LI OLIMPIADA MATEMATYCZNA
1999/2000

SPRAWOZDANIE KOMITETU GŁÓWNEGO

Organizacja zawodów

W roku szkolnym 1999/2000, w miesiącach wrzesień — grudzień, Komitet Główny Olimpiady Matematycznej zorganizował po raz pięćdziesiąty pierwszy zawody stopnia pierwszego w trzech miesięcznych etapach. W czasie tych zawodów uczniowie rozwiązują samodzielnie 12 zadań konkursowych (po cztery w każdym etapie) opracowanych i rozesłanych do szkół średnich przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej. Uczestnicy zawodów przesyłają swoje rozwiązania do właściwych terenowo komitetów okręgowych Olimpiady.

W roku szkolnym 1999/2000 zawody stopnia I odbyły się w następujących terminach:

Etap pierwszy — od 11 września do 11 października 1999 r.

obejmował zadania o numerach 1, 2, 3, 4.

Etap drugi — od 12 października do 10 listopada 1999 r.

obejmował zadania o numerach 5, 6, 7, 8.

Etap trzeci — od 11 listopada do 10 grudnia 1999 r.

obejmował zadania o numerach 9, 10, 11, 12.

W zawodach stopnia I uczestniczyło 1156 uczniów szkół średnich. Spośród nich do zawodów stopnia II (okręgowych), które odbyły się w dniach 25 i 26 lutego 2000 r., zakwalifikowano 419 osób, a do zawodów stopnia III (finałowych) zakwalifikowano 73 osoby. Zawody finałowe odbyły się w dniach 3 i 4 kwietnia 2000 r. w Stalowej Woli.

Uroczystość zakończenia LI Olimpiady Matematycznej odbyła się dnia 6 kwietnia 2000 r. w Stalowej Woli.

Obóz naukowy Olimpiady odbył się w Domu Wczasowym *Zgoda* w Zwardoniu w dniach 4–18 czerwca 2000 r.

Skład osobowy komitetów Olimpiady

Komitet Główny

Przewodniczący — prof. dr hab. Edmund Puczyłowski.

Zastępca przewodniczącego — dr hab. Zbigniew Marciniak.

Członkowie — dr Jerzy Bednarczuk, prof. dr hab. Czesław Bessaga, dr Sławomir Cynk, stud. Paulina Domagalska, dr hab. Andrzej Fryszkowski, dr Rafał Latała, stud. Rafał Łochowski, mgr Andrzej Mąkowski, mgr Henryk Pawłowski, mgr Waldemar Pompe, dr Mariusz Skałba, mgr Magdalena Spalińska, dr Witold Szczechla, mgr Wojciech Tomalczyk, prof. dr hab. Henryk Toruńczyk, dr Jarosław Włodarczyk, dr Michał Wojciechowski, dr Jarosław Wróblewski.

Członkowie honorowi Komitetu Głównego: mgr Olga Turska, doc. dr Józef Janikowski, mgr Olga Stande-Armatys.

Spośród członków Komitetu Głównego wyłoniono komisję zadaniową, która wybierała zadania na zawody Olimpiady zobowiązując się do zachowania ich w ścisłej tajemnicy aż do momentu ogłoszenia. Skład tej komisji był następujący:

dr Jerzy Bednarczuk, dr Sławomir Cynk, Paulina Domagalska, dr hab. Andrzej Fryszkowski, dr Rafał Latała, Rafał Łochowski, dr hab. Zbigniew Marciniak, mgr Andrzej Mąkowski, mgr Waldemar Pompe, dr Mariusz Skałba, mgr Magdalena Spalińska, dr Witold Szczechla, dr Jarosław Włodarczyk, dr Michał Wojciechowski, dr Jarosław Wróblewski.

Biuro Komitetu Głównego

Kierownik organizacyjny — mgr Magdalena Spalińska, sekretarz naukowy — dr Jarosław Wróblewski, główny księgowy — Teresa Gniado, st. referenci — Elżbieta Berus i Grażyna Żaboklicka.

Adres: Komitet Główny Olimpiady Matematycznej, ul. Śniadeckich 8, pok. 314, 00-656 Warszawa, tel. (0-22) 629-95-92.

Komitety Okręgowe

1. Komitet Okręgowy w Gdańsku

Przewodniczący — prof. dr hab. Tadeusz Figiel.

