdot\frac{f-d}{e-d}\cdot\frac{e-c}{a-c}\right|=1,$$

co kończy dowód.

Uwaga 1.

Rachunki w sposobie II można nieco uprościć przyjmując (bez straty ogólności), że $a=0$ oraz $b=1$.

Uwaga 2.

W obu powyższych rozwiązaniach ukryty jest dowód następującej równości: $\sphericalangle ACE=\sphericalangle ABF+\sphericalangle FDE$. Odnalezienie go pozostawiamy Czytelnikowi jako ciekawe uzupełnienie zadania.

Uwaga 3.

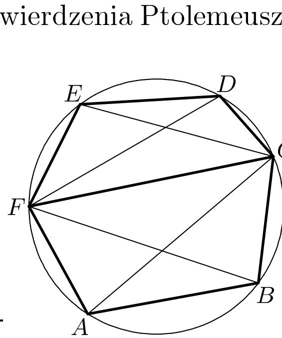
Prawdziwy jest następujący, nietrudny do samodzielnego udowodnienia fakt: *jeśli na sześciokącie $ABCDEF$ można opisać okrąg, to*

$$\sphericalangle A+\sphericalangle C+\sphericalangle E=360^\circ.$$

Zastąpmy więc w treści zadania wyrażenie „$\sphericalangle A+\sphericalangle C+\sphericalangle E=360^\circ$” zdaniem: „na sześciokącie $ABCDEF$ można opisać okrąg” (pozostawiając resztę bez zmian). W ten sposób otrzymamy treść innego, jak się okazuje, prostszego zadania, które można łatwo rozwiązać przy pomocy twierdzenia Ptolemeusza. Oto rozwiązanie:

Chcemy dowieść, że

(9) $$AB\cdot FD\cdot EC=DE\cdot BF\cdot CA.$$



rys. 2

Na mocy twierdzenia Ptolemeusza (rys. 2) mamy

$$FD\cdot EC=DE\cdot FC+EF\cdot CD,$$
$$BF\cdot CA=AB\cdot FC+FA\cdot BC.$$

Wstawiając powyższe związki do równości (9), sprowadzamy ją do postaci:

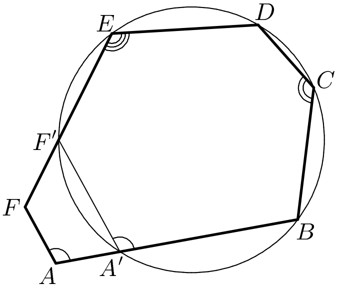
$$AB\cdot DE\cdot FC+AB\cdot EF\cdot CD=DE\cdot AB\cdot FC+DE\cdot FA\cdot BC,$$

czyli $AB\cdot CD\cdot EF = BC\cdot DE\cdot FA$. Otrzymaliśmy drugą spośród równości (1), a więc tym samym dowiedliśmy równości (9).

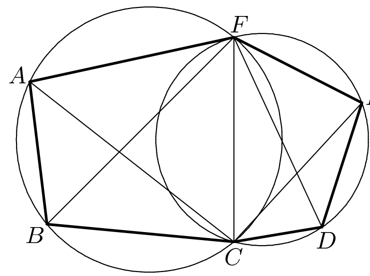
* * *

Kilku uczestników przedstawiło powyższe rozumowanie w swoich pracach, po czym próbowali oni dowieść, że jedynymi sześciokątami $ABCDEF$ spełniającymi równość $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$ są sześciokąty wpisane w okrąg. To w połączeniu z prostym zastosowaniem twierdzenia Ptolemeusza dałoby im rozwiązanie zadania.

Jednak okazuje się, że z warunku $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$ *nie wynika*, że na sześciokącie $ABCDEF$ można opisać okrąg (a więc twierdzenie odwrotne do zacytowanego na początku *Uwagi* 3 nie jest prawdziwe). Przykład znajduje się na rysunku 3. Punkty A', B, C, D, E, F' leżą na jednym okręgu (skąd $\sphericalangle A' + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$) oraz $AF \parallel A'F'$. Zatem $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$, lecz na sześciokącie $ABCDEF$ nie da się opisać okręgu.



rys. 3



rys. 4

Inny przykład jest przedstawiony na rysunku 4. Sześciokąt $ABCDEF$ ma tę własność, że na czworokątach $ABCF$ i $FCDE$ można opisać okręgi i są one różne. Wtedy $\sphericalangle BAF + \sphericalangle BCF = 180^\circ$ oraz $\sphericalangle FED + \sphericalangle FCD = 180^\circ$. Dodając stronami otrzymane równości dostajemy $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$. Jednak, jak widać, nie istnieje okrąg opisany na sześciokącie $ABCDEF$.

Powyższe krótkie rozumowanie korzystające z twierdzenia Ptolemeusza stosuje się również dla takich sześciokątów jak na rysunku 4, czyli przy założeniu, że na czworokątach $ABCF$, $FCDE$ można opisać okręgi. Nasuwa się więc następujące pytanie: Czy z warunku $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$ wynika, że na czworokątach $ABCF$, $FCDE$ da się opisać okręgi? Odpowiedź jest negatywna, co można zrozumieć spoglądając na rysunek 4. Na tym rysunku $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$, więc również $\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F = 360^\circ$, lecz na czworokątach $BCDA$, $ADEF$ nie da się opisać okręgów. æ

XXXIX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Zadanie **1.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są prostopadłe, a przeciwległe boki AB i DC nie są równoległe. Zakładamy, że symetralne boków AB i DC przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta $ABCD$. Udowodnić, że czworokąt $ABCD$ da się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABP i CDP mają równe pola.

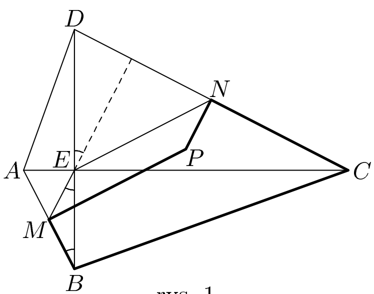
Rozwiązanie

Oznaczmy przez M, N odpowiednio środki boków AB i CD (rys. 1). Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Ponieważ proste AB i CD nie są równoległe, więc kąty BEM oraz DEN nie są równe. Stąd wynika, że punkty M, E, N nie są współliniowe. Bez straty ogólności przyjmijmy, że

$$\sphericalangle BEM + \sphericalangle CEN < 90^\circ. \tag{1}$$

Ponieważ punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, więc łamana $BCNPM$ tworzy pięciokąt. Wykażemy, że jest to pięciokąt wklęsły. Istotnie: na mocy nierówności (1) miara kąta przy wierzchołku P tego pięciokąta wynosi

$$\begin{aligned}\sphericalangle P &= 540^\circ - 2\cdot 90^\circ - \sphericalangle MBE - \sphericalangle EBC - \sphericalangle NCE - \sphericalangle ECB = \\ &= 270^\circ - \sphericalangle BEM - \sphericalangle CEN > 180^\circ.\end{aligned}$$



rys. 1

Zatem punkt P leży wewnątrz czworokąta $BCNM$. Ponadto

$$\sphericalangle MPN = 360^\circ - \sphericalangle P = 90^\circ + \sphericalangle BEM + \sphericalangle CEN = \sphericalangle MEN. \tag{2}$$

Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ. Na mocy równości (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}[ABP]=[CDP] \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{NP}{MP}=\frac{AB}{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{NP}{MP}=\frac{ME}{NE}\\ &\Leftrightarrow \quad \text{trójkąty } MPN \text{ i } NEM \text{ są podobne}\\ &\Leftrightarrow \quad ME=NP \text{ oraz } NE=MP\\ &\Leftrightarrow \quad \text{czworokąt } MPNE \text{ jest równoległobokiem}\\ &\Leftrightarrow \quad ME\perp CD \text{ oraz } NE\perp AB\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sphericalangle MBE = \sphericalangle NCE \text{ oraz } \sphericalangle NDE = \sphericalangle MAE$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{na czworokącie } ABCD \text{ można opisać okrąg.}$$

Zadanie **2.** W konkursie bierze udział a uczestników, ocenianych przez b egzaminatorów, gdzie $b \geqslant 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Każdy egzaminator ocenia każdego uczestnika, wydając werdykt „zdał” lub „nie zdał”. Załóżmy, że k jest liczbą o własności: oceny każdych dwóch egzaminatorów są zgodne dla co najwyżej k uczestników. Dowieść, że
$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x_i liczbę egzaminatorów, według których uczestnik o numerze i (gdzie $i=1,2,\ldots,a$) zdał. Niech y_i będzie liczbą tych egzaminatorów, którzy uznali, że i-ty uczestnik nie zdał. Liczba par tych egzaminatorów, których oceny zgadzają się względem i-tego uczestnika, wynosi
$$\begin{aligned}\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2} &= \tfrac{1}{2}(x_i^2+y_i^2-(x_i+y_i)) = \\ &= \tfrac{1}{4}(x_i+y_i)^2+\tfrac{1}{4}(x_i-y_i)^2-\tfrac{1}{2}(x_i+y_i) = \\ &= \tfrac{1}{4}b^2-\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{4}(x_i-y_i)^2 = \tfrac{1}{4}((b-1)^2+(x_i-y_i)^2-1)\,.\end{aligned}$$
Ponieważ b jest liczbą nieparzystą, więc $(x_i-y_i)^2 \geqslant 1$, skąd
$$\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2} = \tfrac{1}{4}((b-1)^2+(x_i-y_i)^2-1) \geqslant \tfrac{1}{4}(b-1)^2. \tag{1}$$
Łączna liczba par ocen zgodnych w konkursie wynosi
$$\sum_{i=1}^{a}\left(\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\right).$$
Z drugiej strony wielkość ta, na mocy własności liczby k, nie przekracza
$$k\cdot\binom{b}{2}.$$
Korzystając z nierówności (1), otrzymujemy więc
$$k\cdot\binom{b}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{a}\left(\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\right) \geqslant \frac{a(b-1)^2}{4}.$$
Przekształcając równoważnie powyższą nierówność uzyskujemy
$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

Zadanie **3.** Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oznaczmy przez $d(n)$ liczbę jej dodatnich dzielników (włącznie z 1 oraz n). Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite k takie, że

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

dla pewnego n.

Rozwiązanie

Niech $n = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_j^{x_j}$ będzie rozkładem liczby n na czynniki pierwsze. Wówczas

$$d(n) = (x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_j+1).$$

Zatem dla dowolnych liczb względnie pierwszych a, b mamy $d(ab) = d(a)d(b)$.

Liczba $d(n^2) = (2x_1+1)(2x_2+1)\ldots(2x_j+1)$ jest nieparzysta, więc całkowite wartości wyrażenia $d(n^2)/d(n)$ mogą być jedynie liczbami nieparzystymi.

Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby nieparzystej k istnieje taka liczba naturalna n, że

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k. \tag{1}$$

Dla $k = 1$ wystarczy przyjąć $n = 1$.

Niech $k = 2^r l - 1$, gdzie $r \geqslant 1$ jest liczbą naturalną, zaś l liczbą nieparzystą. Ponieważ $l < k$, więc na mocy założenia indukcyjnego istnieje taka liczba naturalna m, że

$$\frac{d(m^2)}{d(m)} = l.$$

Liczby naturalnej n, spełniającej równość (1), szukamy w postaci

$$n = m \cdot q_0^{x_0} q_1^{x_1} \ldots q_{s-1}^{x_{s-1}}, \tag{2}$$

gdzie $q_0, q_1, \ldots, q_{s-1}$ są dowolnymi liczbami pierwszymi, nie będącymi dzielnikami liczby m, zaś s oraz $x_0, x_1, \ldots, x_{s-1}$ liczbami całkowitymi dodatnimi, które niżej odpowiednio dobierzemy.

Na mocy równości (2) otrzymujemy zależność

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{d(m^2)}{d(m)} \cdot \frac{2x_0+1}{x_0+1} \cdot \frac{2x_1+1}{x_1+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2x_{s-1}+1}{x_{s-1}+1}. \tag{3}$$

Aby uprościć ułamki stojące po prawej stronie powyższego wyrażenia, przyjmijmy $x_j = 2^j x_0$ dla $j = 1, 2, \ldots, s-1$. Wtedy równość (3) przybiera postać

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = l \cdot \frac{2^s x_0 + 1}{x_0 + 1}.$$

Pozostało tak wybrać liczby całkowite dodatnie s oraz x_0, aby

$$l \cdot \frac{2^s x_0 + 1}{x_0 + 1} = 2^r l - 1,$$

czyli $2^s x_0 l + l = 2^r x_0 l - x_0 + 2^r l - 1$. W tym celu wystarczy wziąć $s = r$ oraz $x_0 = (2^r - 1)l - 1$.

Dowód indukcyjny został więc zakończony.

Zadanie **4.** Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich takie, że liczba a^2b+a+b jest podzielna przez ab^2+b+7.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że liczba

$$b(a^2b+a+b) - a(ab^2+b+7) = b^2 - 7a$$

jest podzielna przez ab^2+b+7. Liczby a, b są całkowite dodatnie, więc

$$ab^2+b+7 > b^2+7 > b^2-7a.$$

Zatem podzielność $ab^2+b+7 \mid b^2-7a$ jest możliwa jedynie wtedy, gdy liczba b^2-7a jest niedodatnia.

Wszystkie pary (a,b) spełniające równanie $b^2-7a=0$ są dane wzorami

$$(a,b) = (7k^2, 7k) \qquad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots\,.$$

Bez trudu sprawdzamy, że powyższe pary spełniają warunki zadania, bowiem

$$ab^2+b+7 = 7(49k^4+k+1), \qquad a^2b+a+b = 7k(49k^4+k+1).$$

Pozostało rozważyć przypadek, gdy $b^2-7a<0$. Wówczas

(1) liczba dodatnia $7a-b^2$ jest podzielna przez ab^2+b+7.

Jeśli $b \geqslant 3$, to $ab^2+b+7 > 9a > 7a-b^2$, co dowodzi, że w tym przypadku podzielność $ab^2+b+7 \mid 7a-b^2$ nie może być spełniona. Zatem $b=1$ lub $b=2$.

(a) Przyjmijmy najpierw, że $b=1$. Wtedy warunek (1) sprowadza się do podzielności $a+8 \mid 7a-1$. Ponieważ

$$7a-1 = 7(a+8) - 57,$$

więc $a+8 \mid 57$. Zatem $a+8$ musi być jedną z liczb: 1, 3, 19, 57. Stąd na mocy dodatniości liczby a wynika, że $a=11$ lub $a=49$.

Bez trudu sprawdzamy, że pary $(a,b)=(11,1)$ oraz $(a,b)=(49,1)$ spełniają warunki zadania. Istotnie: jeśli $(a,b)=(11,1)$, to

$$ab^2+b+7 = 19, \qquad a^2b+a+b = 133 \ (= 19\cdot 7).$$

Gdy natomiast $(a,b)=(49,1)$, to otrzymujemy

$$ab^2+b+7 = 57, \qquad a^2b+a+b = 2451 \ (= 57\cdot 43).$$

(b) Niech z kolei $b=2$. Wówczas na mocy warunku (1) liczba $7a-4$ jest podzielna przez $4a+9$. Ponieważ

$$4(7a-4) = 7(4a+9) - 79,$$

więc $4a+9 \mid 79$. Jedynymi dzielnikami liczby 79 są 1 oraz 79. Żadna z tych liczb nie jest postaci $4a+9$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Reasumując: wszystkie pary (a,b) spełniające warunki zadania są dane wzorami:

$$(a,b)=(7k^2,7k) \quad \text{dla} \quad k=1,2,3,\dots\,, \qquad (a,b)=(11,1), \quad (a,b)=(49,1).$$

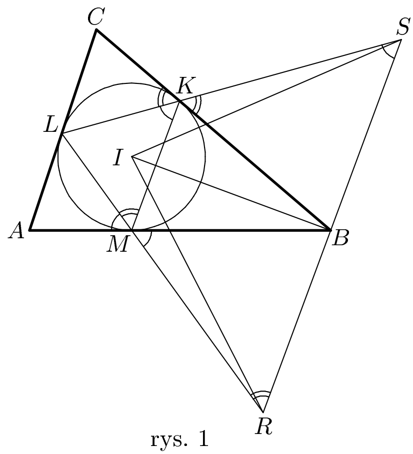
Zadanie **5.** Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg ten jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach K, L i M. Prosta przechodząca przez B i równoległa do MK przecina proste LM i LK odpowiednio w punktach R i S. Wykazać, że kąt RIS jest ostry.

Rozwiązanie

Zachodzą następujące równości kątów (rys. 1):

$$\sphericalangle RMB=\sphericalangle LKM=\sphericalangle KSB \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle MRB=\sphericalangle LMK=\sphericalangle SKB.$$

Z powyższych równości wynika, że trójkąty RMB oraz KSB są podobne.



rys. 1

Otrzymujemy więc równości

$$BR\cdot BS=BK\cdot BM=BK^2. \tag{1}$$

Prosta IB jest prostopadła do prostej KM, więc $IB\perp RS$. Korzystając z równości (1) mamy

$$\begin{aligned}RI^2+SI^2-RS^2&=(BI^2+BR^2)+(BI^2+BS^2)-(BR+BS)^2=\\&=2(BI^2-BR\cdot BS)=2(BI^2-BK^2)=2IK^2>0.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność dowodzi, że kąt RIS jest ostry.

Zadanie **6.** Rozważamy wszystkie funkcje f ze zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb całkowitych dodatnich do tego samego zbioru, spełniające warunek

$$f(t^2f(s))=s(f(t))^2 \tag{1}$$

dla wszystkich liczb $s,t\in\mathbb{N}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość $f(1998)$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: 120.

Udowodnimy najpierw, że związek (1) jest równoważny następującemu warunkowi:

(2) $f(f(s))=s(f(1))^2$ oraz $f(1)f(st)=f(s)f(t)$ dla wszystkich $s,t\in\mathbb{N}$.

Oznaczmy: $f(1)=a$.

Załóżmy, że równość (1) jest spełniona. Podstawiając do równości (1) najpierw $s=1$, a potem $t=1$ otrzymujemy odpowiednio

(3) $$f(at^2)=(f(t))^2 \qquad \text{oraz} \qquad f(f(s))=a^2s.$$

Stąd oraz z równania (1) mamy

$$\begin{aligned}(f(s)f(t))^2=(f(s))^2\cdot f(at^2)=f(s^2f(f(at^2)))=\\ =f(s^2a^2at^2)=f(a(ast)^2)=(f(ast))^2,\end{aligned}$$

czyli $f(ast)=f(s)f(t)$. W szczególności $f(as)=af(s)$. Wstawiając do ostatniej równości st w miejsce s oraz korzystając z przedostatniej zależności uzyskujemy

(4) $$af(st)=f(s)f(t) \qquad \text{dla wszystkich} \quad s,t\in\mathbb{N}.$$

Równość (4) oraz druga z równości (3) dają (2).

