L Olimpiada Matematyczna

Zawody stopnia trzeciego

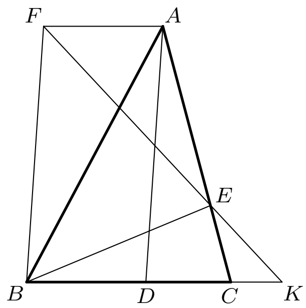
14 kwietnia 1999 r. – pierwszy dzień zawodów

Zadanie **1.** Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, przy czym $AD > BC$. Punkt E leży na boku AC i spełnia warunek

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{AD - BC}.$$

Udowodnić, że $AD > BE$.

Rozwiązanie:



Uzupełniamy trójkąt BDA do równoległoboku $BDAF$. Na półprostej $BC^{\rightarrow}$ odkładamy odcinek BK o długości AD. Dana w zadaniu zależność przyjmuje teraz postać

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{CK}.$$

Z tej równości oraz z równoległości odcinków CK i AF wynika, że punkty F, E, K są współliniowe. Punkt E leży więc na podstawie KF trójkąta równoramiennego BKF. Stąd dostajemy $BF > BE$, czyli $AD > BE$.

Zadanie **2.** Dane są liczby całkowite nieujemne $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{101}$ mniejsze od 5050. Dowieść, że spośród nich można wybrać takie cztery różne a_k, a_l, a_m, a_n, że liczba $a_k + a_l - a_m - a_n$ jest podzielna przez 5050.

Rozwiązanie:

Rozważamy wszystkie wyrażenia postaci $a_k + a_l$, gdzie $1 \leqslant k < l \leqslant 101$. Takich wyrażeń jest $\binom{101}{2} = 5050$. Jeżeli znajdziemy wśród nich dwa, powiedzmy $a_k + a_l$ i $a_m + a_n$, których wartości dają tę samą resztę z dzielenia przez 5050, to liczby a_k, a_l, a_m, a_n spełniają warunki zadania — liczby te są bowiem parami różne (jeśli np. $a_k = a_m$, to także $a_l = a_n$, gdyż $0 \leqslant a_l, a_n < 5050$).

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, w którym wszystkie powyższe sumy dają różne reszty z dzielenia przez 5050. Wykażemy, że ten przypadek zachodzić nie może. Gdyby bowiem tak było, to rozważane sumy dawałyby wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 5050 — każdą jeden raz. Stąd

$$S = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 101} (a_k + a_l) \equiv \sum_{i=0}^{5049} i = \frac{5049 \cdot 5050}{2} \equiv 2525 \pmod{5050},$$

co dowodzi, że S jest liczbą nieparzystą.

Z drugiej strony

$$S = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 101} (a_k + a_l) \;=\; 100 \cdot \sum_{k=1}^{101} a_k \;,$$

co oznacza, że S jest liczba parzystą. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie **3.** Dowieść, że istnieją takie liczby naturalne $n_1 < n_2 < \ldots < n_{50}$, że

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = n_3 + S(n_3) = \ldots = n_{50} + S(n_{50})\,,$$

gdzie $S(n)$ jest sumą cyfr liczby n.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} a_1(k) \;&=\; 10^{10^k+k+1} - 9{\cdot}10^k = \underbrace{9999...99}_{10^k}1\underbrace{0000...00}_{k},\\ a_2(k) \;&=\; 10^{10^k+k+1} = 1\underbrace{0000...00}_{10^k+k+1}. \end{aligned}$$

Wówczas $a_1(k) + S\left(a_1(k)\right) = a_2(k) + S\left(a_2(k)\right) = 10^{10^k+k+1} + 1$. Określamy liczby $k_0, k_1, k_2, \ldots$ wzorami:

$$k_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad k_{i+1} = 10^{k_i} + k_i + 2 \quad \text{dla} \quad i \geqslant 0\;.$$

Dla dowolnego ciągu $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5)$, gdzie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5 \in \{1, 2\}$, przyjmijmy

$$n_\varepsilon = \sum_{i=0}^{5} a_{\varepsilon_i}(k_i)\;.$$

Otrzymane w ten sposób 64 liczby n_ε są parami różne. Wykażemy, że dla wszystkich 64 ciągów ε, wielkości $n_\varepsilon + S(n_\varepsilon)$ są jednakowe.

Ponieważ dla $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ liczba $a_{\varepsilon_i}(k_i)$ jest co najwyżej k_{i+1}-cyfrowa i ma co najmniej k_i zer końcowych, więc żadne dwie z liczb $a_{\varepsilon_i}(k_i)$ i $a_{\varepsilon_j}(k_j)$ (dla $i \neq j$) nie mają niezerowych cyfr na tym samym miejscu dziesiętnym. Stąd

$$S(n_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{5} S\left(a_{\varepsilon_i}(k_i)\right)\;.$$

Zatem

$$n_\varepsilon + S(n_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{5} \left(a_{\varepsilon_i}(k_i) + S\left(a_{\varepsilon_i}(k_i)\right)\right) = 6 + \sum_{i=0}^{5} 10^{10^{k_i}+k_i+1}\,,$$

co jest wielkością niezależną od ε.