Członkowie — dr Antoni Augustynowicz, dr Tomasz Człapiński, Adam Dzedzej, dr hab. Anna Kamont, dr Marcin Marciniak, dr Henryk Leszczyński, mgr Barbara Wolnik.

Sekretarz Komitetu — mgr Grażyna Witosławska-Muszyńska.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województwa pomorskiego.

2. Komitet Okręgowy w Katowicach

Przewodniczący — prof. dr hab. Janusz Matkowski.

Zastępca przewodniczącego — dr Józef Kalinowski.

Członkowie — mgr Tomasz Kulpa, dr Marek Piętka, dr hab. Ryszard Rudnicki, mgr Justyna Sikorska, mgr Tomasz Szymczyk, mgr Antoni Tomala, dr Jacek Uryga.

Sekretarz Komitetu — dr Jacek Uryga.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województwa śląskiego.

3. Komitet Okręgowy w Krakowie

Przewodniczący — dr hab. Edward Tutaj.

Zastępca przewodniczącego — dr Krzysztof Ciesielski.

Członkowie — mgr Danuta Ciesielska, dr Armen Edigarian, dr Józef Piórek, dr Tadeusz Rams, mgr Lesław Skrzypek, dr Lech Sławik, dr Zbigniew Węglowski, dr Włodzimierz Zwonek.

Sekretarz Komitetu — mgr Danuta Ciesielska.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województwa małopolskiego.

4. Komitet Okręgowy w Lublinie

Przewodniczący — prof. dr hab. Wiesław Zięba.

Zastępca przewodniczącego — prof. dr hab. Zdzisław Rychlik.

Członkowie — mgr Krzysztof Bolibok, dr Halina Hebda-Grabowska, mgr Piotr Kowalski, dr Andrzej Wiśnicki, dr Jacek Wośko.

Sekretarz Komitetu — dr Halina Hebda-Grabowska.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 807, 20-031 Lublin.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: lubelskiego i podkarpackiego.

5. Komitet Okręgowy w Łodzi

Przewodniczący — dr hab. Wojciech Banaszczyk.

Członkowie — dr hab. Grzegorz Andrzejczak, dr Maciej Czarnecki, dr Jan Lesiak, mgr Jacek Mańko, dr Zenon Piesyk, prof. dr hab. Paweł Walczak.

Sekretarz Komitetu — Danuta Marędziak.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: łódzkiego i świętokrzyskiego.

6. Komitet Okręgowy w Poznaniu

Przewodniczący — prof. dr hab. Paweł Domański.

Członkowie — dr Mieczysław Cichoń, dr Czesław Mańkowski, dr Artur Michalak, dr Jerzy Szczepaniak, mgr Maciej Radziejewski.

Sekretarz Komitetu — dr Jerzy Szczepaniak.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Matejki 48/49, 60-769 Poznań.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województwa wielkopolskiego.

7. Komitet Okręgowy w Szczecinie

Przewodniczący — dr Paweł Andrzejewski.

Członkowie: dr Adam Neugebauer, dr Czesław Wowk, dr Kazimierz Skurzyński, dr Eugeniusz Stasiak, dr Stanisław Ewert-Krzemieniecki, mgr Zofia Garbiak, mgr Michał Szuman.

Sekretarz Komitetu — Anna Sasim.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: lubuskiego i zachodniopomorskiego.

8. Komitet Okręgowy w Toruniu

Przewodniczący — prof. dr hab. Stanisław Balcerzyk.

Członkowie — mgr Zbigniew Bobiński, dr Paweł Jarek, mgr Piotr Jędrzejewicz, prof. dr hab. Andrzej Nowicki, dr Andrzej Sendlewski, dr Mirosław Uscki.

Sekretarz Komitetu — mgr Zbigniew Bobiński.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego.

9. Komitet Okręgowy w Warszawie

Przewodniczący — dr Michał Krych.

Członkowie — prof. dr hab. Wojciech Guzicki, dr Alina Haman, dr Marcin Kuczma, mgr Krzysztof Oleszkiewicz, dr Paweł Strzelecki.

Sekretarz Komitetu — dr Marcin Kuczma.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, pok. 314, 00-656 Warszawa.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: mazowieckigo i podlaskiego.

10. Komitet Okręgowy we Wrocławiu

Przewodniczący — doc. dr Zbigniew Romanowicz.