Załóżmy, że warunek (2) jest spełniony. Wtedy

$$a^2f(t^2f(s))=af(t^2)f(f(s))=(f(t))^2a^2s,$$

skąd dostajemy zależność (1).

Wykażemy teraz, że poszukiwania najmniejszej wartości $f(1998)$ możemy ograniczyć do tych funkcji f spełniających równania (2), dla których $f(1)=1$. W tym celu udowodnimy najpierw, że jeżeli funkcja f spełnia (2), to dla dowolnej liczby $s\in\mathbb{N}$ liczba $f(s)$ jest podzielna przez a $(=f(1))$.

Ustalmy liczbę naturalną s. Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby a. Niech $\alpha\geqslant 1$ będzie największym wykładnikiem, z jakim liczba p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby a (tzn. $p^\alpha\,|\,a$, lecz $p^{\alpha+1}\nmid a$). Analogicznie, niech $\beta\geqslant 0$ będzie największą liczbą całkowitą o własności $p^\beta\,|\,f(s)$ (a więc $p^{\beta+1}\nmid f(s)$).

Korzystając z drugiego równania (2) dowodzimy indukcyjnie, że

(5) $$a^{k-1}f(s^k)=(f(s))^k \qquad \text{dla} \quad k=1,2,3,\ldots\,.$$

Liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $(f(s))^k$ z wykładnikiem βk, natomiast do rozkładu liczby $a^{k-1}f(s^k)$ z wykładnikiem co najmniej $\alpha(k-1)$. Zatem na mocy równości (5) otrzymujemy $\beta k\geqslant\alpha(k-1)$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k. Stąd $\beta\geqslant\alpha$. Ponieważ liczba p była dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby a, więc $a\,|\,f(s)$ dla $s\in\mathbb{N}$.

Definiujemy funkcję $g(s)=f(s)/a$. Wówczas $g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ oraz $g(1)=1$. Ponadto funkcja g spełnia warunki (2). Istotnie: dzieląc obie strony drugiej równości (2) przez a^2 otrzymujemy

$$g(st)=g(s)g(t) \qquad \text{dla wszystkich} \quad s,t\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Ponadto na mocy pierwszej równości (2), $f(f(1))=(f(1))^2$, skąd $g(a)=a$. Zatem korzystając z równości (6),

$$ag(g(s))=g(a)g(g(s))=g(ag(s))=g(f(s))=f(f(s))/a=as,$$

co dowodzi, że funkcja g spełnia warunki (2). Oprócz tego $g(s)\leqslant f(s)$ dla wszystkich $s\in\mathbb{N}$. Poszukiwania najmniejszej wartości $f(1998)$ możemy więc ograniczyć do funkcji $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ spełniających równości

$$f(f(s))=s \qquad \text{oraz} \qquad f(st)=f(s)f(t) \tag{7}$$

dla wszystkich liczb $s,t\in\mathbb{N}$.

Niech f będzie dowolną funkcją spełniającą (7). Wykażemy, że dla dowolnej liczby pierwszej p liczba $f(p)$ jest pierwsza. Niech więc $f(p)=uv$, gdzie $u,v\in\mathbb{N}$. Wtedy

$$p=f(f(p))=f(uv)=f(u)f(v).$$

Stąd wynika, że jedna z liczb $f(u)$, $f(v)$ (powiedzmy, że $f(u)$) jest równa 1. Stąd, na mocy drugiego równania (7), $u=f(f(u))=f(1)=1$. Zatem $f(p)$ jest liczbą pierwszą.

Ponadto funkcja f jest różnowartościowa. Istotnie: jeśli $f(s)=f(t)$, to $f(f(s))=f(f(t))$, skąd $s=t$.

Udowodniliśmy więc, że funkcja f przekształca różne liczby pierwsze na różne liczby pierwsze. Stąd wynika, że

$$f(1998)=f(2\cdot 3^3\cdot 37)=f(2)\cdot(f(3))^3\cdot f(37)\geqslant 3\cdot 2^3\cdot 5=120.$$

Pozostało podać przykład funkcji f spełniającej warunki (7), dla której zachodzi równość $f(1998)=120$. Taką funkcję f definiujemy następująco:

$$f(1)=1, \quad f(2)=3, \quad f(3)=2, \quad f(5)=37, \quad f(37)=5$$

oraz $f(p)=p$ dla liczb pierwszych $p\neq 2,3,5,37$. Dla dowolnej liczby złożonej $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ przyjmujemy

$$f(n)=f(p_1)^{\alpha_1}f(p_2)^{\alpha_2}\ldots f(p_n)^{\alpha_n}.$$

Wówczas $f(1998)=120$ oraz funkcja f spełnia zależności (7). æ

XXI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Zadanie **1.** Niech x_1, x_2, y_1, y_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$x_1^2+x_2^2\leqslant 1.$$

Udowodnić nierówność

$$(1)\qquad (x_1y_1+x_2y_2-1)^2\geqslant (x_1^2+x_2^2-1)(y_1^2+y_2^2-1).$$

Rozwiązanie

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $y_1^2+y_2^2\geqslant 1$. Wtedy lewa strona nierówności (1) jest nieujemna (jako kwadrat liczby rzeczywistej), natomiast z nierówności $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$ oraz $y_1^2+y_2^2\geqslant 1$ wynika, że jej prawa strona jest niedodatnia. Zatem w tym przypadku nierówność (1) jest udowodniona.

Załóżmy teraz, że $y_1^2+y_2^2<1$. Niech

$$a=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\qquad \text{oraz}\qquad b=\sqrt{y_1^2+y_2^2}.$$

Wówczas $0\leqslant a\leqslant 1$ oraz $0\leqslant b<1$. Na mocy nierówności Schwarza (p. *Dodatek*, „Nierówność Schwarza”, str. 112) otrzymujemy $x_1y_1+x_2y_2\leqslant ab<1$. Zatem

$$\begin{aligned}(x_1y_1+x_2y_2-1)^2\geqslant (ab-1)^2=a^2b^2-2ab+1\geqslant a^2b^2-a^2-b^2+1=\\ =(a^2-1)(b^2-1)=(x_1^2+x_2^2-1)(y_1^2+y_2^2-1),\end{aligned}$$

co kończy dowód nierówności (1).

Zadanie **2.** Rozważamy n punktów $P_1,P_2,\ldots,P_n$ położonych w tej kolejności na jednej linii prostej. Malujemy każdy z tych n punktów na jeden z następujących kolorów: biały, czerwony, zielony, niebieski, fioletowy. Kolorowanie nazwiemy *dopuszczalnym*, jeśli dla dowolnych dwóch kolejnych punktów P_i, P_{i+1} $(i=1,2,\ldots,n-1)$ oba są tego samego koloru lub co najmniej jeden z nich jest biały. Ile jest dopuszczalnych kolorowań?

Rozwiązanie

Wykażemy, że dopuszczalnych kolorowań jest $\frac{1}{2}(3^{n+1}+(-1)^{n+1})$.

Sposób I

Niech b_n będzie liczbą dopuszczalnych kolorowań n punktów, w których ostatni punkt jest pomalowany na biało, zaś k_n — liczbą pozostałych dopuszczalnych kolorowań, tzn. kolorowań, w których ostatni punkt jest pomalowany na czerwono, zielono, niebiesko lub fioletowo. Punkty pokolorowane na czerwono, zielono, niebiesko lub fioletowo będziemy nazywać *prawdziwie kolorowymi*.

Oczywiście $b_1=1$ oraz $k_1=4$. Wykażemy, że dla $n\geqslant 1$ zachodzą następujące równości:

$$(1)\qquad b_{n+1}=b_n+k_n\qquad \text{oraz}\qquad k_{n+1}=4b_n+k_n.$$

W tym celu zastanówmy się, jak z dopuszczalnego kolorowania n punktów można otrzymać dopuszczalne kolorowanie $n+1$ punktów.

Liczba kolorowań $n+1$ punktów zakończonych punktem białym jest równa liczbie wszystkich dopuszczalnych kolorowań n punktów, gdyż każde dopuszczalne kolorowanie n punktów można uzupełnić $(n+1)$-szym punktem pomalowanym na biało. Zatem $b_{n+1} = b_n + k_n$, co dowodzi pierwszej spośród równości (1).

Wśród wszystkich dopuszczalnych kolorowań $n+1$ punktów zakończonych punktem prawdziwie kolorowym można wyróżnić dwa rodzaje:

1. *Kolorowania, w których przedostatni, n-ty punkt jest biały.* Wtedy kolor ostatniego, $(n+1)$-szego punktu może być wybrany dowolnie spośród czterech kolorów prawdziwych. Zatem każde kolorowanie n punktów, zakończone na biało, może być uzupełnione na 4 sposoby do kolorowania $n+1$ punktów, zakończonego punktem prawdziwie kolorowym. Otrzymujemy więc $4b_n$ kolorowań tego rodzaju.

2. *Kolorowania, w których przedostatni, n-ty punkt nie jest biały.* Wówczas, na mocy definicji kolorowań dopuszczalnych, ostatni $(n+1)$-szy punkt musi być tego samego koloru co przedostatni. Zatem każde kolorowanie n punktów, zakończone punktem prawdziwie kolorowym, może być uzupełnione tylko na jeden sposób do kolorowania $n+1$ punktów, zakończonego punktem prawdziwie kolorowym. Kolorowań tego rodzaju jest więc k_n.

Łącznie kolorowań $n+1$ punktów zakończonych punktem prawdziwie kolorowym jest $4b_n + k_n$, czyli $k_{n+1} = 4b_n + k_n$, co dowodzi drugiej spośród równości (1).

Niech d_n będzie liczbą wszystkich dopuszczalnych kolorowań n punktów. Wtedy $d_n = b_n + k_n$ oraz $d_1 = 5$, $d_2 = 13$. Ponadto dla $n \geqslant 2$ mamy

$$\begin{aligned} d_{n+2} &= b_{n+2} + k_{n+2} = b_{n+1} + k_{n+1} + 4b_{n+1} + k_{n+1} = \\ &= 5b_{n+1} + 2k_{n+1} = 2(b_{n+1} + k_{n+1}) + 3b_{n+1} = 2d_{n+1} + 3d_n\,. \end{aligned}$$

Stosując metodę rozwiązywania rekurencji liniowych (zob. *Dodatek*, „Rozwiązywanie rekurencji liniowych”, str. 103) otrzymujemy

$$d_n = \tfrac{1}{2}(3^{n+1} + (-1)^{n+1}).$$

Sposób II

Rozważmy kolorowanie dopuszczalne n punktów. *Jednokolorową wyspą* nazwiemy każdy maksymalny, niepusty ciąg kolejnych punktów pomalowanych jednym kolorem, różnym od białego. Niech m oznacza liczbę wysp jednokolorowych. Wtedy punktów białych jest co najmniej $m-1$. Stąd $2m-1 \leqslant n$. Zatem wysp jednokolorowych nie może być więcej niż $[(n+1)/2]$.

Niech P_{n+1} będzie dodatkowym białym punktem położonym na prawo od punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Wówczas każda jednokolorowa wyspa ma z prawej strony punkt pomalowany na biało. *Białym sąsiadem jednokolorowej wyspy* nazwiemy ten punkt biały, który jest położony na prawo od danej wyspy i leży najbliżej niej.

Policzymy, ile jest dopuszczalnych kolorowań, wiedząc, że jednokolorowych wysp jest dokładnie k (gdzie $0 \leqslant k \leqslant [(n+1)/2]$).

Zero jednokolorowych wysp

Wszystkie punkty są pomalowane na biało — mamy więc tylko *jedno* dopuszczalne kolorowanie w tym przypadku.

Jedna jednokolorowa wyspa

Kolorowanie dopuszczalne jest wyznaczone przez położenie wyspy oraz wybór jednego spośród czterech kolorów, na który pomalowane są punkty tej wyspy. Położenie wyspy można wyznaczyć wybierając dwa różne punkty spośród $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$. (Pierwszy z nich to wysunięty najbardziej na lewo punkt wyspy, zaś drugi to jej biały sąsiad). Zatem w tym przypadku dopuszczalnych kolorowań jest

$$4 \cdot \binom{n+1}{2}.$$

Dwie jednokolorowe wyspy

To kolorowanie jest wyznaczone przez położenie dwóch wysp (wybór czterech różnych punktów spośród $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$) oraz wybór dwóch kolorów dla tych wysp (co można uczynić na 4^2 sposobów). Mamy więc łącznie w tym przypadku

$$4^2 \cdot \binom{n+1}{4}$$

kolorowań dopuszczalnych.

Analogicznie stwierdzamy, że dla $k \leqslant [(n+1)/2]$ istnieje

$$4^k \cdot \binom{n+1}{2k}$$

kolorowań dopuszczalnych mających dokładnie k *wysp jednokolorowych.*

Łącznie wszystkich dopuszczalnych kolorowań jest więc

$$\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} 4^k \cdot \binom{n+1}{2k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{n+1} 2^l \cdot \binom{n+1}{l} + \sum_{l=0}^{n+1} (-2)^l \cdot \binom{n+1}{l}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left((1+2)^{n+1} + (1-2)^{n+1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(3^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) .$$

Sposób III

Każde dopuszczalne kolorowanie n punktów uzupełnijmy $(n+1)$-szym białym punktem dołączonym na końcu. W ten sposób każde otrzymane kolorowanie można podzielić na *segmenty*. Każdy segment składa się z kolejnych punktów tego samego koloru oraz ostatniego punktu białego (w szczególności segment może być jednopunktowy, złożony tylko z punktu białego). Każdy segment zakodujemy przy pomocy ciągu cyfr 0, 1, 2. Ciąg ten będzie miał taką samą długość jak kodowany segment. W ten sposób każde kolorowanie dopuszczalne zostanie zakodowane przy pomocy ciągu złożonego z $n+1$ cyfr.

Każdemu nie białemu punktowi przyporządkujmy (uporządkowaną) parę cyfr według reguły: czerwony: 11, zielony: 12, niebieski: 21, fioletowy: 22.

Kodowanie segmentów odbywa się następująco.

Segmentowi złożonemu z jednego (białego) punktu przypisujemy 0.

Segmentowi złożonemu z dwóch punktów (pierwszy nie biały, drugi biały) przypisujemy parę cyfr przyporządkowaną kolorowi pierwszego punktu segmentu.

Segmentowi o długości k ($k \geqslant 3$) przypisujemy parę cyfr cd, która jest przyporządkowana kolorowi początkowych punktów segmentu, przedzieloną $k-2$ zerami: $c000...0d$. (Na przykład segmentowi złożonemu z siedmiu punktów zielonych i ostatniego punktu białego przypisujemy ciąg 1000002).

Tym samym otrzymujemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość kolorowań i $(n+1)$-elementowych ciągów cyfr 0, 1, 2, zawierających parzystą liczbę cyfr niezerowych.

Aby udzielić liczbowej odpowiedzi na pytanie postawione w zadaniu, należy wyznaczyć liczbę takich ciągów.

Wszystkich $(n+1)$-elementowych ciągów złożonych z cyfr 0, 1, 2 jest 3^{n+1}. Ile z nich ma parzystą liczbę cyfr niezerowych? Okazuje się, że *prawie* połowa, gdyż istnieje *prawie* wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ciągami z parzystą i ciągami z nieparzystą liczbą cyfr niezerowych. Odpowiedniość ta wygląda następująco: Mając dany ciąg cyfr, zmieniamy pierwszą, różną od 1 cyfrę według zasady: jeśli jest ona „zerem", to zamieniamy ją na „dwójkę"; jeśli jest to „dwójka", to wymieniamy ją na „zero". Taka operacja zmienia parzystość liczby cyfr niezerowych, a jej dwukrotne złożenie jest identycznością.

Powyższe przekształcenie jest poprawnie określone na każdym ciągu cyfr z wyjątkiem ciągu złożonego z samych jedynek. Pozostałych ciągów jest $3^{n+1}-1$ i dokładnie połowa z nich ma parzystą liczbę cyfr niezerowych. Do tego trzeba doliczyć ciąg złożony z samych jedynek w przypadku, gdy liczba $n+1$ jest parzysta.

Zatem szukana liczba ciągów jest równa

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(3^{n+1}-1), & \text{gdy } n+1 \text{ jest liczbą nieparzystą,} \\ \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)+1, & \text{gdy } n+1 \text{ jest liczbą parzystą,} \end{cases}$$

czyli ogólnie

$$\tfrac{1}{2}(3^{n+1}+(-1)^{n+1}).$$

Zadanie **3.** Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (x,y) spełniające następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2-x^3=y \\ 2-y^3=x. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Para $(x,y)=(1,1)$ spełnia dany układ równań. Wykażemy, że jest to jedyne rozwiązanie.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że pewne liczby x, y spełniają podany w treści zadania układ równań, przy czym $x\neq 1$.

Jeżeli $x>1$, to $y=2-x^3<1$. Podobnie, gdyby zachodziła nierówność $x<1$, to mielibyśmy $y=2-x^3>1$. Zatem ze względu na symetrię niewiadomych w danym układzie równań możemy (bez szkody dla ogólności zadania) przyjąć, że $x>1$, $y<1$.

Podstawmy: $a=x-1$, $b=1-y$, czyli $x=1+a$, $y=1-b$. Wtedy $a>0$, $b>0$ oraz

$$\begin{cases} b=3a+3a^2+a^3 \\ a=3b-3b^2+b^3. \end{cases}$$

Z pierwszej równości wynika natychmiast, że $b>3a$. Natomiast wychodząc od drugiej równości oraz wykorzystując nierówność $b>0$ otrzymujemy kolejno

$$a=3b-3b^2+b^3=b(3-3b+b^2)=$$
$$=b(\tfrac{3}{4}+\tfrac{9}{4}-3b+b^2)=b\Big(\tfrac{3}{4}+(\tfrac{3}{2}-b)^2\Big)\geqslant \tfrac{3}{4}b>\tfrac{9}{4}a\ .$$

Stąd, ponieważ $a>0$, więc $1>\frac{9}{4}$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem $x=1$, co pociąga za sobą $y=1$.

Zadanie **4.** Niech m, n będą danymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech

$$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt[k^2]{k^m}\right]$$

($[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x). Udowodnić, że

$$S_m(n)\leqslant n+m\cdot\big(\sqrt[4]{2^m}-1\big).$$

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenie: $A_k=\sqrt[k^2]{k}$. Wtedy liczbę $S_m(n)$ możemy zapisać w postaci

$$\sum_{k=1}^{n}[A_k^m].$$

Mamy więc udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n}[A_k^m]\leqslant m(A_2^m-1)+n\ ,$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{n}[A_k^m-1]\leqslant m(A_2^m-1)\ .$$

Wykażemy najpierw, że dla każdej liczby naturalnej k zachodzi nierówność $A_k\leqslant A_2$. Istotnie:

$$A_k\leqslant A_2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[k^2]{k}\leqslant\sqrt[4]{2} \quad\Leftrightarrow\quad k^4\leqslant 2^{k^2} \quad\Leftrightarrow\quad k\leqslant 2^{k\cdot(k/4)}.$$

Jeżeli więc $k\geqslant 4$, to dostajemy $k<2^k\leqslant 2^{k\cdot(k/4)}$. To dowodzi nierówności $A_k\leqslant A_2$ w przypadku, gdy $k\geqslant 4$. Dla $k=3$ otrzymujemy:

$$A_3\leqslant A_2 \quad\Leftrightarrow\quad 3^4<2^{3^2} \quad\Leftrightarrow\quad 81<512,$$

co jest prawdą. Wreszcie dla $k=1$ mamy $A_1=1<\sqrt[4]{2}=A_2$.