(*wp, jwr*)

L Olimpiada Matematyczna

Zawody stopnia trzeciego

15 kwietnia 1999 r. – drugi dzień zawodów

Zadanie **4.** Rozstrzygnąć, dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 2$ układ równań

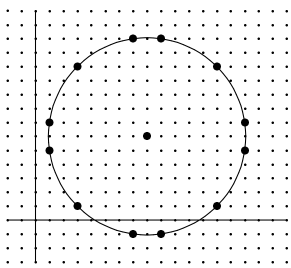
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2 \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3 \\ x_3^2 + x_4^2 + 50 = 16x_3 + 12x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Rozwiązanie:

Równanie $x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2$ jest równoważne równaniu

$$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2 = 50\,.$$



Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają dany w treści zadania układ równań wtedy i tylko wtedy, gdy punkty (x_1, x_2), (x_2, x_3), …, (x_n, x_1) leżą na okręgu o środku $(8, 6)$ i promieniu $\sqrt{50}$. Na tym okręgu leży 12 punktów o współrzędnych całkowitych: $(1,5)$, $(1,7)$, $(3,1)$, $(3,11)$, $(7,-1)$, $(7,13)$, $(9,-1)$, $(9,13)$, $(13,1)$, $(13,11)$, $(15,5)$, $(15,7)$.

Ponieważ każda z liczb x_i występuje raz jako odcięta, a raz jako rzędna punktu kratowego leżącego na tym okręgu, więc liczby x_i mogą przyjmować tylko wartości 1, 7 lub 13. To pozostawia nam trzy możliwe układy dla par (x_i, x_{i+1}), a mianowicie: $(1,7)$, $(7,13)$ lub $(13,1)$. Stąd wniosek, że w układzie liczb $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będącym rozwiązaniem wyjściowego układu równań, występują cyklicznie liczby 1, 7, 13. Taka sytuacja jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 3.

Zadanie **5.** Niech $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnić, że

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_i - b_j|\,.$$

Rozwiązanie:

Sumy występujące po obu stronach danej w zadaniu nierówności nie zmienią się, jeśli w dowolny sposób zmienimy kolejność liczb a_i oraz liczb b_i. Bez szkody dla ogólności możemy więc założyć, że $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_n$. Wówczas

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i + b_j - b_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_j - b_i| + |b_j - a_i|) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (|a_j - b_i| + |a_i - b_j|) + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i - b_i| =$$

$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_i - b_j| \ .$$

Zadanie **6.** W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości:

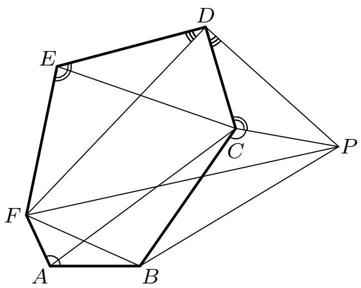
$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ \ , \qquad \frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA} = 1 \ .$$

Dowieść, że $\dfrac{AB}{BF}\cdot\dfrac{FD}{DE}\cdot\dfrac{EC}{CA} = 1$.

Rozwiązanie:

Na mocy założenia $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$, istnieje taki punkt P, że zachodzą następujące równości kątów (rysunek):

(1) $\quad \sphericalangle BCP = \sphericalangle BAF\,, \quad \sphericalangle PCD = \sphericalangle FED\,, \quad \sphericalangle CDP = \sphericalangle EDF\,.$



Trójkąty DEF i DCP są więc podobne, skąd dostajemy

(2) $\quad \sphericalangle EDC = \sphericalangle FDP \quad$ oraz $\quad \dfrac{ED}{DC} = \dfrac{FD}{DP}\,.$

Korzystając z danej w treści zadania równości oraz z podobieństwa trójkątów EDF i CDP otrzymujemy

$$\frac{FA}{AB} = \frac{EF}{DE}\cdot\frac{CD}{BC} = \frac{CP}{CD}\cdot\frac{CD}{BC} = \frac{CP}{BC}\,,$$

co na mocy pierwszej spośród równości (1) dowodzi, że trójkąty BAF i BCP są podobne. Zatem

(3) $\quad \sphericalangle CBA = \sphericalangle PBF \quad$ oraz $\quad \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{FB}{BP}\,.$

Równości (2) oznaczają, że trójkąty EDC i FDP są podobne; z równości (3) wynika natomiast, że podobne są trójkąty CBA i PBF. Otrzymujemy więc odpowiednio następujące proporcje:

$$\frac{EC}{DE} = \frac{FP}{FD} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AB}{CA} = \frac{BF}{FP}\,.$$

Mnożąc stronami powyższe dwie równości dostajemy tezę.

(*wp, jwr*)