Członkowie — Tomasz Elsner, dr Liliana Janicka, mgr Augustyn Kałuża, mgr Bogusław Merdas, prof. dr hab. Witold Nitka, dr Bogdan Pawlik, dr Tadeusz Pezda, mgr Witold Seredyński, mgr Zdzisław Słomian, mgr Stanisław Zieleń.

Sekretarz Komitetu — mgr Witold Seredyński.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: dolnośląskiego i opolskiego.

LI Olimpiada Matematyczna
Zestawienie ocen rozwiązań zadań zawodów II stopnia
(oceny wystawione przez komitety okręgowe)

Tabela 1

	Ogółem	Liczba rozwiązań					
		Pierwszy dzień zawodów			Drugi dzień zawodów		
		Numer zadania					
		1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8
Razem	2499	418	418	418	415	415	415
9 – 10 punktów	348	39	118	53	70	65	3
7 – 8 punktów	152	5	23	20	74	27	3
5 – 6 punktów	52	1	11	9	19	11	1
1 – 4 punktów	400	14	98	91	80	52	65
0 punktów	1547	359	168	245	172	260	343

Zestawienie ocen rozwiązań zadań zawodów III stopnia

Uwaga: przy ocenianiu rozwiązań zadań zawodów III stopnia LI Olimpiady przyjęta była następująca skala ocen: 6 punktów, 5 punktów, 2 punkty, 0 punktów.

Tabela 2

	Ogółem	Liczba rozwiązań					
		Pierwszy dzień zawodów			Drugi dzień zawodów		
		Numer zadania					
		1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8
Razem	438	73	73	73	73	73	73
6 punktów	85	6	19	7	21	26	6
5 punktów	18	4	2	1	3	5	3
2 punkty	29	4	4	5	9	4	3
0 punktów	306	59	48	60	40	38	61

Zestawienie liczby zawodników według okręgów

Tabela 3

Okręg	Zawody			Laureaci	Wyróżnieni
	I st.	II st.	III st.		
POLSKA	1156	418	73	16	14
gdański	82	32	3	—	1
katowicki	92	29	7	3	3
krakowski	96	50	13	5	2
lubelski	163	56	8	2	3
łódzki	117	28	3	1	—
poznański	59	21	—	—	—
szczeciński	93	24	3	—	—
toruński	120	50	10	—	3
warszawski	188	75	14	1	—
wrocławski	146	53	12	4	2

Lista uczestników zakwalifikowanych do zawodów stopnia trzeciego

1. Michał Adamaszek — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciel zawodnika: Tomasz Szymczyk.
2. Karol Białas — uczeń klasy drugiej Samorządowego Liceum Ogólnokształcącego w Opocznie. Nauczyciel zawodnika: Arkadiusz Felis.
3. Michał Borny — uczeń klasy czwartej II Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Zamoyskiego w Lublinie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Klisowski.
4. Przemysław Broniek — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Armen Edigarian, Jacek Dymel, Lesław Skrzypek, Maria Jasieńska, Urszula Szwedzicka, Michał Kapustka.
5. Andrzej Bułatek — uczeń klasy pierwszej Liceum Ogólnokształcącego Towarzystwa Salezjańskiego w Bydgoszczy. Nauczycielka zawodnika: Wiesława Bułatek.
6. Jakub Byszewski — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Juliusza Słowackiego w Chorzowie. Nauczyciel zawodnika: Dariusz Kuzior.
7. Tomasz Czajka — uczeń klasy czwartej Liceum Ogólnokształcącego im. KEN w Stalowej Woli. Nauczyciele zawodnika: Waldemar Rożek, Henryk Pawłowski.
8. Wojciech Czerwiński — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Jerzy Konarski, Kazimierz Cegiełka.
9. Lech Duraj — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Urszula Szwedzicka, Paweł Gniadek i Lesław Skrzypek.
10. Sławomir Duszyński — uczeń klasy czwartej III Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Augustyn Kałuża i Józef Łoziński.
11. Bartosz Dziewa — uczeń klasy pierwszej I Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Łomży. Nauczyciel zawodnika: Piotr Łowicki.
12. Krzysztof Dziołak — uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Dubois w Koszalinie. Nauczyciel zawodnika: Paweł Radecki.
13. Patryk Franczak — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciele zawodnika: Bogusław Gardaś i Tomasz Szymczyk.

14. Jakub Gac — uczeń klasy czwartej XLI Liceum Ogólnokształcącego im. Joachima Lelewela w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Elżbieta Klonowska.