Jeśli ponadto przyjmiemy, że $k\geqslant m$, to prawdziwe są następujące oszacowania:

$$A_k^m\leqslant A_k^k=\sqrt[k]{k}<\sqrt[k]{2^k}=2.$$

Zatem $[A_k^m-1]\leqslant 0$ dla $k\geqslant m$.

Wykorzystując uzyskane wyżej nierówności dostajemy:

$$\sum_{k=1}^{n}[A_k^m-1]\leqslant\sum_{k=1}^{m}[A_k^m-1]\leqslant\sum_{k=1}^{m}[A_2^m-1]=m[A_2^m-1]\leqslant m(A_2^m-1),$$

co kończy dowód danej nierówności.

Zadanie **5.** Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich takich, że równanie $x^3-17x^2+ax-b^2=0$ ma trzy pierwiastki całkowite (niekoniecznie różne).

Rozwiązanie

Niech p, q, r będą pierwiastkami danego równania. Wówczas:

(1) $$p+q+r=17$$

(2) $$pq+qr+rp=a$$

(3) $$pqr=b^2\ .$$

Ponieważ $b^2>0$, więc z równania (3) wynika, że liczby p, q, r są różne od 0. Ponadto są one wszystkie dodatnie lub dokładnie dwie spośród nich są ujemne.

Gdyby $p>0$ oraz $q,r<0$, to na mocy równości (2) oraz (1) mielibyśmy:

$$\begin{aligned}a&=pq+qr+rp=qr+(17-q-r)(q+r)=\\&=qr+17q+17r-q^2-r^2-2qr=17q+17r-q^2-r^2-qr<0\end{aligned}$$

(gdyż wszystkie składniki ostatniej sumy są ujemne). Otrzymaliśmy sprzeczność. Widzimy więc, że przypadek, w którym tylko jeden z pierwiastków wielomianu jest dodatni, zachodzić nie może.

Zatem liczby p, q, r są dodatnie. Pozostaje znaleźć wszystkie takie trójki liczb całkowitych dodatnich (p,q,r), że liczba pqr jest kwadratem liczby naturalnej oraz $p+q+r=17$.

Bez szkody dla ogólności możemy przyjąć, że $p \leqslant q \leqslant r$.

W poniższych tabelach wypisane są wszystkie rozwiązania w liczbach dodatnich równania $p+q+r=17$, przy założeniu $p \leqslant q \leqslant r$.

p	q	r	pqr	a	b
1	1	15	15		
1	2	14	28		
1	3	13	39		
1	4	12	48		
1	5	11	55		
1	6	10	60		
1	7	9	63		
1	8	8	**64**	80	8
2	2	13	52		
2	3	12	72		
2	4	11	88		
2	5	10	**100**	80	10

p	q	r	pqr	a	b
2	6	9	108		
2	7	8	112		
3	3	11	99		
3	4	10	120		
3	5	9	135		
3	6	8	**144**	90	12
3	7	7	147		
4	4	9	**144**	88	12
4	5	8	160		
4	6	7	168		
5	5	7	175		
5	6	6	180		

Spośród tych rozwiązań musimy wybrać te, dla których liczba pqr jest pełnym kwadratem. Przez bezpośrednie sprawdzenie widzimy, że istnieją cztery takie trójki (p,q,r). Otrzymujemy więc cztery pary liczb (a,b) spełniające warunki zadania, a mianowicie:

$$(80,8), \quad (80,10), \quad (88,12), \quad (90,12).$$

Zadanie **6.** Różne punkty A, B, C, D, E, F są położone na okręgu k w tej kolejności. Proste styczne do okręgu k w punktach A i D oraz proste BF i CE przecinają się w jednym punkcie P. Udowodnić, że proste AD, BC i EF są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Prosta AD jest biegunową punktu P względem okręgu k (p. *Dodatek*, „Dwustosunek i biegunowa”, str. 107). Zatem na mocy twierdzenia 3 (b), na stronie 110, proste AD, BC, EF są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie **7.** Rozważamy pary (a,b) liczb naturalnych takich, że iloczyn $a^a \cdot b^b$ w zapisie dziesiętnym kończy się dokładnie 98 zerami. Wyznaczyć parę (a,b) o tej własności, dla której iloczyn ab jest najmniejszy.

Rozwiązanie

Udowodnimy twierdzenie dające pełną charakteryzację par (a,b), dla których liczba $a^a \cdot b^b$ kończy się dokładnie 98 zerami.

Twierdzenie

Liczba $a^a \cdot b^b$ kończy się dokładnie 98 zerami wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(a,b)=(98,\ell) \qquad \text{lub} \qquad (a,b)=(\ell,98), \tag{1}$$

gdzie $\ell=75$ lub $\ell=10m+5$ dla $m\geqslant 10$.

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast, że istnieją dokładnie dwie pary (a,b) spełniające warunki zadania, a mianowicie:

$$(a,b)=(98,75) \qquad \text{lub} \qquad (a,b)=(75,98).$$

Dowód twierdzenia

Jeżeli (a,b) jest parą postaci (1), to liczba $a^a \cdot b^b$ ma w rozkładzie na czynniki pierwsze dokładnie 98 „dwójek" i co najmniej 100 „piątek". To oznacza, że liczba $a^a \cdot b^b$ kończy się dokładnie 98 zerami.

Załóżmy teraz, że liczba $a^a \cdot b^b$ kończy się dokładnie 98 zerami. Gdyby obie liczby a, b były podzielne przez 5, to liczba $a^a \cdot b^b$ (jako piąta potęga liczby naturalnej) kończyłaby się liczbą zer podzielną przez 5, podczas gdy zer tych jest dokładnie 98. Niech więc, bez straty ogólności, a będzie liczbą niepodzielną przez 5. Wówczas liczba b musi być podzielna przez 5, co oznacza, że czynnik „5" wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $a^a \cdot b^b$ z wykładnikiem podzielnym przez 5. Skoro jednak liczba $a^a \cdot b^b$ kończy się dokładnie 98 zerami, więc musi mieć ona w rozkładzie na czynniki pierwsze co najmniej 100 „piątek" i dokładnie 98 „dwójek". Stąd wynika, że $b\in\{50,75\}$ lub b jest liczbą podzielną przez 5 równą co najmniej 100 (w przeciwnym razie „piątek" w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $a^a \cdot b^b$ byłoby mniej niż 100).

Wykażemy teraz, że b jest liczbą nieparzystą.

Gdyby liczba $b\geqslant 100$ była parzysta, to liczba „dwójek" w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $a^a \cdot b^b$ byłaby co najmniej 100, podczas gdy ma być ich dokładnie 98.

Gdyby zaś $b=50$, to liczba a^a miałaby w rozkładzie na czynniki pierwsze dokładnie 48 „dwójek". Jeśli przyjmiemy $a=2^k\cdot n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, to $ak=48$, czyli $k\cdot 2^k\cdot n=48$. Stąd $k\in\{1,2,3,4\}$. Podstawiając po kolei $k=1,2,3,4$, obliczamy: $n=24,6,2,\frac{3}{4}$. W żadnym z przypadków n nie jest liczbą nieparzystą. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem b jest liczbą nieparzystą, co na mocy powyższych ograniczeń daje $b=75$ lub $b=10m+5$ dla $m\geqslant 10$.

Liczba a^a musi mieć w rozkładzie na czynniki pierwsze dokładnie 98 „dwójek". Jeśli przyjmiemy $a=2^k\cdot n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, to $ak=98$, czyli $k\cdot 2^k\cdot n=98$. Ostatnia równość wymusza $k=1$, skąd $a=98$.

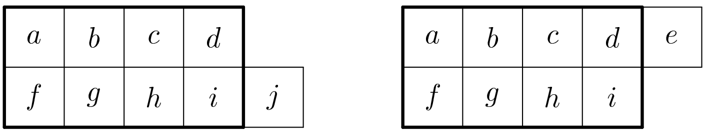
Zmieniając rolę oznaczeń a, b dostajemy wszystkie pary (a,b), dla których liczba $a^a \cdot b^b$ kończy się dokładnie 98 zerami.

Zadanie **8.** Niech $n > 2$ będzie daną liczbą naturalną. Rozważamy siatkę kwadratową na płaszczyźnie. W każdym kwadracie jednostkowym siatki wpisana jest liczba naturalna. Wielokąty o polu równym n, których boki są zawarte w prostych tworzących siatkę, nazwiemy wielokątami *dopuszczalnymi*. *Wartością* wielokąta dopuszczalnego nazwiemy sumę wszystkich liczb wpisanych w kwadraty zawarte w tym wielokącie. Udowodnić, że jeśli wartości dowolnych dwóch przystających wielokątów dopuszczalnych są równe, to wszystkie liczby wpisane w kwadraty siatki są równe.

Uwaga. Przypominamy, że obraz symetryczny Q wielokąta P jest wielokątem przystającym do P.

Rozwiązanie

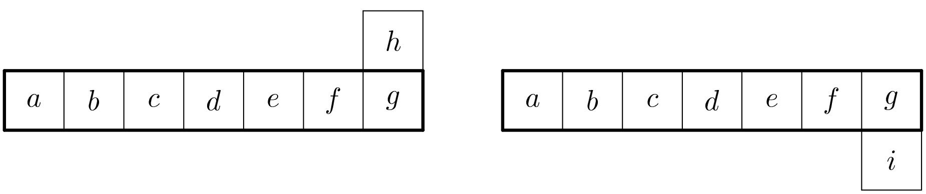
Najpierw rozpatrzymy przypadek, gdy n jest liczbą nieparzystą. Niech $n = 2k+1$. Jako dwa dopuszczalne wielokąty przystające rozważamy ten sam prostokąt $2 \times k$ z dołączonym kwadratem jednostkowym, jak na rysunku 1. (Na tym rysunku $k = 4$).



rys. 1

Wartości obu wielokątów są równe, więc mamy $e = j$. Ponieważ powyższą parę wielokątów można przesunąć w dowolne miejsce płaszczyzny, jak również obrócić o $90°$, wnioskujemy stąd, że w dowolne dwa kwadraty jednostkowe mające wspólny bok wpisano równe liczby. Zatem wszystkie liczby wpisane w kwadraty siatki są równe.

Pozostał do rozważenia przypadek, gdy n jest liczbą parzystą, powiedzmy $n = 2k$. Rozważamy parę dopuszczalnych wielokątów przystających, powstałych z dołączenia do tego samego prostokąta $1 \times (2k-1)$ kwadratu jednostkowego, jak na rysunku 2. (Na tym rysunku $k = 4$).



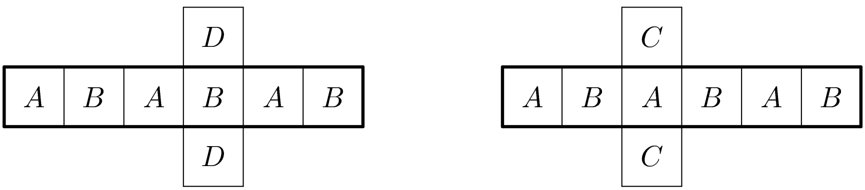
rys. 2

Równość wartości tych wielokątów daje $h = i$, a dowolność ich położenia dowodzi, że w każdych dwóch kwadratach jednostkowych, z których jeden jest przesunięciem drugiego o wektor o współrzędnych parzystych, wpisane są równe liczby. W rezultacie w kwadraty płaszczyzny mogą być wpisane co najwyżej 4 różne wartości A, B, C, D, tak jak na rysunku 3.

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D
A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D
A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B

rys. 3

Z kolei rozważmy dwa wielokąty jak na rysunku 4, gdzie środkowe, pogrubione prostokąty $1\times(2k-2)$ pokrywają się.



rys. 4

Równość wartości tych wielokątów daje $2D=2C$, czyli $D=C$. Dowolność położenia tych wielokątów pokazuje, że dowolne dwa kwadraty jednostkowe o wspólnym boku mają wpisaną tę samą liczbę. Wszystkie liczby wpisane w kwadraty siatki są więc równe i w tym przypadku.

Zadanie **9.** Niech K, L, M będą środkami boków BC, AC, AB trójkąta ABC. Punkty A, B, C dzielą okrąg opisany na trójkącie ABC na trzy łuki: AB, BC, CA. Niech X będzie takim punktem łuku BC, że $BX=XC$. Analogicznie, niech Y będzie takim punktem łuku AC, że $AY=YC$, zaś Z takim punktem łuku AB, że $AZ=ZB$. Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że $r+KX+LY+MZ=2R$.

Rozwiązanie

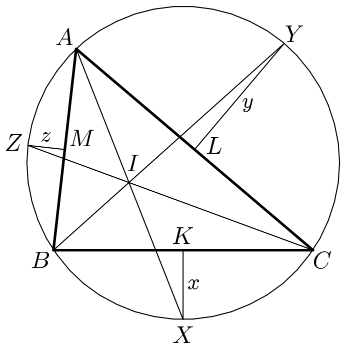
Proste AX, BY, CZ są odpowiednio dwusiecznymi kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ trójkąta ABC, a więc przecinają się w środku I okręgu wpisanego w ten trójkąt (rys. 1). Proste KX, LY, MZ są odpowiednio symetralnymi odcinków BC, CA, AB.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $x=KX$, $y=LY$, $z=MZ$. Niech ponadto $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ oraz $2p=a+b+c$.

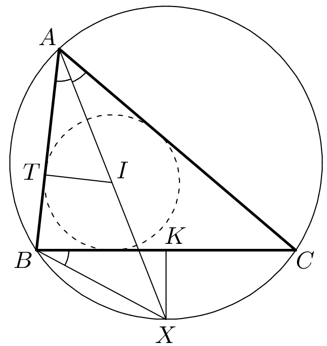
Równość, którą mamy udowodnić, przepisujemy w postaci

$$\frac{x}{r}+\frac{y}{r}+\frac{z}{r}+1=\frac{2R}{r}. \tag{1}$$

Aby dowieść tożsamości (1), wyrazimy najpierw ułamki stojące w powyższym wyrażeniu w zależności od a, b, c.



rys. 1



rys. 2

Niech T będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem AB (rys. 2). Wówczas $TA=p-a$. Ponieważ $\sphericalangle KBX=\sphericalangle CAX=$ $=\sphericalangle TAI$, więc trójkąty prostokątne KBX oraz TAI są podobne. Stąd

$$\frac{KX}{KB}=\frac{TI}{TA}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{2x}{a}=\frac{r}{p-a}.$$

Otrzymana równość jest równoważna tożsamości

$$\frac{x}{r}=\frac{a}{2(p-a)}. \tag{2}$$

Rozumując analogicznie uzyskujemy zależności

$$\frac{y}{r}=\frac{b}{2(p-b)} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{z}{r}=\frac{c}{2(p-c)}. \tag{3}$$

Oznaczmy przez S pole trójkąta ABC. Znane są następujące wzory:

$$S=pr \qquad \text{oraz} \qquad S=\frac{abc}{4R}\,.$$

Korzystając z powyższych równości oraz ze wzoru Herona mamy

$$\frac{2R}{r}=\frac{abc}{2S}\cdot\frac{p}{S}=\frac{abc}{2(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{4}$$

Na mocy równości (2), (3), (4) dowodzona przez nas zależność (1) przybiera postać

$$\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}+1=\frac{abc}{2(p-a)(p-b)(p-c)},$$

co możemy również przepisać następująco:

$$a(p-b)(p-c)+b(p-c)(p-a)+c(p-a)(p-b)+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc.$$

Podstawmy: $t=p-a$, $u=p-b$, $v=p-c$. Wówczas otrzymujemy: $a=u+v$, $b=v+t$, $c=t+u$. Zatem tożsamość, którą chcemy otrzymać, wygląda następująco:

$$(u+v)uv+(v+t)vt+(t+u)tu+2tuv=(u+v)(v+t)(t+u). \tag{5}$$

Powyższa zależność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych t, u, v. Mamy bowiem następujące równości:

$$\begin{aligned}(u+v)(v+t)(t+u) &= uvt+u^2v+ut^2+u^2t+v^2t+v^2u+vt^2+vtu=\\ &= (u+v)uv+(v+t)vt+(t+u)tu+2tuv.\end{aligned}$$

Dowód równości (1) został tym samym zakończony. æ

IX Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

Zadanie **1.** Znaleźć wszystkie funkcje dwóch zmiennych f, których argumenty x, y i wartości $f(x,y)$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, spełniające następujące warunki (dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x i y):

$$\begin{aligned} f(x,x) &= x,\\ f(x,y) &= f(y,x),\\ (x+y)f(x,y) &= yf(x,x+y).\end{aligned}$$

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że istnieje co najwyżej jedna funkcja f spełniająca warunki zadania.

Z pierwszego równania mamy $f(1,1)=1$. Korzystając z drugiego i trzeciego równania otrzymujemy $f(1,2)=f(2,1)=2$. Ogólnie: jeśli obliczyliśmy już wartości liczb $f(x,y)$ dla wszystkich $0<x,y<z$, gdzie $z\geqslant 2$ jest pewną ustaloną liczbą naturalną, to podstawiając do trzeciego równania $y=z-x$ znajdujemy wartości $f(x,z)$ dla $0<x<z$. Potem korzystając z drugiego równania obliczamy liczby $f(z,y)$ dla $0<y<z$. Z pierwszego równania otrzymujemy $f(z,z)=z$. Tak więc taka funkcja f, jeśli istnieje, to jest tylko jedna.

Z drugiej strony funkcja

$$f(x,y)=\text{najmniejsza wspólna wielokrotność liczb } x,\ y$$

spełnia równania dane w zadaniu. Pierwsze dwie równości są spełnione automatycznie. Aby udowodnić trzecią równość, przypomnijmy, że największy wspólny dzielnik liczb x, y jest równy największemu wspólnemu dzielnikowi liczb x, $x+y$. Oznaczając przez $[a,b]$ oraz (a,b) odpowiednio najmniejszą wspólną wielokrotność oraz największy wspólny dzielnik liczb a i b oraz wykorzystując tożsamość $(a,b)[a,b]=ab$ otrzymujemy

$$(x+y)[x,y]=(x+y)\cdot\frac{xy}{(x,y)}=y\cdot\frac{x(x+y)}{(x,x+y)}=y\cdot[x,x+y]\,,$$

a to jest trzecia spośród danych w zadaniu równości.

Tak więc jedyną funkcją f spełniającą dane warunki jest $f(x,y)=[x,y]$.

Zadanie **2.** Trójkę liczb całkowitych dodatnich (a,b,c) nazywamy *quasi-pitagorejską*, jeśli istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c, w którym miara kąta naprzeciwko boku c wynosi $120°$. Udowodnić, że jeśli (a,b,c) jest trójką quasi-pitagorejską, to c ma dzielnik pierwszy większy od 5.

Rozwiązanie

Niech (a,b,c) będzie trójką quasi-pitagorejską. Na mocy twierdzenia cosinusów otrzymujemy równość

$$c^2=a^2+ab+b^2. \tag{1}$$

Załóżmy najpierw, że liczby a, b są względnie pierwsze, tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1. Przy tym założeniu udowodnimy nawet więcej: *każdy* dzielnik pierwszy liczby c jest większy od 5.

Niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby c. Liczby a, b nie mogą być jednocześnie parzyste, gdyż są względnie pierwsze. Stąd wynika, że liczba $c^2=a^2+ab+b^2$ jest nieparzysta, a więc $p\neq 2$.

Przypuśćmy teraz, że $p=3$. Największy wspólny dzielnik liczb a, b jest równy 1, więc jedna z liczb a, b (powiedzmy, że jest nią a) nie jest podzielna przez 3. Równość (1) przepisujemy w postaci

$$4c^2=(a+2b)^2+3a^2. \tag{2}$$

Wtedy $3\,|\,(a+2b)^2$, skąd $3\,|\,a+2b$ i w konsekwencji $9\,|\,(a+2b)^2$. Zatem lewa strona równości (2) jest podzielna przez 9, zaś prawa nie. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Przypuśćmy z kolei, że $p=5$. Tak jak w poprzednim przypadku możemy założyć, że liczba a nie jest podzielna przez 5. Kwadrat liczby całkowitej może z dzielenia przez 5 dawać jedynie reszty 0, 1, 4. Stąd $3a^2\equiv\pm 3 \pmod 5$. Zatem na mocy równości (2) dostajemy $(a+2b)^2\equiv\mp 2 \pmod 5$. Kwadrat liczby całkowitej $a+2b$ daje więc z dzielenia przez 5 resztę 2 lub 3, a to, jak wspomnieliśmy wyżej, nie jest możliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $p>5$.

Niech teraz a, b, c będą dowolnymi liczbami całkowitymi spełniającymi równość (1) oraz niech d oznacza największy wspólny dzielnik liczb a, b. Z równości (1) wynika, że $d\,|\,c$. Przyjmijmy: $a=da_1$, $b=db_1$, $c=dc_1$. Wtedy liczby a_1, b_1 są względnie pierwsze oraz $c_1^2=a_1^2+a_1b_1+b_1^2$. Jak udowodniliśmy wyżej, dowolny dzielnik pierwszy liczby c_1 jest większy od 5. Liczba

$c = dc_1$ ma więc dzielnik pierwszy większy od 5 — jest nim każdy dzielnik pierwszy liczby c_1.

Uwaga 1.

Jeśli liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniają równość (1), to trójka (a,b,c) jest quasi-pitagorejska. Istotnie, z równości (1) wynika, że $a < c$, $b < c$, $c^2 = a^2 + ab + b^2 < (a+b)^2$, co oznacza, że z odcinków długości a, b, c da się zbudować trójkąt. Ponadto z twierdzenia cosinusów wynika, że miara kąta naprzeciwko boku c wynosi 120°.

Warto zauważyć, że dowód tej implikacji nie był potrzebny w powyższym rozwiązaniu.

Uwaga 2.

Trójka $(3,5,7)$ jest quasi-pitagorejska, co oznacza, że liczby „5" nie można w treści zadania zastąpić przez większą liczbę pierwszą. Można mimo wszystko wzmocnić znacznie tezę — patrz *uwaga* 4.

Uwaga 3.

Znana jest ogólna postać trójek quasi-pitagorejskich (a,b,c):

$$a = d(2xy + y^2), \quad b = d(x^2 - y^2), \quad c = d(x^2 + xy + y^2),$$

gdzie d jest dowolną liczbą naturalną, $x > y > 0$ i x, y są względnie pierwsze. Jak się Czytelnik nietrudno przekona, znajomość powyższego faktu nie pomaga w rozwiązaniu zadania!

Uwaga 4.

Można wykazać, że jeśli (a,b,c) jest trójką quasi-pitagorejską, to liczba c ma dzielnik pierwszy postaci $6k+1$. Stąd oczywiście wynika teza naszego zadania, gdyż każda liczba pierwsza postaci $6k+1$ jest większa od 5. Znane jest bowiem następujące, niełatwe

Twierdzenie

Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Jeżeli istnieje taka liczba całkowita x, że $x^2 \equiv -3 \pmod{p}$, to liczba p jest postaci $6k+1$.

W oparciu o powyższe twierdzenie dowód wspomnianego uogólnienia nie jest trudny. Wykorzystując bowiem fragmenty zaprezentowanego rozwiązania, wystarczy udowodnić następujący

Fakt

Jeśli $p > 3$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $a^2 + ab + b^2$, przy czym liczby a, b są względnie pierwsze, to liczba p jest postaci $6k+1$.

Dowód faktu

Bez straty ogólności możemy założyć, że liczba a nie jest podzielna przez p. Przyjmijmy $x = (a+2b)a^{(p-3)/2}$. Wtedy x jest liczbą całkowitą. Na mocy tożsamości $4(a^2+ab+b^2)=(a+2b)^2+3a^2$ oraz małego twierdzenia Fermata otrzymujemy $x^2=(a+2b)^2a^{p-3}\equiv -3a^{p-1}\equiv -3 \pmod p$. Z powyższego twierdzenia wynika więc, że liczba p jest postaci $6k+1$.

Zadanie **3.** Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x,y, które spełniają równanie
$$2x^2+5y^2=11(xy-11).$$

Rozwiązanie

Dane równanie jest równoważne równaniu $(2x-y)(5y-x)=121$. Obydwa czynniki stojące po lewej stronie powyższego równania muszą mieć ten sam znak. Gdyby oba były ujemne, to mielibyśmy $2x<y<x/5$, co oznaczałoby, że liczba x jest ujemna, a to przeczy założeniom. Liczby $2x-y$, $5y-x$ są więc dodatnimi dzielnikami liczby 121. Zatem dane równanie prowadzi do trzech układów równań:
$$\begin{cases} 2x-y = 1 \\ 5y-x = 121, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y = 11 \\ 5y-x = 11, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y = 121 \\ 5y-x = 1. \end{cases}$$
Rozwiązując powyższe układy dostajemy odpowiednio:
$$(x,y)=(14,27), \qquad (x,y)=(22/3,11/3), \qquad (x,y)=(202/3,41/3).$$
Tak więc jedynym rozwiązaniem danego równania w liczbach całkowitych jest para $(x,y)=(14,27)$.

Zadanie **4.** Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że dla $n=1,2,\ldots,1998$ wartości $P(n)$ są liczbami naturalnymi trzycyfrowymi. Udowodnić, że wielomian P nie ma pierwiastków całkowitych.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje taka liczba całkowita m, że $P(m)=0$. Znajdujemy taką liczbę $n\in\{1,2,\ldots,1998\}$, że $m\equiv n \pmod{1998}$. Wtedy $0=P(m)\equiv P(n) \pmod{1998}$. Liczba $P(n)$ jest trzycyfrowa, nie może być więc podzielna przez 1998. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie **5.** Niech a będzie cyfrą nieparzystą, zaś b cyfrą parzystą. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje liczba całkowita dodatnia, podzielna przez 2^n, w której zapisie dziesiętnym nie występują cyfry inne niż a i b.

Rozwiązanie

Jeśli $b=0$, to liczba $10^n a$ jest podzielna przez 2^n i w jej zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry a, b.

Załóżmy więc, że $b\neq 0$. Pokażemy indukcyjnie jak znaleźć liczbę d_n spełniającą warunki zadania oraz mającą *dokładnie* n cyfr.

Dla $n=1$ wystarczy przyjąć $d_1=b$. Załóżmy, że dla pewnego n umiemy skonstruować liczbę d_n. Wtedy liczba ta z dzielenia przez 2^{n+1} daje resztę 0 lub 2^n. Definiujemy liczbę

$$d_{n+1}=\begin{cases}10^n b+d_n & \text{jeśli } d_n\equiv 0 \pmod{2^{n+1}},\\ 10^n a+d_n & \text{jeśli } d_n\equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}.\end{cases}$$

(Innymi słowy, d_{n+1} powstaje z liczby d_n przez dopisanie na jej początku cyfry b bądź a, w zależności od tego, czy d_n dzieli się przez 2^{n+1}, czy nie). Liczba d_{n+1} ma oczywiście $n+1$ cyfr, z których każda jest równa a lub b. Pozostaje wykazać, że d_{n+1} dzieli się przez 2^{n+1}. Cyfra a jest nieparzysta, zaś b parzysta, więc na mocy powyższych równości dostajemy

$$d_{n+1}\equiv\begin{cases}0+0 \pmod{2^{n+1}} & \text{jeśli } d_n\equiv 0 \pmod{2^{n+1}},\\ 2^n+2^n \pmod{2^{n+1}} & \text{jeśli } d_n\equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}.\end{cases}$$

W obu przypadkach liczba d_{n+1} jest podzielna przez 2^{n+1}. Dowód indukcyjny jest więc zakończony.

Uwaga

Każda liczba całkowita dodatnia ma *dwa* rozwinięcia dziesiętne, np. liczbę 17 można także zapisać jako 16,99999... . W treści zadania milcząco zakładaliśmy, że chodzi o zapis dziesiętny „bez przecinka”. Bez tego założenia można bardzo łatwo rozwiązać zadanie w przypadku gdy $a=9$: liczba postaci $d_n=b999\ldots99{,}99999\ldots$ (gdzie przed przecinkiem wypisano n dziewiątek) ma jak widać w zapisie dziesiętnym tylko cyfry a i b oraz jest podzielna przez 2^n, gdyż $d_n=10^n\cdot(b+1)$.

Zadanie **6.** Niech P będzie wielomianem stopnia 6 i niech a, b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0<a<b$. Załóżmy, że

$$P(a)=P(-a), \qquad P(b)=P(-b), \qquad P'(0)=0.$$

Udowodnić, że $P(x)=P(-x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

Rozwiązanie

Niech $Q(x)=P(x)-P(-x)$. Wtedy Q jest wielomianem stopnia co najwyżej 5, $Q'(0)=0$ oraz $Q(0)=Q(a)=Q(-a)=Q(b)=Q(-b)=0$. Zatem wielomian Q ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych. Przy tym $x=0$ jest pierwiastkiem wielomianu Q i jego pochodnej, jest więc pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu Q. Zatem wielomian Q jest tożsamościowo równy zeru, skąd $P(x)=P(-x)$ dla wszystkich x rzeczywistych.

Zadanie **7.** Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ równanie

$$f(x)+f(y)=f(f(x)f(y)).$$

Rozwiązanie

Niech x_0 będzie dowolną liczbą rzeczywistą oraz niech $f(x_0)=c$. Podstawiając do danego równania $x=y=x_0$ dostajemy $f(c^2)=2c$. Kładąc dalej $x=y=c^2$ otrzymujemy $f(4c^2)=4c$. Podstawiając wreszcie $x=x_0$ oraz $y=4c^2$ mamy $f(4c^2)=5c$. Zatem $4c=5c$, skąd $c=0$. Ponieważ liczba x_0 była wybrana dowolnie, więc jedyną funkcją f spełniającą dane równanie jest $f(x)=0$.

Zadanie **8.** Niech $P_k(x)=1+x+x^2+\dots+x^{k-1}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_k(x)=2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej dodatniej n.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $L(x)$ oraz $P(x)$ odpowiednio lewą oraz prawą stronę danej w zadaniu równości. Ponieważ $(1-x)P_k(x)=1-x^k$, więc

$$(1-x)\cdot L(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(1-x^k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=2^n-(1+x)^n.$$

Ponadto otrzymujemy

$$\begin{aligned}(1-x)\cdot P(x) &= 2\left(1-\frac{1+x}{2}\right)\cdot 2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)=2^n\left(1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right)=\\ &= 2^n-(1+x)^n.\end{aligned}$$

Zatem $L(x)=P(x)$ dla $x\neq 1$. Obie funkcje $L(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, skąd wynika, że $L(x)=P(x)$ dla wszystkich x.

Zadanie **9.** Liczby α, β spełniają $0<\alpha<\beta<\pi/2$. Niech γ, δ będą liczbami określonymi przez warunki:

(i) $0<\gamma<\pi/2$ oraz liczba $\operatorname{tg}\gamma$ jest średnią arytmetyczną liczb $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$;

(ii) $0<\delta<\pi/2$ oraz liczba $1/\cos\delta$ jest średnią arytmetyczną liczb $1/\cos\alpha$ i $1/\cos\beta$.

Udowodnić, że $\gamma<\delta$.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech $f(t)=\sqrt{1+t^2}$. Wówczas dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $u\neq v$ zachodzi nierówność $f(\frac{1}{2}(u+v))<\frac{1}{2}f(u)+\frac{1}{2}f(v)$, tzn.

(1) $$\sqrt{1+\tfrac{1}{4}(u+v)^2}<\tfrac{1}{2}\sqrt{1+u^2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1+v^2}\,.$$

(Istotnie: podnosząc do kwadratu obie strony nierówności (1) oraz redukując wyrazy podobne dostajemy

$$1+uv<\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}\,.$$

Podnosząc ponownie do kwadratu, upraszczamy powyższą nierówność do postaci $2uv < u^2+v^2$, czyli $(u-v)^2 > 0$). Wykorzystując nierówność (1) otrzymujemy

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma} = f(\operatorname{tg}\gamma) = f\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}\right) <$$
$$< \frac{f(\operatorname{tg}\alpha)+f(\operatorname{tg}\beta)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right) = \frac{1}{\cos\delta}\,,$$

skąd $\gamma < \delta$.

Sposób II

Przedstawimy rozwiązanie geometryczne.

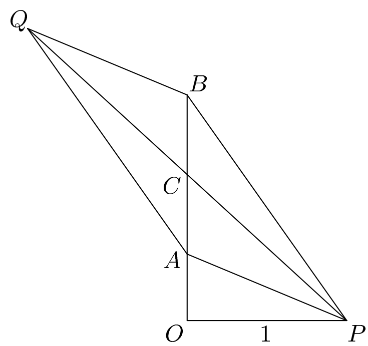
Na płaszczyźnie rysujemy odcinek jednostkowy OP (rys. 1). Wybieramy punkty A, B leżące po tej samej stronie prostej OP tak, aby zachodziły równości: $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB = 90^\circ$, $\sphericalangle OPA = \alpha$, $\sphericalangle OPB = \beta$. Wtedy $OA = \operatorname{tg}\alpha$, $OB = \operatorname{tg}\beta$, $PA = 1/\cos\alpha$, $PB = 1/\cos\beta$. Oznaczmy przez C środek odcinka AB. Na mocy założeń

$$OC = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2} = \operatorname{tg}\gamma, \qquad \text{skąd} \quad \sphericalangle OPC = \gamma \ \text{ oraz } \ PC = \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Niech Q będzie punktem symetrycznym do P względem punktu C. Czworokąt $PAQB$ jest równoległobokiem, a więc $AQ = PB = 1/\cos\beta$. Stąd

$$\frac{2}{\cos\delta} = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} = PA + AQ > PQ = 2\cdot PC = \frac{2}{\cos\gamma},$$

czyli $\gamma < \delta$.



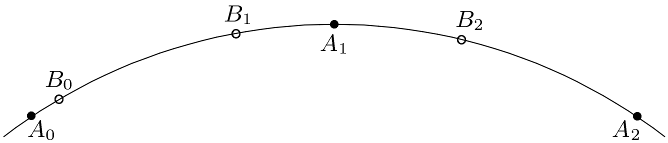
rys. 1

Zadanie **10.** Niech $n \geqslant 4$ będzie parzystą liczbą całkowitą. W okrąg o promieniu 1 wpisane są n-kąt foremny i $(n-1)$-kąt foremny. Dla każdego wierzchołka n-kąta rozważmy odległość od tego wierzchołka do najbliższego wierzchołka $(n-1)$-kąta, mierzoną po obwodzie okręgu. Niech S będzie sumą tych n odległości. Udowodnić, że S nie zależy od wzajemnego położenia tych dwóch wielokątów.

Rozwiązanie

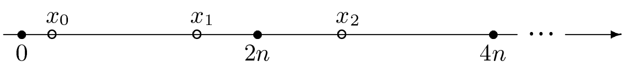
Bez straty ogólności możemy założyć, że rozważany okrąg ma długość $2n(n-1)$, zamiast 2π.

Wierzchołki $(n-1)$-kąta foremnego $A_0A_1\ldots A_{n-2}$ dzielą dany okrąg na $n-1$ łuków, każdy długości $2n$. Na mocy zasady szufladkowej, pewne dwa kolejne wierzchołki n-kąta foremnego $B_0B_1\ldots B_{n-1}$ leżą w jednym z tych łuków. Bez straty ogólności możemy więc przyjąć, że punkty B_0, B_1 leżą na łuku A_0A_1, przy czym $A_0B_0 < A_0B_1$ oraz $A_0B_0 \leqslant B_1A_1$ (rys. 1).



rys. 1

Rozetnijmy dany okrąg w punkcie A_0 i rozłóżmy go na osi liczbowej tak, aby punkty $A_0, A_1, A_2, \ldots$ pokryły się odpowiednio ze współrzędnymi $0, 2n, 4n, \ldots$ (rys. 2). Wówczas punkty $B_0, B_1, B_2, \ldots$ pokryją się odpowiednio ze współrzędnymi $x_0, x_1, x_2, \ldots$, gdzie $x_k = x_0 + 2k(n-1)$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$.



rys. 2

Niżej udowodnimy, że:

(a) jeżeli $1 \leqslant k \leqslant n/2$, to punkt B_k leży między A_{k-1} a A_k, bliżej A_k;
(b) jeżeli $n/2 < k \leqslant n-1$, to punkt B_k leży między A_{k-1} a A_k, bliżej A_{k-1}.

Zatem jeżeli $1 \leqslant k \leqslant n/2$, to odległość od punktu B_k do najbliższego wierzchołka n-kąta $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ wynosi $2kn - x_k = 2k - x_0$; w przeciwnym razie odległość ta wynosi $x_k - (2k-2)n = x_0 - 2k + 2n$. Stąd

$$S = x_0 + \sum_{k=1}^{n/2}(2k - x_0) + \sum_{k=n/2+1}^{n-1}(x_0 - 2k + 2n) = \sum_{k=1}^{n/2} 2k + \sum_{k=n/2+1}^{n-1}(2n - 2k),$$

co jest wielkością zależną tylko od n.

Pozostało udowodnić zdania (a) oraz (b).