15. Jakub Gismatullin — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciel zawodnika: Stefan Mizia.

16. Mateusz Goryca — uczeń klasy drugiej VI Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Radomiu. Nauczyciel zawodnika: Jerzy Nowicki.

17. Przemysław Grudziński — uczeń klasy czwartej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciel zawodnika: Henryk Pawłowski.

18. Grzegorz Herman — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Urszula Szwedzicka i Paweł Gniadek.

19. Michał Jabłonowski — uczeń klasy czwartej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciel zawodnika: Wojciech Tomalczyk.

20. Katarzyna Jachim — uczennica klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. KEN w Stalowej Woli. Nauczyciel zawodniczki: Waldemar Rożek.

21. Szymon Jakubczak — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wacława Tempczyk, Kazimierz Cegiełka i Edward Stachowski.

22. Dariusz Jakuboze — uczeń klasy czwartej XVIII Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Zamoyskiego w Warszawie. Nauczyciel zawodnika: Krzysztof Nowak.

23. Kamila Jasińska — uczennica klasy trzeciej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciele zawodniczki: Anita Pawłowska i Wojciech Tomalczyk.

24. Artur Jeż — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Stefan Mizia i Zbigniew Romanowicz.

25. Jan Jeżabek — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Armen Edigarian, Urszula Szwedzicka i Maria Jasieńska.

26. Jacek Jurewicz — uczeń klasy trzeciej II Liceum Ogólnokształcącego im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie. Nauczycielka zawodnika: Teresa Pik.

27. Wojciech Kamiński — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Łodzi. Nauczyciele zawodnika: Adam Paszkiewicz, Wojciech Komisarski i Maciej Czarnecki.

28. Michał Kosek — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Maria Jasieńska, Armen Edigarian i Urszula Szwedzicka.

29. Andrzej Kurach — uczeń klasy czwartej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciel zawodnika: Henryk Pawłowski.

30. Joanna Barbara Kuran — uczennica klasy trzeciej LXVII Liceum Ogólnokształcącego przy Wydziale Pedagogicznym UW w Warszawie. Nauczycielka zawodniczki: Monika Szczerba.

31. Mateusz Kwaśnicki — uczeń klasy trzeciej III Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Krzysztof Omiljanowski, Augustyn Kałuża, Przemysław Szczepaniak i Krystyna Czycza.

32. Aleksandra Kwiatkowska — uczennica klasy pierwszej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodniczki: Władysław Suchocki, Zdzisław Słomian i Tomasz Elsner.

33. Michał Legumina — uczeń klasy trzeciej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciele zawodnika: Maria Kobus i Zbigniew Bobiński.

34. Patryk Lesiewicz — uczeń klasy czwartej Liceum Ogólnokształcącego w Łapach. Nauczycielka zawodnika: Maciejewska.

35. Łukasz Lew — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego im. Edwarda Dembowskiego w Zielonej Górze. Nauczycielka zawodnika: Alicja Kozak.

36. Marcin Lipiec — uczeń klasy czwartej VI Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Radomiu. Nauczyciel zawodnika: Przemysław Murawski.

37. Roman Łomowski — uczeń klasy drugiej VI Liceum Ogólnokształcącego im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy. Nauczyciele zawodnika: Henryk Pawłowski i Anna Karaszewska.

38. Jakub Łopuszański — uczeń klasy drugiej III Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Augustyn Kałuża, Przemysław Szczepaniak i Józef Łoziński.

39. Grzegorz Łukasik — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Armen Edigarian i Maria Jasieńska.

40. Jan Daniel Łuszkiewicz — uczeń klasy trzeciej VI Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Radomiu. Nauczyciel zawodnika: Przemysław Murawski.

41. Krzysztof Maczyński — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciel zawodnika: Tomasz Szymczyk.

42. Marcin Marszałek — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Halina Gorzelnik.

43. Jarosław Mederski — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego im. Cypriana Kamila Norwida w Bydgoszczy. Nauczyciele zawodnika: Henryk Pawłowski i Danuta Grabowska.

44. Piotr Niemczyk — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciel zawodnika: Tomasz Szymczyk.

45. Anna Niewiarowska — uczennica klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego w Szczecinie. Nauczycielka zawodniczki: K. Żochowska.

46. Agata Nowak — uczennica klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Juliusza Słowackiego w Chorzowie. Nauczyciel zawodniczki: Dariusz Kuzior.