Na mocy poczynionych założeń otrzymujemy $0 \leqslant 2x_0 \leqslant x_0 + (2n - x_1) = 2$, skąd w szczególności

$$\begin{aligned} 2k - n \leqslant x_0 \leqslant 2k \qquad & \text{dla} \quad 1 \leqslant k \leqslant n/2, \\ 2k - 2n \leqslant x_0 \leqslant 2k - n \qquad & \text{dla} \;\; n/2 < k \leqslant n. \end{aligned}$$

Ponieważ $x_k = x_0 + 2k(n-1)$, więc dostajemy

$$\begin{aligned} (2k-1)n \leqslant x_k \leqslant 2kn \qquad & \text{dla} \quad 1 \leqslant k \leqslant n/2, \\ (2k-2)n \leqslant x_k \leqslant (2k-1)n \qquad & \text{dla} \;\; n/2 < k \leqslant n. \end{aligned}$$

Nierówności te są równoważne odpowiednio zdaniom (a) oraz (b).

æ

Zadanie **11.** Niech a, b, c będą długościami boków pewnego trójkąta, zaś R — promieniem okręgu opisanego na nim. Udowodnić, że

$$R \geqslant \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}\,. \tag{1}$$

Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy kąty naprzeciwko boków a, b, c odpowiednio przez A, B, C. Na mocy twierdzenia sinusów $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$. Podstawiając powyższe zależności do nierówności (1) sprowadzamy ją do nierówności:

$$R \geqslant \frac{4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B)}{2\sqrt{8R^2(\sin^2 A+\sin^2 B)-4R^2\sin^2 C}}\,.$$

Przekształcając równoważnie ostatnią nierówność dostajemy kolejno:

$$\begin{aligned}&2(\sin^2 A+\sin^2 B)-\sin^2 C \geqslant (\sin^2 A+\sin^2 B)^2,\\&(\sin^2 A+\sin^2 B)(2-\sin^2 A-\sin^2 B) \geqslant \sin^2 C,\\&(\sin^2 A+\sin^2 B)(\cos^2 A+\cos^2 B) \geqslant \sin^2 C.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności Schwarza (p. *Dodatek*, „Nierówność Schwarza”, str. 112):

$$(\sin^2 A+\sin^2 B)(\cos^2 B+\cos^2 A) \geqslant (\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A)^2=\sin^2 C. \tag{2}$$

Dowód nierówności (1) jest więc zakończony.

W nierówności (1) zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość w nierówności (2). To natomiast jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista λ, że

$$\sin A=\lambda\cos B \qquad \text{oraz} \qquad \sin B=\lambda\cos A. \tag{3}$$

Z powyższych związków wynika, że $\lambda>0$ oraz że kąty A, B są ostre. Mnożąc stronami równości (3) otrzymujemy $\sin 2A=\sin 2B$. To oznacza, że $2A=2B$ lub $2A+2B=\pi$, czyli $A=B$ lub $A+B=\pi/2$.

Również odwrotnie: jeśli $A=B$, to zależność (3) jest spełniona dla dowolnej liczby dodatniej λ. Jeśli natomiast $A+B=\pi/2$, to związki (3) są prawdziwe dla $\lambda=1$. Zatem w obu przypadkach istnieje taka liczba $\lambda>0$, że spełnione są obie równości (3).

Reasumując: w nierówności (1) zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$ lub $C=\pi/2$.

Sposób II

Oznaczmy przez A, B, C wierzchołki leżące odpowiednio naprzeciwko boków a, b, c. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zaś niech M będzie środkiem boku AB (rys. 1).

Długość środkowej m_c poprowadzonej do boku c spełnia zależność

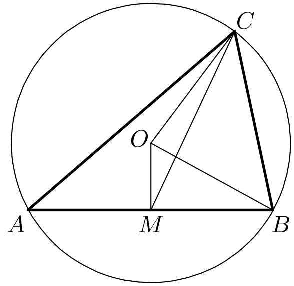
$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \tag{4}$$

Zatem nierówność (1) można przepisać w następującej, równoważnej formie: $4Rm_c \geqslant a^2 + b^2$. Ze związku (4) wyliczamy wielkość $a^2 + b^2$ i podstawiamy ją do ostatniej nierówności. W ten sposób nierówność, którą mamy udowodnić, sprowadza się do zależności $8Rm_c \geqslant 4m_c^2 + c^2$.

Tę nierówność z kolei traktujemy jako nierówność kwadratową z „niewiadomą" m_c i „parametrami" R, c. Rozwiązując ją dostajemy równoważną formę nierówności (1):

$$|m_c - R| \leqslant \sqrt{R^2 - (c/2)^2},$$

czyli $|MC - OC| \leqslant OM$. Otrzymaliśmy nierówność trójkąta zastosowaną do trójkąta COM, a więc tym samym udowodniliśmy nierówność (1).



rys. 1

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkty C, O, M są współliniowe. To zaś jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BC$ lub $O = M$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$ lub $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Zadanie **12.** W trójkącie ABC zachodzi $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Punkt D leży na boku BC i $\sphericalangle BDA = 2\sphericalangle BAD$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}\right).$$

Rozwiązanie

Sposób I

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Oznaczmy przez E punkt przecięcia prostej AD z tym okręgiem (rys. 1).

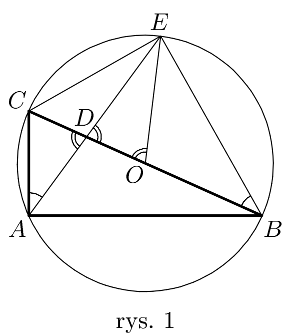
Wówczas $\sphericalangle BOE = 2\sphericalangle BAE = \sphericalangle CDE$, co dowodzi, że $DE = OE$. Na mocy podobieństwa trójkątów ADC i BDE otrzymujemy

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{DE}.$$

Stąd

$$\frac{AD}{BD} + \frac{AD}{CD} = \frac{BC}{DE} = \frac{BC}{OE} = 2,$$

co należało udowodnić.



rys. 1

Sposób II

Oznaczmy: $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle CAD$. Z danych w treści zadania wynika, że $\sphericalangle BDA = 2\alpha$, $\sphericalangle CDA = 2\beta$. Z twierdzenia sinusów wynika, że

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AD}{CD} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}.$$

Korzystając z tożsamości

$$\sin 3\varphi = \sin\varphi\cos 2\varphi + \cos\varphi\sin 2\varphi = \sin\varphi(\cos 2\varphi + 2\cos^2\varphi)$$

oraz równości $\alpha + \beta = 90^\circ$ otrzymujemy

$$\frac{AD}{BD} + \frac{AD}{CD} = (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = 0 + 2 = 2,$$

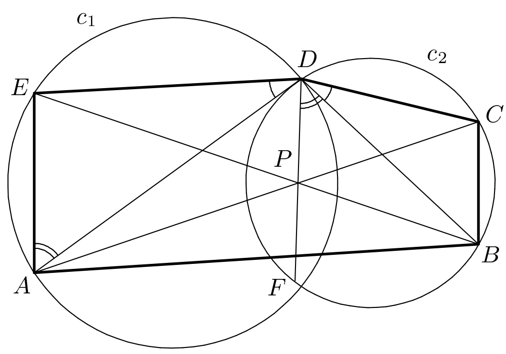
co kończy dowód danej tożsamości.

Zadanie **13.** W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BDP$ oraz $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ADP$.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech c_1 i c_2 będą odpowiednio okręgami opisanymi na trójkątach AED i BCD. Załóżmy, że prosta DP przecina okrąg c_2 w punkcie F (rys. 1).



rys. 1

Ponieważ $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$, więc stosunek długości odcinków EA i BC jest równy stosunkowi długości okręgów c_1 i c_2. Zatem jednokładność o środku P, przekształcająca odcinek AE na odcinek CB, przekształca okrąg c_1 na okrąg c_2. Ta sama jednokładność przeprowadza łuk DE okręgu c_1 na łuk FB okręgu c_2. Stąd wynika, że $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BDF = \sphericalangle BDP$.

Drugą równość otrzymujemy analogicznie.

Sposób II

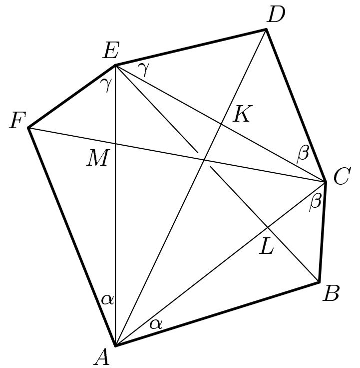
Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

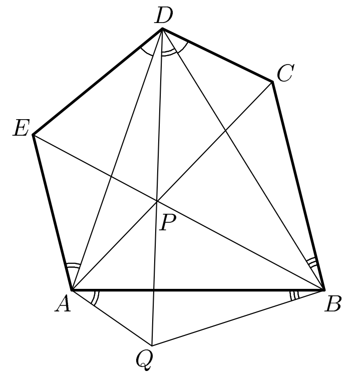
Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Czworokąty $ABCE$, $CDEA$, $EFAC$ są wypukłe oraz zachodzą równości:

$$\sphericalangle EAF = \sphericalangle CAB = \alpha, \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle ECD = \beta, \quad \sphericalangle CED = \sphericalangle AEF = \gamma.$$

Wówczas przekątne AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie (rys. 2).



rys. 2



rys. 3

Dowód

Przez $[XYZ]$ będziemy oznaczać pole trójkąta XYZ.

Niech K, L, M będą odpowiednio punktami przecięcia następujących par odcinków: AD,EC; BE,CA; CF,AE (rys. 2). Dostajemy równości:

$$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CK}{KE}\cdot\frac{EM}{MA} = \frac{[ABE]}{[CBE]}\cdot\frac{[CDA]}{[EDA]}\cdot\frac{[EFC]}{[AFC]} = \frac{[ABE]}{[AFC]}\cdot\frac{[CDA]}{[CBE]}\cdot\frac{[EFC]}{[EDA]} =$$

$$= \frac{AB\cdot AE}{AF\cdot AC}\cdot\frac{CD\cdot CA}{CB\cdot CE}\cdot\frac{EF\cdot EC}{ED\cdot EA} = \frac{AB}{CB}\cdot\frac{CD}{ED}\cdot\frac{EF}{AF} =$$

$$= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 1.$$

(Pierwsza równość wynika z twierdzenia Talesa oraz z faktu, że stosunek pól trójkątów o wspólnej podstawie jest równy stosunkowi wysokości opuszczonych na tę podstawę. Trzecia równość to zastosowanie wzoru

$$[XYZ] = \tfrac{1}{2} XY\cdot XZ\cdot \sin\sphericalangle YXZ.$$

Piątą równość otrzymujemy z twierdzenia sinusów). Na mocy twierdzenia Cevy (p. str. 120) odcinki AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Na boku AB danego pięciokąta $ABCDE$ budujemy (po jego zewnętrznej stronie) trójkąt ABQ tak, aby $\sphericalangle QAB = \sphericalangle EAD$ oraz $\sphericalangle QBA = \sphericalangle CBD$

(rys. 3). Na mocy lematu, zastosowanego do sześciokąta $AQBCDE$, punkty D, P, Q są współliniowe. Ponieważ odcinki AE i BC są równoległe, więc

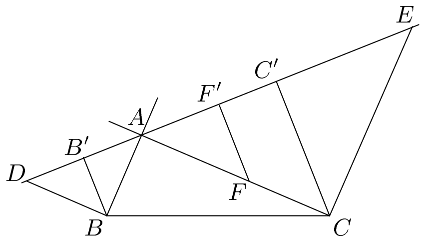
$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle EAD + \sphericalangle CBD = \sphericalangle QAB + \sphericalangle QBA = 180^\circ - \sphericalangle AQB.$$

Zatem na czworokącie $AQBD$ da się opisać okrąg, stąd $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BAQ = \sphericalangle BDQ = \sphericalangle BDP$. Drugą równość dostajemy analogicznie.

Zadanie **14.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Prosta przechodząca przez B i równoległa do AC przecina dwusieczną kąta zewnętrznego $\sphericalangle BAC$ w punkcie D. Prosta przechodząca przez C i równoległa do AB przecina tę dwusieczną w punkcie E. Punkt F leży na boku AC i spełniona jest równość $FC = AB$. Udowodnić, że $DF = FE$.

Rozwiązanie

Ponieważ proste BD i AC są równoległe oraz AD jest dwusieczną kąta zewnętrznego BAC, więc $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BDA = \alpha$. Stąd $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CEA = \alpha$. Również $AB = BD$ oraz $AC = CE$. Niech B', C', F' będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B, C, F na prostą DE (rys. 1).



rys. 1

Z warunku $FC = AB$ wynika, że $AB + AF = AC$, skąd dostajemy równości: $B'F' = (AB + AF)\cos\alpha = AC\cos\alpha = AC' = C'E$. Ponadto $DB' = BD\cos\alpha = FC\cos\alpha = F'C'$. Zatem $DF' = F'E$, czyli $DF = FE$.

Zadanie **15.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na bok BC. Punkt E leży na odcinku AD i spełnione jest równanie

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

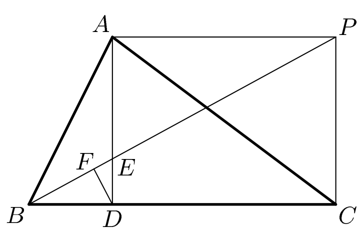
Punkt F jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D na bok BE. Udowodnić, że $\sphericalangle AFC = 90^\circ$.

Rozwiązanie

Niech P będzie takim punktem, że czworokąt $ADCP$ jest prostokątem (rys. 1). Wówczas

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB} = \frac{AP}{DB},$$

co dowodzi, że punkty B, E, P są współliniowe. Stąd $\sphericalangle DFP = 90^\circ$, co oznacza, że punkt F



rys. 1

leży na okręgu opisanym na prostokącie $ADCP$. Zatem

$$\sphericalangle AFC = \sphericalangle ADC = 90^\circ.$$

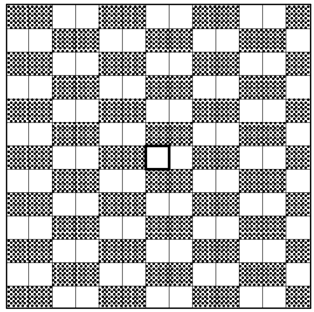
Zadanie **16.** Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 czterdziestoma dwoma klockami o wymiarach 4×1 w taki sposób, że tylko środkowe pole szachownicy pozostanie nie zakryte? (Zakładamy, że każdy klocek zakrywa cztery pełne pola szachownicy).

Rozwiązanie

Nie można.

Sposób I

Pokolorujmy daną szachownicę tak jak na rysunku 1. Każdy klocek o wymiarach 4×1, położony pionowo lub poziomo, przykrywa dokładnie dwa pokolorowane i dwa niepokolorowane pola. Środkowe pole jest niepokolorowane. Gdyby więc żądane pokrycie istniało, to liczba pól pokolorowanych danej szachownicy musiałaby być o 1 *mniejsza* niż liczba pól niepokolorowanych.



rys. 1

Jednak bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że jest odwrotnie: pól pokolorowanych jest 85, zaś niepokolorowanych 84. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Sposób II

Ponumerujmy pola szachownicy jak na rysunku 2. Wówczas każdy klocek 4×1 położony na szachownicy przykrywa 4 pola z różnymi numerami.

Cała szachownica zawiera po 42 pola z liczbami 2, 3 i 4 oraz 43 pola z liczbą 1. Po usunięciu środkowego pola pozostanie tylko 41 pól z liczbą 4, nie można więc umieścić 42 klocków na szachownicy bez pokrycia tego pola.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

rys. 2

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

rys. 3

Uwaga

Bardziej narzucające wydaje się ponumerowanie pól szachownicy w sposób pokazany na rysunku 3. W wielu zadaniach olimpijskich o pokrywaniu szachownicy właśnie takie ponumerowanie rozstrzyga, czy daną szachownicę da się pokryć odpowiednimi kostkami. Jednak w tym przypadku ponumerowanie z rysunku 3 do niczego nie prowadzi: po usunięciu środkowego pola na szachownicy pozostaną po 42 pola z każdą z liczb 1, 2, 3, 4.

Zadanie **17.** Niech n i k będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Danych jest nk przedmiotów (tych samych rozmiarów) i k pudełek, z których każde pomieści n przedmiotów. Każdy przedmiot jest pokolorowany jednym z k różnych kolorów. Wykazać, że można rozmieścić te przedmioty w pudełkach w taki sposób, że w każdym pudełku znajdą się przedmioty w co najwyżej dwóch kolorach.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem k. Dla $k=1$ teza jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy więc, że żądane rozmieszczenie jest możliwe dla pewnego k; wykażemy, że można rozmieścić przedmioty, gdy kolorów i pudełek jest $k+1$.

Ponieważ wszystkich przedmiotów jest $n(k+1)$, więc przedmiotów pewnego koloru (powiedzmy białego) jest co najwyżej n. Z tego samego powodu przedmiotów pewnego innego koloru (na przykład czarnego) jest co najmniej n. Wkładamy do pudełka wszystkie przedmioty białe oraz uzupełniamy wolne miejsce przedmiotami czarnymi. W pudełku tym znajduje się więc n przedmiotów co najwyżej dwóch kolorów. Pozostało do wypełnienia k pudełek nk przedmiotami k kolorów (białych przedmiotów już nie ma), a to na mocy założenia indukcyjnego jest wykonalne.

Zadanie **18.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieje zbiór S o następujących własnościach:

(i) S składa się z n liczb całkowitych dodatnich, z których wszystkie są mniejsze od 2^{n-1};

(ii) dla dowolnych dwóch różnych niepustych podzbiorów A i B zbioru S suma elementów zbioru A jest różna od sumy elementów zbioru B.

Rozwiązanie

Dla $n=1$ lub $n=2$ nie istnieje zbiór S mający własność (i). Dla $n=3$ jedynym zbiorem S spełniającym warunek (i) jest zbiór $\{1,2,3\}$, jednak on nie spełnia warunku (ii).

Dla $n=4$ przykładem zbioru o własnościach (i) oraz (ii) jest $S=\{3,5,6,7\}$. Dla dowolnego $n>4$ można skonstruować indukcyjnie zbiór S, spełniający warunki (i) oraz (ii), korzystając z następującego faktu:

Jeżeli $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ *jest zbiorem spełniającym warunki* (i), (ii) *dla pewnego* n*, to zbiór* $S^*=\{1,2a_1,2a_2,\ldots,2a_n\}$ *spełnia warunki* (i), (ii) *dla* $n+1$.

Istotnie, na mocy własności (i) zbioru S, każdy element zbioru S^* jest mniejszy od 2^n. Zbiór S^* ma więc własność (i). Jeśli teraz A, B są dowolnymi rozłącznymi podzbiorami zbioru S^*, przy czym żaden z nich nie zawiera 1, to sumy elementów tych zbiorów są różne (na mocy własności (ii) zbioru S). Jeśli natomiast jeden z podzbiorów A, B (na przykład A) zawiera 1, to suma elementów zbioru A jest nieparzysta, zaś zbioru B — parzysta; wielkości te są więc różne. To dowodzi, że zbiór S^* ma również własność (ii).