47. Michał Obarski — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Chrzanowie. Nauczycielka zawodnika: Iwona Małocha.

48. Krzysztof Onak — uczeń klasy czwartej III Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Tarnowie. Nauczyciele zawodnika: Józef Citak i Edward Tutaj.

49. Paweł Pabiś — uczeń klasy czwartej II Liceum Ogólnokształcącego im. J. Chreptowicza w Ostrowcu Świętokrzyskim. Nauczycielka zawodnika: Wanda Masternak.

50. Karol Palka — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Ignacego Paderewskiego w Wałbrzychu. Nauczyciele zawodnika: Halina Pankanin i Zbigniew Romanowicz.

51. Paweł Parys — uczeń klasy drugiej Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Tarnowskich Górach. Nauczyciele zawodnika: Dariusz Nowak i Józef Kalinowski.

52. Piotr Paulski — uczeń klasy czwartej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wacława Tempczyk, Kazimierz Cegiełka i Edward Stachowski.

53. Marcin Pilipczuk — uczeń klasy pierwszej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Agnieszka Kałamajska i Leszek Sidz.

54. Robert Piszczatowski — uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Białymstoku. Nauczycielki zawodnika: Zofia Parchanowicz i Agnieszka Sałaj.

55. Marcin Poturalski — uczeń klasy czwartej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciel zawodnika: Henryk Pawłowski.

56. Maciej Próchniak — uczeń klasy trzeciej II Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Zamoyskiego w Lublinie. Nauczyciel zawodnika: Ryszard Kowal.

57. Marek Rams — uczeń klasy drugiej Katolickiego Liceum Ogólnokształcącego Księży Pijarów w Krakowie.

58. Marcin Sabok — uczeń klasy czwartej XV Liceum Ogólnokształcącego im. mjr. Piotra Wysockiego we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Grażyna Piłkowska, Augustyn Kałuża i Zbigniew Romanowicz.

59. Piotr Skibiński — uczeń klasy czwartej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie.

60. Bartłomiej Sobierajski — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. J. Bażyńskiego w Ostródzie. Nauczyciel zawodnika: Eugeniusz Płandowski.

61. Lech Stawikowski — uczeń klasy ósmej Szkoły Podstawowej nr 84 we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Bogusław Merdas, Monika Waszkiewicz-Bolenowska, Zbigniew Romanowicz i Zdzisław Słomian.

62. Bartosz Sułkowski — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciel zawodnika: Tomasz Szymczyk.

63. Karolina Taborek — uczennica klasy trzeciej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciele zawodnika: Henryk Pawłowski i Andrzej Sendlewski.

64. Bartosz Tarnowski — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciel zawodnika: Stanisław Buś.

65. Andrzej Tymoczko — uczeń klasy czwartej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Mariusz Kraus.

66. Anna Urbańska — uczennica klasy czwartej II Liceum Ogólnokształcącego im. Jana III Sobieskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodniczki: Czesława Dudek, Ryszard Gruca i Lesław Skrzypek.

67. Paweł Walter — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Urszula Szwedzicka i Lesław Skrzypek.

68. Marcin Wojnarski — uczeń klasy czwartej Katolickiego Liceum Ogólnokształcącego Księży Pijarów w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Krzysztof Reczek.

69. Dominik Wojtczak — uczeń klasy trzeciej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciel zawodnika: Wojciech Tomalczyk.

70. Jarosław Wrona — uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Krośnie. Nauczyciel zawodnika: Andrzej Bysiewicz.

71. Maciej Zakarczemny — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Opolu. Nauczyciele zawodnika: Jan Kowolik i Wiesław Szwiec.

72. Tadeusz Zimirski — uczeń klasy czwartej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Armen Edigarian i Urszula Szwedzicka.

73. Jakub Zwierz — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Stanisław Buś i Zbigniew Romanowicz.

Lista laureatów i wyróżnionych

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 5 kwietnia 2000 r. przyznał tytuł laureata LI Olimpiady Matematycznej i nagrody pierwszego, drugiego lub trzeciego stopnia szesnastu osobom (na marginesie zaznaczono kolejność miejsc):

nagroda stopnia pierwszego

1. Mateusz Kwaśnicki,

nagrody stopnia drugiego

2. Tomasz Czajka,
3. Michał Adamaszek,
4. Lech Duraj,
5. Wojciech Czerwiński,

nagrody stopnia trzeciego

6 – 10. Przemysław Broniek,
Paweł Parys,
Bartosz Sułkowski,
Paweł Walter,
Marcin Wojnarski,