Odpowiedź: Zbiór S o żądanych własnościach istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $n\geqslant 4$.

Zadanie **19.** Rozważmy mecz ping-ponga między dwiema drużynami, z których każda składa się z 1000 graczy. Każdy gracz grał przeciwko każdemu z graczy przeciwnej drużyny dokładnie raz (w ping-pongu nie ma remisów). Udowodnić, że istnieje dziesięciu graczy z jednej drużyny takich, że każdy z graczy drużyny przeciwnej przegrał z co najmniej jednym z tych dziesięciu graczy.

Rozwiązanie

Rozważmy najpierw mecz ping-ponga, w którym uczestniczą dwie inne drużyny: jedna składająca się z m zawodników, a druga z n. Wówczas *w jednej z tych drużyn istnieje zawodnik, który wygrał z co najmniej połową zawodników drużyny przeciwnej*.

Dowód: Przypuśćmy, że każdy zawodnik wygrał z mniej niż połową graczy drużyny przeciwnej. Wtedy liczba zwycięstw jednej drużyny jest mniejsza niż $m\cdot n/2$; zaś drugiej jest mniejsza niż $n\cdot m/2$. Zatem łączna liczba zwycięstw w meczu jest *mniejsza* niż $m{\cdot}n$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż łączna liczba wszystkich zwycięstw jest równa liczbie wszystkich rozgrywek, czyli $m{\cdot}n$.

Powracamy do drużyn 1000-osobowych.

Zawodnika, który wygrał z co najmniej 500 graczami drużyny przeciwnej, odznaczamy medalem (taki istnieje, na mocy powyższych rozważań), a wszystkich tych, którzy z nim przegrali, odsyłamy do domu. Po tej redukcji postępujemy analogicznie: znajdujemy zawodnika (być może z tej samej drużyny, co poprzednio), który wygrał z co najmniej połową graczy drużyny przeciwnej, dajemy mu medal, a tych, którzy z nim przegrali, odsyłamy do domu. Postępowanie to kontynuujemy do momentu, gdy ostatni zawodnik którejś z drużyn (nazwijmy ją A) pojedzie do domu. Niech B będzie drużyną przeciwną do A, a więc tą, której część nie została odesłana do domu. Zawodników w drużynie A było $1000<2^{10}$. Przy każdej redukcji drużyny A liczba jej zawodników malała o co najmniej połowę, co oznacza, że zawodnicy drużyny A byli odsyłani do domu co najwyżej dziesięciokrotnie. Tym samym co najwyżej dziesięciu zawodników drużyny B dostało medal. Pozostaje zauważyć, że każdy zawodnik drużyny A przegrał z pewnym medalistą drużyny B.

Zadanie **20.** Powiemy, że liczba całkowita dodatnia m *pokrywa* liczbę 1998, jeśli 1, 9, 9, 8 pojawiają się w tej właśnie kolejności jako cyfry m. (Na przykład 1998 jest pokrywana przez 2**1**5**9**9**3**6**98**, ale nie przez 213326798). Niech $k(n)$ oznacza liczbę tych liczb całkowitych dodatnich, które pokrywają 1998 i mają dokładnie n cyfr ($n \geqslant 5$), z których wszystkie są różne od 0. Jaką resztę z dzielenia przez 8 daje $k(n)$?

Rozwiązanie

Niech $1 \leqslant g < h < i < j \leqslant n$ będą ustalonymi liczbami całkowitymi. Rozważmy wszystkie takie liczby n-cyfrowe $a = \overline{a_1 \ldots a_n}$, o cyfrach różnych od 0, że

(1)
$$\begin{array}{llll} a_g = 1, & a_i = 9, & a_\ell \neq 1 \text{ dla } \ell < g; & a_\ell \neq 9 \text{ dla } h < \ell < i; \\ a_h = 9, & a_j = 8, & a_\ell \neq 9 \text{ dla } g < \ell < h; & a_\ell \neq 8 \text{ dla } i < \ell < j. \end{array}$$

(Powyższy warunek oznacza, że spośród tych czwórek „1,9,9,8”, które pokrywają liczbę a, czwórka pokrywająca tę liczbę na miejscach g, h, i, j jest usytuowana najbardziej na lewo).

Wszystkich liczb spełniających warunek (1) jest

(2)
$$8^{g-1} \cdot 8^{h-g-1} \cdot 8^{i-h-1} \cdot 8^{j-i-1} \cdot 9^{n-j}.$$

Wyrażenie to daje resztę 1 z dzielenia przez 8 dla $g = 1$, $h = 2$, $i = 3$, $j = 4$ oraz jest podzielne przez 8 dla wszystkich innych układów $1 \leqslant g < h < i < j \leqslant n$.

Liczbę $k(n)$ otrzymujemy dodając wyrażenie (2) po wszystkich możliwych wyborach liczb $1 \leqslant g < h < i < j \leqslant n$. Zatem liczba $k(n)$ z dzielenia przez 8 daje resztę **1**. æ

DODATEK [2]

A. Rozwiązywanie rekurencji liniowych

Rozważamy ciągi spełniające równanie rekurencyjne

$$c_{n+2}=ac_{n+1}+bc_n \qquad (n\geqslant 0), \tag{1}$$

gdzie a, b są danymi liczbami rzeczywistymi. Chcielibyśmy umieć rozwiązać równanie rekurencyjne (1), tzn. wypisać wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu c_n, znając wartości początkowe c_0 i c_1. Okazuje się, że istnieje ogólna metoda pozwalająca rozwiązywać równania rekurencyjne postaci (1). Zilustrujemy ją trzema przykładami.

Przykład 1.

Wyznaczymy wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu (c_n) danego wzorami

$$c_0=5, \quad c_1=13, \qquad c_{n+2}=2c_{n+1}+3c_n \quad (n\geqslant 0). \tag{2}$$

(Ciąg $d_n=c_{n-1}$ pojawił się w rozwiązaniu zadania 2 z *XXI Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych*, zob. str. 76).

Zapominamy na chwilę o danych wartościach początkowych c_0, c_1 i staramy się znaleźć jak najwięcej ciągów c_n, które spełniają dane równanie rekurencyjne. Najpierw szukamy niezerowych ciągów geometrycznych postaci $c_n=x^n$, dla których spełnione jest dane równanie rekurencyjne. Liczba $x\neq 0$ musi więc dla dowolnego $n\geqslant 0$ spełniać równanie

$$x^{n+2}=2x^{n+1}+3x^n, \qquad \text{czyli} \qquad x^2=2x+3.$$

Otrzymane równanie nazywamy *równaniem charakterystycznym* równania rekurencyjnego (2). Rozwiązując je uzyskujemy $x_1=3$, $x_2=-1$. Zatem ciągi geometryczne $c_n=3^n$ oraz $c_n=(-1)^n$ spełniają dane równanie rekurencyjne. Stąd wynika, że dla dowolnych liczb α, β, ciąg postaci

$$c_n=3^n\alpha+(-1)^n\beta$$

również spełnia nasze równanie rekurencyjne. Pozostało dobrać tak liczby α, β, aby $c_0=5$ oraz $c_1=13$. W tym celu układamy układ równań

$$\begin{cases} \alpha+\beta=c_0=5 \\ 3\alpha-\beta=c_1=13, \end{cases}$$

skąd otrzymujemy $\alpha=\frac{9}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$. Zatem wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu c_n określonego warunkami (2) wygląda następująco:

$$c_n=\tfrac{9}{2}\cdot 3^n+\tfrac{1}{2}\cdot(-1)^n=\tfrac{1}{2}(3^{n+2}+(-1)^{n+2}).$$

* * *

[2]Opracowali *Waldemar Pompe* i *Jarosław Wróblewski.*

Przykład 2.

Tym razem wyznaczymy wzór na n-ty wyraz ciągu c_n danego wzorami

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 2, \qquad c_{n+2} = -2c_{n+1} - 2c_n \quad (n \geqslant 0). \tag{3}$$

Podobnie jak poprzednio, staramy się znaleźć niezerowe ciągi geometryczne postaci $c_n = x^n$ spełniające powyższe równanie rekurencyjne. W tym celu podstawiamy powyższą równość do danego równania rekurencyjnego otrzymując jego równanie charakterystyczne:

$$x^2 = -2x - 2. \tag{4}$$

Niestety, powyższe równanie *nie ma* rozwiązań rzeczywistych, a więc nie istnieją niezerowe rzeczywiste ciągi geometryczne spełniające równanie rekurencyjne (3). Jednak wiemy, że istnieją *zespolone* rozwiązania równania (4) dane wzorami $x_1 = 1 - i$ oraz $x_2 = 1 + i$, dzięki czemu możemy kontynuuować naszą metodę przy użyciu liczb zespolonych.

Ciągi $c_n = (1-i)^n$ oraz $c_n = (1+i)^n$ spełniają nasze równanie rekurencyjne. Stąd dla dowolnych liczb zespolonych α, β, ciąg c_n dany wzorem

$$c_n = (1-i)^n \alpha + (1+i)^n \beta$$

również spełnia dane równanie rekurencyjne.

Pozostało wyznaczyć takie liczby (zespolone) α, β, dla których $c_0 = 0$, $c_1 = 2$. Podobnie jak poprzednio, układamy i rozwiązujemy odpowiedni układ równań, skąd dostajemy $\alpha = i$, $\beta = -i$. Zatem wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu c_n danego wzorami (3) wynosi

$$c_n = (1-i)^n i - (1+i)^n i.$$

Ponieważ ciąg c_n składa się z wyrazów rzeczywistych, więc chcielibyśmy tak przekształcić powyższy wzór, aby wyeliminować z niego liczby zespolone. W tym celu skorzystamy ze wzoru de Moivre'a:

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + \sin nt,$$

gdzie n jest liczbą naturalną, a t rzeczywistą. Mamy bowiem:

$$\begin{aligned}(1-i)^n &= (\sqrt{2})^n \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^n = (\sqrt{2})^n \cdot \left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right)^n = \\ &= (\sqrt{2})^n \cdot \left(\cos\left(-\tfrac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\tfrac{n\pi}{4}\right)\right) = (\sqrt{2})^n \cdot \left(\cos\left(\tfrac{n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy, że

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \cdot \left(\cos\left(\tfrac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)\right).$$

Stąd otrzymujemy

$$c_n = (\sqrt{2})^{n+2} \cdot \sin\left(\tfrac{n\pi}{4}\right).$$

*　　　*　　　*

Przykład 3.

Wyznaczymy z kolei wzór na n-ty wyraz ciągu c_n danego wzorami

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -4, \qquad c_{n+2} = 4c_{n+1} - 4c_n \quad (n \geqslant 0). \tag{5}$$

Tak jak w poprzednich dwóch przykładach, szukamy niezerowych ciągów geometrycznych postaci $c_n = x^n$, spełniających dane równanie rekurencyjne. Tym razem układając i rozwiązując odpowiednie równanie charakterystyczne, widzimy, że ma ono jeden podwójny pierwiastek: $x_1 = x_2 = 2$. Zatem istnieje tylko jeden ciąg geometryczny $c_n = 2^n$ spełniający dane równanie rekurencyjne. Aby ułożyć odpowiedni układ równań i wykorzystać warunki początkowe, musimy znaleźć drugi, „całkiem inny" ciąg spełniający nasze równanie rekurencyjne. Jak Czytelnik bez trudu sprawdzi, ciąg $c_n = n2^n$ spełnia dane równanie rekurencyjne. (Ogólnie: jeśli x_1 jest pierwiastkiem *podwójnym* równania charakterystycznego, to ciągi x_1^n oraz nx_1^n spełniają dane równanie rekurencyjne).

Pozostało kontynuować jak w poprzednich przykładach: Dla dowolnych liczb rzeczywistych α, β, ciąg

$$c_n = 2^n\alpha + n2^n\beta$$

spełnia dane równanie rekurencyjne. Wykorzystując wartości początkowe c_0, c_1, układamy i rozwiązujemy odpowiedni układ równań, skąd otrzymujemy $\alpha = 1$, $\beta = -3$. Zatem wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu c_n danego wzorami (5) ma postać

$$c_n = (1 - 3n) \cdot 2^n.$$

Podsumowanie, zarys ogólnej metody

Mamy nadzieję, że powyższe przykłady wyczerpująco ilustrują przedstawioną metodę. Jednak dla wygody Czytelnika naszkicujemy na koniec krótko algorytm postępowania w ogólnym przypadku.

Chcemy rozwiązać równanie rekurencyjne postaci (1), gdy znane są liczby a, b oraz wartości początkowe c_0, c_1. Zastanawiamy się najpierw, jakie niezerowe ciągi geometryczne postaci $c_n = x^n$ (być może o wyrazach zespolonych) spełniają równanie (1). W tym celu podstawiamy powyższą równość do związku (1) otrzymując równanie

$$x^{n+2} = ax^{n+1} + bx^n ,$$

które sprowadza się do $x^2 = ax + b$. Równanie to nazywamy *równaniem charakterystycznym równania rekurencyjnego* (1). Jeżeli x_1 i x_2 są pierwiastkami tego równania, to ciągi geometryczne o ilorazach x_1 i x_2 spełniają równanie (1). Nie jest istotne, czy x_1 i x_2 są rzeczywiste czy zespolone.

Możliwe są następujące dwa przypadki:

(a) *Liczby x_1 i x_2 są różne*

Wówczas dwa różne ciągi geometryczne $c_n = x_1^n$ oraz $c_n = x_2^n$ spełniają dane równanie rekurencyjne. Ciągi te nazywamy *ciągami bazowymi równania rekurencyjnego* (1). Zależność (1) jest więc spełniona przez wszystkie ciągi postaci

$$c_n = x_1^n\alpha + x_2^n\beta, \tag{6}$$

gdzie α, β są dowolnymi liczbami zespolonymi. Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu rekurencyjnego są wyznaczone przez wartości początkowe c_0 i c_1, staramy się tak dopasować liczby α i β, aby równanie (6) było spełnione dla $n=0$ i $n=1$. Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{cases} \alpha + \beta = c_0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = c_1, \end{cases}$$

który ma zawsze rozwiązanie:

$$\alpha = \frac{c_1 - x_2 c_0}{x_1 - x_2}, \qquad \beta = \frac{x_1 c_0 - c_1}{x_1 - x_2}.$$

(b) *Liczby x_1 i x_2 są równe*

Jeśli $x_1 = x_2 = 0$, to $a = b = 0$, skąd $c_n = 0$ dla dowolnego $n \geqslant 0$.

Przyjmijmy więc, że $x_1 = x_2 = y \neq 0$. Wówczas równanie (1) jest spełnione przez dwa ciągi: $c_n = y^n$ oraz $c_n = ny^n$. Ciągi te nazywamy *ciągami bazowymi równania rekurencyjnego* (1). Kontynuujemy jak w przypadku (a): Zauważamy, że zależność (1) jest spełniona przez wszystkie ciągi postaci

$$c_n = y^n\alpha + ny^n\beta, \tag{7}$$

gdzie α, β są dowolnymi liczbami zespolonymi. Następnie szukamy takich liczb α, β, aby równanie (7) było spełnione dla $n=0$ i $n=1$. Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{cases} \alpha = c_0 \\ y\alpha + y\beta = c_1, \end{cases}$$

który ma zawsze rozwiązanie:

$$\alpha = c_0, \qquad \beta = \frac{c_1 - yc_0}{y}\ .$$

Uwaga

Podobnie postępujemy w przypadku równań rekurencyjnych wyższego rzędu, tzn. w przypadku równań postaci

$$c_{n+k} = a_1 c_{n+k-1} + a_2 c_{n+k-2} + \ldots + a_k c_n \qquad (k \geqslant 2),$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oraz $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ są znanymi liczbami rzeczywistymi.

Pierwiastki wielokrotne wielomianu charakterystycznego traktujemy następująco: Jeżeli x_i jest m-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to odpowiadającymi mu bazowymi ciągami rekurencyjnymi są ciągi $(n^j x_i^n)$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

B. Dwustosunek i biegunowa

Dwustosunek i podział harmoniczny

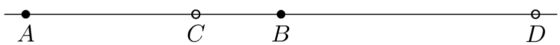
Dane są cztery różne punkty A, B, C, D leżące na jednej prostej. Wartość wyrażenia

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

nazywamy *dwustosunkiem czwórki punktów* A, B, C, D i oznaczamy przez $(A,B;C,D)$. Wprost z definicji wynikają następujące równości:

$$(A,B;C,D) = (D,C;B,A) \qquad \text{oraz} \qquad (A,B;C,D) = \frac{1}{(B,A;C,D)}.$$

Zatem jeśli $(A,B;C,D) = 1$, to $(A,B;C,D) = (B,A;C,D) = (A,B;D,C) = 1$. W tym przypadku (tzn. gdy $(A,B;C,D) = 1$) punkt C nazywamy *sprzężonym harmonicznie do punktu D względem pary punktów* (A,B) (rys. 1).



rys. 1

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące wnioski:

(a) Jeżeli punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu D względem pary punktów (A,B), to punkt D jest sprzężony harmonicznie do punktu C względem tej samej pary.

(b) Jeżeli punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu D względem pary (A,B), to punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu D względem pary (B,A).

Z wniosków (a), (b) wynika, że w definicji sprzężenia harmonicznego punkty C, D, jak również punkty A, B, odgrywają symetryczne role. Z tego powodu, zamiast pisać: *punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu D względem pary* (A,B), możemy napisać: *punkty C i D są sprzężone harmonicznie do siebie względem punktów A, B*; czy też po prostu: *punkty C, D dzielą harmonicznie odcinek AB.*

(c) Jeżeli punkty C i D dzielą harmonicznie odcinek AB, to punkty A i B dzielą harmonicznie odcinek CD.

(d) Dla ustalonych punktów A, B, C istnieje dokładnie jeden punkt D, sprzężony harmonicznie do punktu C względem punktów A, B. Jeśli ponadto punkt C leży na odcinku AB, to punkt D, sprzężony harmonicznie do niego, znajduje się na zewnątrz odcinka AB.

Również odwrotnie: jeżeli punkt C leży na zewnątrz odcinka AB, to punkt D, sprzężony harmonicznie do C, leży pomiędzy punktami A, B.

* * *

Udowodnimy teraz twierdzenie mówiące o tym, że dwustosunek jest zachowywany przez rzut środkowy.

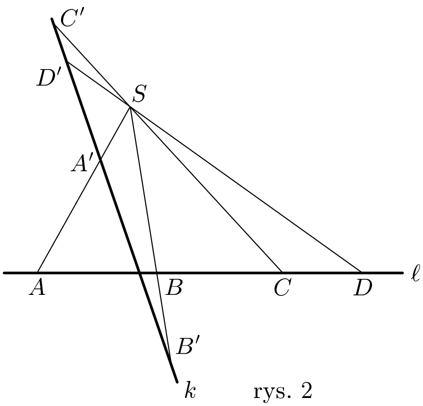
Twierdzenie 1.

Niech S będzie punktem, zaś ℓ prostą nie zawierającą punktu S. Różne punkty A, B, C, D leżą na prostej ℓ (rysunki 2 i 3). Prosta k nie przechodzi przez punkt S i przecina proste AS, BS, CS, DS odpowiednio w punktach A', B', C', D'. Wówczas

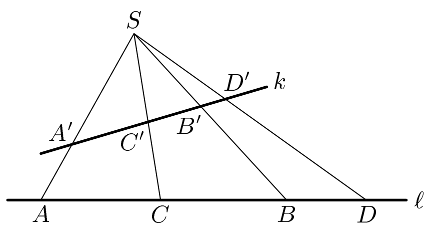
$$(A,B;C,D) = (A',B';C',D').$$

Dowód

Niech ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D będą czterema różnymi, ustalonymi prostymi przechodzącymi przez punkt S. Przyjmijmy, że prosta ℓ, nie przechodząca przez punkt S, przecina proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D odpowiednio w punktach A, B, C, D. Wystarczy dowieść, że wartość wyrażenia $(A,B;C,D)$ nie zależy od wyboru prostej ℓ.



rys. 2



rys. 3

Oznaczmy przez $[KLM]$ pole trójkąta KLM. Mamy następujące związki:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{[ACS]}{[BCS]} = \frac{\frac{1}{2}\, AS \cdot CS \cdot \sin\sphericalangle ASC}{\frac{1}{2}\, BS \cdot CS \cdot \sin\sphericalangle BSC} = \frac{AS}{BS} \cdot \frac{\sin\sphericalangle ASC}{\sin\sphericalangle BSC}.$$

Analogicznie:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{[ADS]}{[BDS]} = \frac{\frac{1}{2}\, AS \cdot DS \cdot \sin\sphericalangle ASD}{\frac{1}{2}\, BS \cdot DS \cdot \sin\sphericalangle BSD} = \frac{AS}{BS} \cdot \frac{\sin\sphericalangle ASD}{\sin\sphericalangle BSD}.$$

Dzieląc stronami powyższe równości uzyskujemy

$$(A,B;C,D)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{\sin\sphericalangle ASC}{\sin\sphericalangle BSC}:\frac{\sin\sphericalangle ASD}{\sin\sphericalangle BSD}.$$

Ponieważ $\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$ dla $0<\alpha<180^\circ$, więc wielkość po prawej stronie powyższej równości nie zależy od wyboru prostej ℓ. Dowód twierdzenia został więc zakończony.

* * *

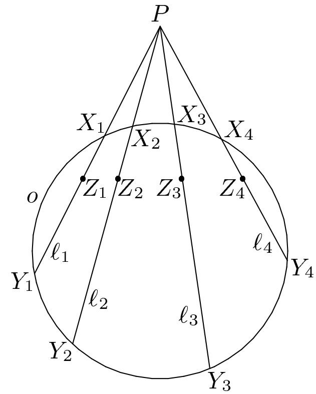
Biegunowa

Niech o będzie dowolnym okręgiem, zaś P dowolnym punktem leżącym na zewnątrz tego okręgu.

Przez punkt P prowadzimy prostą ℓ, która przecina okrąg o w punktach X, Y. Niech Z będzie punktem sprzężonym harmonicznie do punktu P względem punktów X, Y. Innymi słowy, punkt Z leży na odcinku XY i jest wyznaczony przez warunek

$$(X,Y;Z,P)=1, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{XZ}{YZ}=\frac{XP}{YP}.$$

Naszym celem jest wyznaczenie zbioru punktów Z przy ustalonym okregu o, ustalonym punkcie P oraz zmieniającej się prostej ℓ (rys. 4).



rys. 4

Jak podpowiada rysunek 4, zbiór punktów Z powinien leżeć na pewnej prostej. Udowodnimy teraz, że tak rzeczywiście jest.

Twierdzenie 2.

Niech proste PA, PB będą styczne do okręgu o odpowiednio w punktach A, B (rys. 5). Wówczas zbiorem wyżej zdefiniowanych punktów Z jest odcinek AB.

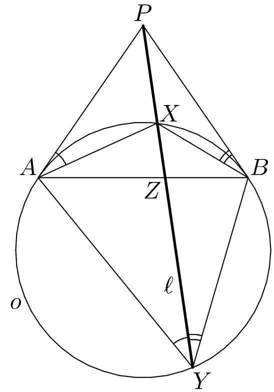
Prostą AB nazywamy *biegunową punktu P względem okręgu o* lub po prostu *biegunową*, gdy nie ma wątpliwości, któremu punktowi i okręgowi jest ona przyporządkowana.

Dowód

Niech ℓ będzie dowolną prostą przechodzącą przez punkt P i przecinającą okrąg o odpowiednio w punktach X, Y (rys. 5). Oznaczmy przez Z punkt przecięcia odcinków XY i AB. Położenie punktu sprzężonego harmonicznie do punktu P względem punktów X,Y jest wyznaczone jednoznacznie, zatem wystarczy dowieść, że $(X,Y;Z,P)=1$, tzn.

$$\frac{XZ}{YZ}=\frac{XP}{YP}. \tag{1}$$

Ponieważ $\sphericalangle PAX = \sphericalangle PYA$, więc trójkąty PAX i PYA są podobne. Mamy więc następujące tożsamości:



rys. 5

$$\text{(2)} \qquad \frac{XP}{YP} = \frac{[PAX]}{[PYA]} = \left(\frac{AX}{AY}\right)^2,$$

gdzie $[KLM]$ oznacza pole trójkąta KLM. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie otrzymujemy równość

$$\text{(3)} \qquad \frac{XP}{YP} = \left(\frac{BX}{BY}\right)^2.$$

Z równości (2) i (3) wynika następująca zależność:

$$\frac{AX}{AY} = \frac{BX}{BY}.$$

Ponieważ $\sphericalangle AXB = 180^\circ - \sphericalangle AYB$, więc otrzymujemy następujące związki:

$$\text{(4)} \qquad \left(\frac{AX}{AY}\right)^2 = \frac{AX}{AY}\cdot\frac{BX}{BY} = \frac{\frac{1}{2}\,AX\cdot BX\cdot \sin\sphericalangle AXB}{\frac{1}{2}\,AY\cdot BY\cdot \sin\sphericalangle AYB} = \frac{[AXB]}{[AYB]} = \frac{XZ}{YZ}.$$

Łącząc równości (3) i (4) dostajemy równość (1).

* * *

Twierdzenie 3.

Dwie różne proste przechodzące przez punkt P przecinają okrąg o odpowiednio w punktach X, Y oraz U, V (rys. 6 i 7). Wówczas:

(a) Przekątne czworokąta $XYVU$ przecinają się na biegunowej punktu P względem okręgu o;

(b) Proste XU, YV przecinają się na biegunowej punktu P względem okręgu o lub są równoległe do tej biegunowej.

Dowód

Udowodnimy najpierw zdania (a) oraz (b) przy założeniu, że $XU \nparallel YV$ (rys. 6).

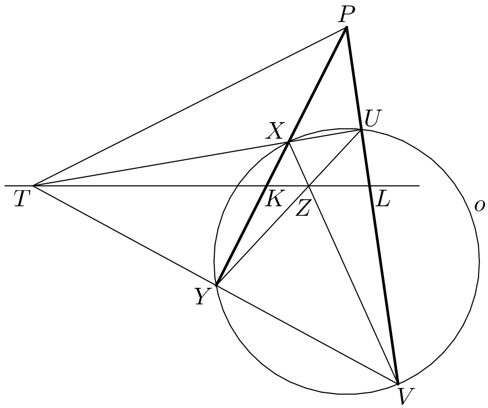
Niech Z będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $XYVU$ oraz niech proste XU, YV przecinają się w punkcie T. Przyjmijmy, że prosta TZ przecina proste XY, UV odpowiednio w punktach K, L.

Należy dowieść, że prosta TZ jest biegunową punktu P względem okręgu o. W tym celu wystarczy wykazać, że na prostej TZ znajdują się co najmniej dwa punkty z tej biegunowej. Udowodnimy, że tymi punktami są K oraz L. Tak więc powinniśmy dowieść, że $(X,Y;K,P) = (U,V;L,P) = 1$.

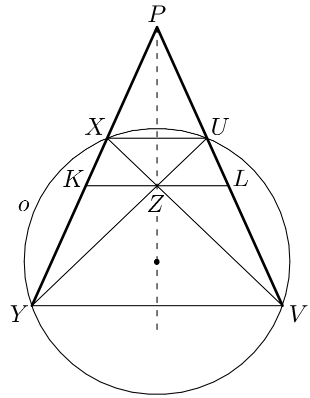
Na mocy twierdzenia 1 dostajemy następujące równości:

$$\text{(5)} \qquad (X,Y;K,P) = (V,U;L,P) = (Y,X;K,P) = \frac{1}{(X,Y;K,P)}\ ,$$

skąd $(X,Y;K,P)^2=1$ i w konsekwencji $(X,Y;K,P)=1$. Korzystając z równości (5) otrzymujemy $(U,V;L,P)=(X,Y;K,P)=1$, co dowodzi prawdziwości zdań (a) i (b) w przypadku, gdy $XU \nparallel YV$.



rys. 6



rys. 7

Pozostało udowodnić zdania (a) oraz (b) przy założeniu, że $XU \parallel YV$ (rys. 7).

Niech Z będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $XYVU$. Prosta równoległa do prostych XU i YV przecina odcinki XY, UV odpowiednio w punktach K, L.

Punkty X, K, Y są odpowiednio symetryczne do punktów U, L, V względem prostej łączącej punkt P ze środkiem okręgu o. Mamy więc następujące równości:

$$(X,Y;K,P)=(U,V;L,P)=(Y,X;K,P)=\frac{1}{(X,Y;K,P)}. \tag{6}$$

Zatem $(X,Y;K,P)=1$, skąd również $(U,V;L,P)=1$. Z dwóch ostatnich równości wynika, że prosta KL jest biegunową punktu P względem okręgu o. To dowodzi prawdziwości zdań (a) oraz (b) przy założeniu $XU \parallel YV$.

* * *

Jako zastosowanie powyższych twierdzeń, proponujemy Czytelnikowi następujące

Zadanie konstrukcyjne

Z danego punktu, leżącego na zewnątrz okręgu o, poprowadzić styczne do okręgu o posługując się jedynie linijką.

C. Nierówność Schwarza

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej n oraz liczb rzeczywistych $x_1,x_2,\dots,x_n$, $y_1,y_2,\dots,y_n$ prawdziwa jest nierówność

$$(1) \qquad x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2}\ ,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista $t \geqslant 0$, że $y_i = tx_i$ dla $i=1,2,\dots,n$.

Uwaga 1.

Z powyższego twierdzenia wynika nieco silniejsza nierówność, a mianowicie

$$(2) \qquad |x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2}\ .$$

Istotnie: jeżeli liczba $x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$ jest nieujemna, to nierówność (2) niczym się nie różni od nierówności (1). Jeśli natomiast powyższa suma jest liczbą ujemną, to wstawiając do zależności (1) liczby $-x_1,-x_2,\dots,-x_n$ odpowiednio w miejsce liczb $x_1,x_2,\dots,x_n$ dostajemy nierówność (2).

Nierówność (1) (jak również jej nieco mocniejsza forma (2)) jest znana pod wieloma nazwami. Jedną z nich jest *nierówność Schwarza*. Inne nazwy spotykane w literaturze to: *nierówność Cauchy'ego* lub *nierówność Buniakowskiego*. Niektórzy też posługują się nazwami łączonymi, np. *nierówność Cauchy'ego-Schwarza*, *Schwarza-Buniakowskiego*, itp.

Dowód twierdzenia

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n}(x_it-y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)t^2 + \left(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)t + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 = at^2+bt+c.$$

Ponieważ $w(t) \geqslant 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej t, więc

$$\Delta = b^2-4ac = \left(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right) \geqslant 0.$$

Przekształcając równoważnie powyższą nierówność otrzymujemy wzór (2), z którego uzyskujemy nierówność (1).

Równość w nierówności (2) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy trójmian kwadratowy $w(t)$ ma dokładnie jeden (podwójny) pierwiastek rzeczywisty. Tak się dzieje jedynie wtedy, gdy dla pewnej liczby rzeczywistej t

$$(3) \qquad x_1t-y_1 = x_2t-y_2 = \dots = x_nt-y_n = 0, \quad \text{tzn. } y_i = tx_i \text{ dla } i=1,2,\dots,n.$$

Aby miała miejsce równość w nierówności (1), potrzeba dodatkowo, żeby wartość wyrażenia $x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$ była nieujemna. To jednak, na mocy związków (3), jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $t \geqslant 0$.

Uwaga 2.

Oto inny, bardziej bezpośredni dowód nierówności (1). Z ciągu zależności

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(x_j\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - y_j\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}x_j^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 - 2\sum_{j=1}^{n}x_jy_j\cdot\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2 + \sum_{j=1}^{n}y_j^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}y_j^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$

otrzymujemy

$$0 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2.$$

Przekształcając równoważnie powyższą nierówność uzyskujemy zależność (2), skąd natychmiast wynika nierówność (1).

Uwaga 3.

W przypadku, gdy $n=2$ lub $n=3$, nierówność Schwarza ma następującą interpretację geometryczną:

Dla wektorów $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ *zachodzi nierówność*

$$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y} \leqslant |\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|, \tag{4}$$

gdzie $\circ$ *oznacza iloczyn skalarny, zaś* $|\boldsymbol{z}|$ *jest długością wektora* $\boldsymbol{z}$.

Wobec wzoru $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|\cdot\cos\sphericalangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, nierówność (4) jest równoważna stwierdzeniu, że *cosinus nie przekracza* 1.

Uwaga 4.

Równość w nierówności Schwarza zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ mają ten sam kierunek i zwrot (lub co najmniej jeden z nich jest wektorem zerowym). Dla wektorów $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ równość

$$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y} = \pm|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|$$

jest równoważna równości

$$(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|\cdot\boldsymbol{y},$$

co (miejmy nadzieję) choć trochę wyjaśnia, dlaczego w dowodzie nierówności Schwarza, przedstawionym w uwadze 2, wyszliśmy od oszacowania

$$|(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{x} - |\boldsymbol{x}|\cdot\boldsymbol{y}|^2 \geqslant 0.$$

D. Twierdzenie o złożeniu jednokładności

Twierdzenie 1.

Niech P_1, P_2 będą dwoma różnymi punktami na płaszczyźnie. Oznaczmy przez j_1 jednokładność o środku P_1 i skali $0<k_1<1$, zaś przez j_2 jednokładność o środku P_2 i skali $0<k_2<1$. Wówczas złożenie $j_2\circ j_1$ jest jednokładnością o środku leżącym na prostej P_1P_2 i skali $k_1{\cdot}k_2$.

Dowód

Dla dowolnego punktu T płaszczyzny oznaczmy: $T'=j_1(T)$, $T''=j_2(T')$. Wybierzmy dowolny punkt X nie leżący na prostej P_1P_2. Niech Q będzie punktem przecięcia prostej XX'' z odcinkiem P_1P_2 (rys. 1). Wykażemy, że położenie punktu Q nie zależy od wyboru punktu X oraz że punkt Q jest środkiem jednokładności $j_2\circ j_1$.

Zachodzą następujące równości:

$$\frac{X''X'}{P_2X''}=\frac{P_2X'-P_2X''}{P_2X''}=\frac{P_2X'}{P_2X''}-1=\frac{1}{k_2}-1=\frac{1-k_2}{k_2}.$$

Ponadto

$$\frac{X'X}{XP_1}=\frac{XP_1-X'P_1}{XP_1}=1-\frac{X'P_1}{XP_1}=1-k_1.$$

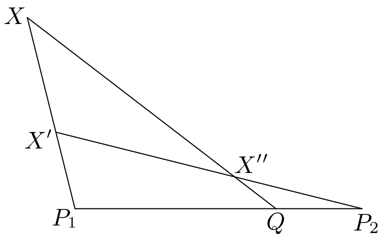
Stosując twierdzenie Menelausa (zob. str. 122) do trójkąta P_1P_2X' oraz wykorzystując powyższe związki otrzymujemy kolejno:

$$\frac{P_1Q}{QP_2}\cdot\frac{P_2X''}{X''X'}\cdot\frac{X'X}{XP_1}=1,\qquad \frac{P_1Q}{QP_2}\cdot\frac{k_2}{1-k_2}\cdot(1-k_1)=1,$$

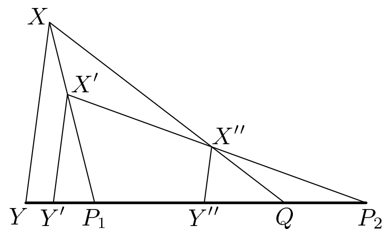
skąd

(1) $$\frac{P_1Q}{QP_2}=\frac{1-k_2}{k_2(1-k_1)}.$$

Powyższa równość oznacza właśnie, że *położenie punktu Q nie zależy od wyboru punktu X spoza prostej P_1P_2.*



rys. 1



rys. 2

Następnie wykażemy, że odwzorowanie $j_2\circ j_1$ przekształca jednokładnie każdy punkt X nie leżący na prostej P_1P_2 oraz, że jest to jednokładność o środku Q i skali $k_1{\cdot}k_2$. W tym celu wystarczy dowieść, że dla dowolnego punktu

$X \notin P_1P_2$ zachodzi równość

$$\frac{QX''}{QX} = k_1 \cdot k_2 . \tag{2}$$

Stosując twierdzenie Menelausa do trójkąta P_1QX uzyskujemy

$$\frac{QX''}{X''X} \cdot \frac{XX'}{X'P_1} \cdot \frac{P_1P_2}{P_2Q} = 1, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{QX''}{X''X} \cdot \left(\frac{XP_1}{X'P_1} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{P_1Q}{QP_2}\right) = 1.$$

Korzystając z równości (1) otrzymujemy

$$\frac{QX''}{X''X} \cdot \left(\frac{1}{k_1} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{1-k_2}{k_2(1-k_1)}\right) = 1.$$

Przekształcając równoważnie powyższą zależność dostajemy

$$\frac{X''X}{QX''} = \frac{1}{k_1 \cdot k_2} - 1, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{QX}{QX''} = \frac{1}{k_1 \cdot k_2}.$$

W ten sposób dowiedliśmy równości (2).

Aby zakończyć dowód twierdzenia należy wykazać, że dla dowolnego punktu Y leżącego na prostej P_1P_2 zachodzi równość

$$\frac{QY''}{QY} = k_1 \cdot k_2 .$$

W tym celu wybierzmy dowolny punkt X nie leżący na prostej P_1P_2 (rys. 2).

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, $XY \parallel X'Y'$ oraz $X'Y' \parallel X''Y''$. Zatem $XY \parallel X''Y''$, skąd

$$\frac{QY''}{QY} = \frac{QX''}{QX} = k_1 \cdot k_2 .$$

Dowód twierdzenia jest więc zakończony.

* * *

Zmieniając nieznacznie fragmenty powyższego dowodu można udowodnić poniższe, nieco ogólniejsze twierdzenie. Dopracowanie szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi.

Twierdzenie 2.

Niech P_1, P_2 będą dwoma różnymi punktami na płaszczyźnie. Oznaczmy przez j_1 jednokładność o środku P_1 i skali k_1, zaś przez j_2 jednokładność o środku P_2 i skali k_2, gdzie k_1, k_2 są dowolnymi liczbami rzeczywistymi różnymi od 0. Wówczas

(*a*) jeżeli $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, to złożenie $j_2 \circ j_1$ jest jednokładnością o środku leżącym na prostej P_1P_2 i skali $k_1 \cdot k_2$;

(*b*) jeżeli $k_1 \cdot k_2 = 1$, to złożenie $j_2 \circ j_1$ jest translacją o wektor równoległy do prostej P_1P_2.

E. Twierdzenie o zbieżności ciągu średnich arytmetycznych

Udowodnimy twierdzenie, z którego korzystaliśmy w rozwiązaniu zadania 10 z zawodów pierwszego stopnia (zob. str. 46).

Twierdzenie

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g, to ciąg (b_n), określony wzorem

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{1}$$

jest również zbieżny i jego granica wynosi g.

Dowód

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Na mocy definicji granicy istnieje taka liczba naturalna N, że dla wszystkich liczb $n > N$ zachodzi nierówność

$$|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wybierzmy tak dużą liczbę naturalną $M \geqslant N$, że

$$M > \frac{|a_1 + a_2 + \ldots + a_N - Ng|}{\varepsilon/2}.$$

Wtedy dla dowolnej liczby $m > M$ zachodzą nierówności:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_N - Ng| < \frac{M\varepsilon}{2},$$

$$|a_{N+1} - g| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_{N+2} - g| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \ldots, \quad |a_m - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_m - mg| = \left|(a_1 + a_2 + \ldots a_N - Ng) + \sum_{i=N+1}^{m} (a_i - g)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |a_1 + a_2 + \ldots a_N - Ng| + \sum_{i=N+1}^{m} |a_i - g| < \frac{(M + m - N)\varepsilon}{2} < m\varepsilon.$$

Zatem

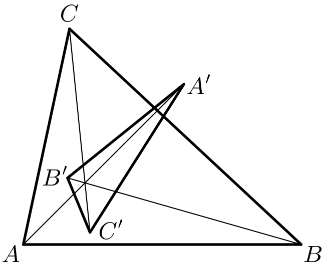
$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} - g\right| < \varepsilon,$$

co na mocy definicji granicy daje tezę twierdzenia.

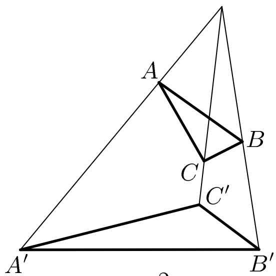
F. Twierdzenie Desarguesa

Środek perspektywiczny

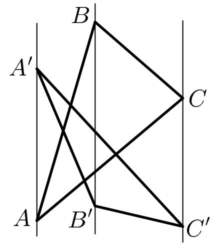
Na płaszczyźnie dane są takie dwa trójkąty ABC i $A'B'C'$, że $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$. Jeśli proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe, to mówimy, że trójkąty ABC, $A'B'C'$ *mają środek perspektywiczny* (rysunki 1, 2, 3). W przypadku, gdy proste AA', BB', CC' mają punkt wspólny, punkt ten nazywamy *środkiem perspektywicznym* trójkątów ABC, $A'B'C'$.



rys. 1



rys. 2

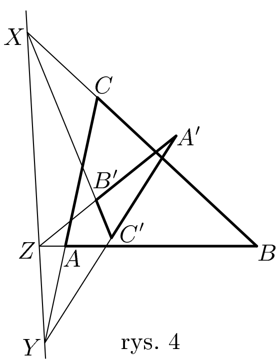


rys. 3

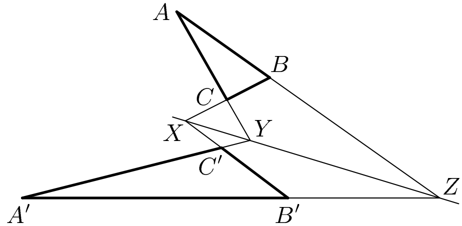
Oś perspektywiczna

Niech ABC, $A'B'C'$ będą takimi trójkątami leżącymi na płaszczyźnie, że $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$. Rozpatrzymy trzy możliwe położenia tych trójkątów.

1. Załóżmy, że żadna z par $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$ nie tworzy pary prostych równoległych, tzn. $BC \nparallel B'C'$, $CA \nparallel C'A'$, $AB \nparallel A'B'$. Oznaczmy przez X, Y, Z odpowiednio punkty przecięcia prostych BC i $B'C'$; CA i $C'A'$; AB i $A'B'$. Jeżeli punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej, to mówimy, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ *mają oś perspektywiczną* (rysunki 4 i 5). Prostą zawierającą punkty X, Y, Z nazywamy *osią perspektywiczną* trójkątów ABC, $A'B'C'$.



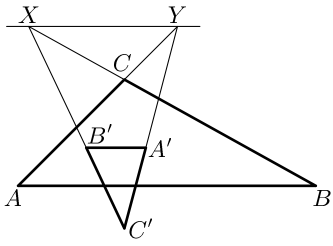
rys. 4



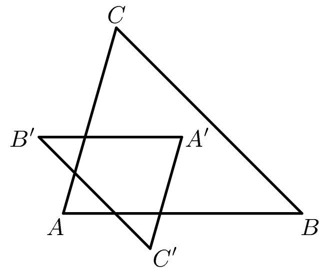
rys. 5

2. Załóżmy teraz, że *dokładnie jedna* spośród par $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$ jest parą prostych równoległych. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $AB \parallel A'B'$ (rys. 6). Podobnie jak wyżej, niech X, Y będą odpowiednio punktami przecięcia prostych BC, $B'C'$ oraz CA, $C'A'$. Jeżeli prosta XY jest równoległa do prostych AB i $A'B'$, to mówimy, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ *mają oś perspektywiczną*. Prostą XY nazywamy *osią perspektywiczną* trójkątów ABC oraz $A'B'C'$.

Analogicznie definiujemy oś perspektywiczną, gdy zachodzi dokładnie jeden z warunków: $BC \parallel B'C'$; $CA \parallel C'A'$.



rys. 6



rys. 7

3. Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym co najmniej dwie spośród par $(BC,B'C')$, $(CA,C'A')$, $(AB,A'B')$ tworzą pary boków równoległych. Wówczas jeżeli $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$ oraz $AB \parallel A'B'$ (rys. 7), to przyjmujemy (umownie), że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ *mają oś perspektywiczną*.

* * *

Twierdzenie Desarguesa[3]

Dwa trójkąty ABC, $A'B'C'$ takie, że $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, mają środek perspektywiczny wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywiczną.

Dowód

Załóżmy najpierw, że trójkąty ABC, $A'B'C'$ mają środek perspektywiczny. Przyjmijmy ponadto, że $BC \nparallel B'C'$, $CA \nparallel C'A'$, $AB \nparallel A'B'$ oraz że proste AA', BB', CC' przecinają się w punkcie P. (Dowód w pozostałych przypadkach można bez trudu przeprowadzić, wzorując się na poniższym rozumowaniu).

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $X = BC \cap B'C'$, $Y = CA \cap C'A'$, $Z = AB \cap A'B'$, gdzie $k \cap \ell$ jest punktem wspólnym prostych k i ℓ.

Stosując twierdzenie Menelausa (zob. str. 122) dla trójkątów $PC'A'$ oraz $PC'B'$ (rys. 8), otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{PC}{CC'} \cdot \frac{C'Y}{YA'} \cdot \frac{A'A}{AP} = 1, \qquad \frac{PC}{CC'} \cdot \frac{C'X}{XB'} \cdot \frac{B'B}{BP} = 1.$$

Wyznaczając i porównując wielkość $CC' : PC$ z obu związków uzyskujemy równość

---

[3] czyt.: *dezarga*.

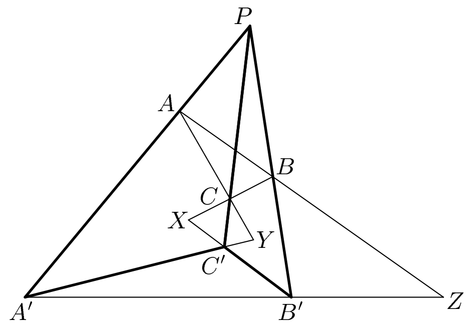
$$\frac{C'Y}{YA'}\cdot\frac{A'A}{AP}=\frac{C'X}{XB'}\cdot\frac{B'B}{BP},$$

skąd

$$(1)\qquad \frac{A'A}{AP}\cdot\frac{PB}{BB'}=\frac{C'X}{XB'}\cdot\frac{YA'}{C'Y}.$$

Stosując po raz kolejny twierdzenie Menelausa, lecz tym razem dla trójkąta $A'B'P$, dostajemy równość

$$(2)\qquad \frac{A'A}{AP}\cdot\frac{PB}{BB'}\cdot\frac{B'Z}{ZA'}=1.$$



rys. 8

Z równości (1) oraz (2) otrzymujemy związek

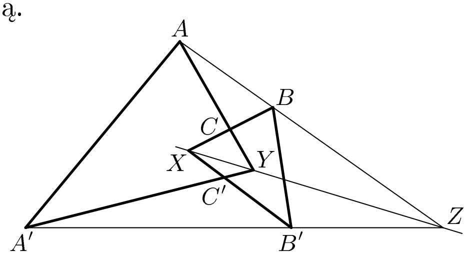
$$\frac{C'X}{XB'}\cdot\frac{YA'}{C'Y}=\frac{ZA'}{B'Z},\qquad\text{skąd mamy}\qquad \frac{C'X}{XB'}\cdot\frac{B'Z}{ZA'}\cdot\frac{YA'}{C'Y}=1.$$

Ostatnia zależność, na mocy twierdzenia Menelausa zastosowanego dla trójkąta $A'B'C'$, oznacza, że punkty X, Y, Z są współliniowe. Zatem trójkąty ABC, $A'B'C'$ mają oś perspektywiczną.

Załóżmy teraz, że trójkąty ABC, $A'B'C'$ mają oś perspektywiczną. Podobnie jak wyżej, dowód przeprowadzimy jedynie przy założeniu, że

$$BC \nparallel B'C',\ CA \nparallel C'A',\ AB \nparallel A'B',$$

pozostawiając Czytelnikowi do rozważenia pozostałe przypadki.



rys. 9

Punkty X, Y, Z są współliniowe, więc proste AB, $A'B'$, XY przecinają się w jednym punkcie. Zatem trójkąty $AA'Y$, $BB'X$ mają środek perspektywiczny — jest nim punkt Z (rys. 9). Stąd, jak wykazaliśmy wyżej, wynika, że trójkąty $AA'Y$, $BB'X$ mają oś perspektywiczną. Zatem albo proste AA', BB', CC' są równoległe, albo prosta CC' przechodzi przez punkt wspólny prostych AA' i BB'. To w obu przypadkach oznacza, że trójkąty ABC, $A'B'C'$ mają środek perspektywiczny. æ

G. Twierdzenie Cevy

Jednym z najczęściej stosowanych twierdzeń z geometrii na Olimpiadzie Matematycznej jest twierdzenie Cevy. W niniejszej broszurze stosowaliśmy je kilkakrotnie: w rozwiązaniach zadań 6 (sposób II, str. 38) oraz 9 (sposób III i IV, str. 44 i 45) zawodów stopnia pierwszego oraz w dowodzie *Lematu* (str. 97), który znalazł zastosowanie w rozwiązaniu zadania 13 z IX Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich.

Twierdzenie Cevy[4]

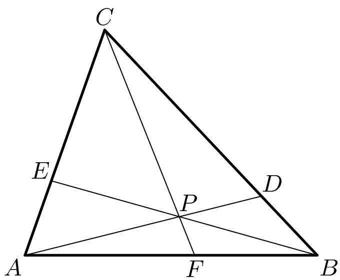
Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F, różne od wierzchołków trójkąta ABC, leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB, przy czym spełniony jest jeden z dwóch warunków:

(a) wszystkie trzy punkty D, E, F leżą na obwodzie trójkąta ABC (rys. 1);

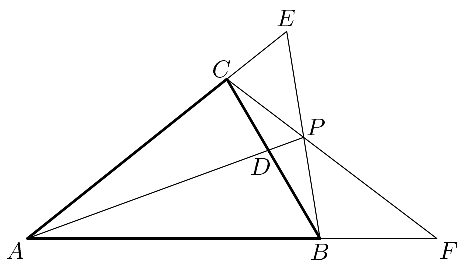
(b) dokładnie jeden spośród punktów D, E, F leży na obwodzie trójkąta ABC (rys. 2).

Wówczas proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1. \tag{1}$$



rys. 1



rys. 2

Dowód

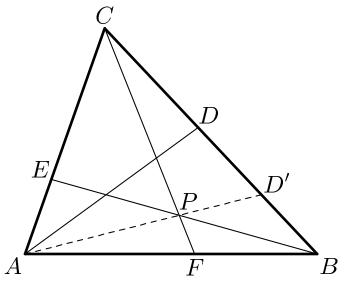
Załóżmy najpierw, że proste AD, BE, CF przecinają się w punkcie P. Niech $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ. Stosunek pól dwóch trójkątów o wspólnej podstawie jest równy stosunkowi wysokości opuszczonych na tę podstawę. Stąd oraz z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{AF}{FB}=\frac{[CPA]}{[BPC]},\quad \frac{BD}{DC}=\frac{[APB]}{[CPA]},\quad \frac{CE}{EA}=\frac{[BPC]}{[APB]}.$$

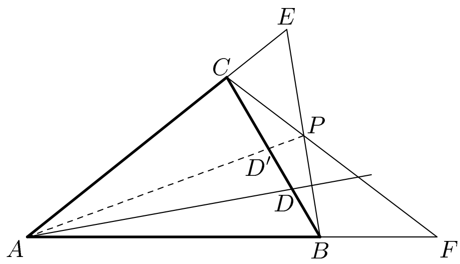
Mnożąc stronami powyższe równości uzyskujemy związek (1).

[4] czyt.: *czewy.*

Załóżmy teraz, że zachodzi równość (1). Przyjmijmy również, bez straty ogólności, że punkt D leży na obwodzie trójkąta ABC (rys. 3 i 4).



rys. 3



rys. 4

Przypuśćmy, że proste AD, BE, CF nie przecinają się w jednym punkcie. Niech P będzie punktem przecięcia prostych BE i CF. Wówczas prosta AP przecina *odcinek* BC w punkcie $D' \neq D$. Na mocy wyżej udowodnionej implikacji oraz związku (1) uzyskujemy:

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{FB}{AF} \cdot \frac{EA}{CE} = \frac{BD}{DC}.$$

Ponieważ oba punkty D, D' leżą na odcinku BC, więc z powyższej równości wnioskujemy, że $D = D'$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

H. Twierdzenie Menelausa

Twierdzenie Menelausa

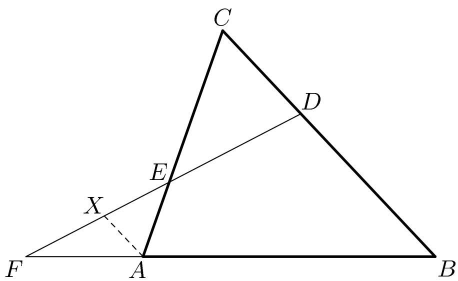
Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F, różne od wierzchołków trójkąta ABC, leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB, przy czym spełniony jest jeden z dwóch warunków:

(a) dokładnie dwa spośród punktów D, E, F leżą na obwodzie trójkąta ABC (rys. 1);

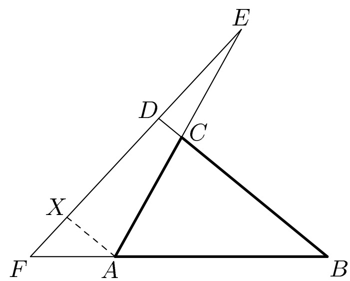
(b) żaden z punktów D, E, F nie leży na obwodzie trójkąta ABC (rys. 2).

Wówczas punkty D, E, F leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1. \tag{1}$$



rys. 1



rys. 2

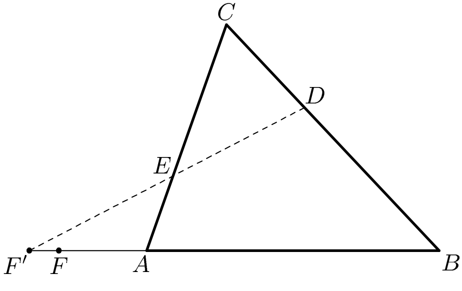
Dowód

Załóżmy najpierw, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej. Niech X będzie punktem przecięcia prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do prostej BC z prostą zawierającą punkty D, E, F (rys. 1 i 2). Wówczas na mocy twierdzenia Talesa

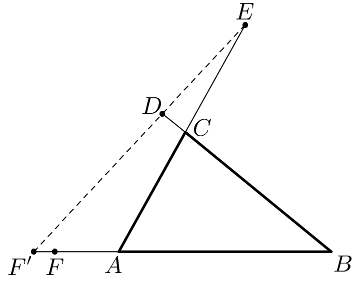
$$\frac{AF}{FB}=\frac{XA}{BD}, \qquad \frac{CE}{EA}=\frac{CD}{XA}.$$

Mnożąc stronami powyższe dwie równości otrzymujemy równość (1).

Załóżmy teraz, że zachodzi równość (1). Przyjmijmy również, bez straty ogólności, że punkt F leży na *przedłużeniu* boku AB (rys. 3 i 4).



rys. 3



rys. 4

Wówczas prosta DE przecina *przedłużenie* boku AB w punkcie $F' \neq F$. Na mocy wyżej udowodnionej implikacji oraz związku (1) uzyskujemy:

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{EA}{CE} \cdot \frac{DC}{BD} = \frac{AF}{FB}.$$

Ponieważ oba punkty F, F' leżą na przedłużeniu boku AB, więc $F = F'$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

* * *

Z twierdzenia Menelausa korzystaliśmy w dowodzie *Faktu* (str. 60), który znalazł zastosowanie w sposobie V rozwiązania zadania 1 z zawodów stopnia trzeciego, w dowodzie twierdzenia Desarguesa (str. 117), jak również w dowodzie twierdzenia o złożeniu jednokładności (str. 114).