11 – 13. Katarzyna Jachim,
Artur Jeż,
Marcin Sabok,
14. Wojciech Kamiński,
15. Jakub Gismatullin,
16. Grzegorz Herman.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 14 zawodników. Wyróżnienia otrzymali: Michał Borny, Jakub Byszewski, Przemysław Grudziński, Michał Jabłonowski, Jacek Jurewicz, Roman Łomowski, Krzysztof Maczyński, Piotr Niemczyk, Krzysztof Onak, Lech Stawikowski, Andrzej Tymoczko, Jarosław Wrona, Tadeusz Zimirski, Jakub Zwierz.

Zakończenie LI Olimpiady Matematycznej

Po raz drugi już finał Olimpiady Matematycznej został zorganizowany — tym razem w Stalowej Woli — jako impreza 4-dniowa. Wszyscy zawodnicy, ich opiekunowie i członkowie KGOM zakwaterowani byli w Akademikach Fundacji Uniwersyteckiej KUL. Zawody odbyły się w salach Liceum Ogólnokształcącego im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli w dniach 3 i 4 kwietnia. 5 kwietnia zorganizowana była wycieczka autokarowa do Sandomierza i Baranowa Sandomierskiego, zaś 6 kwietnia w Auli Uniwersyteckiej odbyło się uroczyste zakończenie LI Olimpiady. Obecni byli członkowie władz regionu oraz przedstawiciele sponsorów.

Przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej prof. dr hab. Edmund Puczyłowski podziękował wszystkim, którzy przyczynili się do doskonałego zorganizowania finału, i wręczył pamiątkowe medale „50 lat Olimpiady Matematycznej" panom: Tomaszowi Szymczykowi i Kazimierzowi Polakowi (organizatorom finału L Olimpiady w Bielsku-Białej) oraz Waldemarowi Rożkowi i Stanisławowi Turkowi (organizatorom finału LI Olimpiady w Stalowej Woli). Następnie przewodniczący omówił wyniki zawodów i wręczył dyplomy oraz pamiątkowe statuetki laureatom i wyróżnionym. Niektórzy laureaci otrzymali nagrody specjalne, ufundowane przez sponsorów.

Wszyscy laureaci i wyróżnieni oprócz dyplomów i nagród pieniężnych otrzymali zestawy książek matematycznych i informatycznych, a także roczną prenumeratę czasopisma *DELTA*.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej składa gorące podziękowania sponsorom i fundatorom nagród: Prezydentowi miasta Stalowa Wola, Starostwu Powiatowemu w Stalowej Woli, Spółce Handlowej Dressta, Prezesowi Telewizji Polskiej S.A. p. Robertowi Kwiatkowskiemu, Prezesowi Fundacji Uniwersyteckiej KUL p. Jerzemu Kozielewiczowi, Wydawnictwom Szkolnym i Pedagogicznym, Wydawnictwu Naukowemu PWN, Wydawnictwu Naukowo-Technicznemu, Redakcji *DELTY*.

Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej Zwardoń 2000

Sprawozdanie

Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 4–18 czerwca 2000 r. w Zwardoniu, w Domu Wczasowym „Zgoda”.

W obozie wzięły udział następujące osoby: Michał Adamaszek, Jakub Byszewski, Wojciech Czerwiński, Lech Duraj, Krzysztof Dziołak, Mateusz Goryca, Grzegorz Herman, Katarzyna Jachim, Artur Jeż, Jacek Jurewicz, Mateusz Kwaśnicki, Roman Łomowski, Jakub Łopuszański, Paweł Parys, Marcin Sabok, Lech Stawikowski, Bartosz Sułkowski, Paweł Walter, Marcin Wojnarski i Jarosław Wrona.

W dniach 5–9 oraz 14–16 czerwca uczestnicy obozu rozwiązywali zadania indywidualnie, w dniach 10, 13 i 17 czerwca odbyły się zawody drużynowe, a 12 czerwca rozegrany został „mecz matematyczny”.

Uczestnicy wzięli udział w dwóch wycieczkach: pieszej na Wielką Raczę i pociągiem do Žiliny na Słowacji.

Najlepsze rezultaty w zawodach indywidualnych osiągnęli: Jakub Byszewski, Roman Łomowski i Paweł Walter. Właściciele DW „Zgoda” ufundowali dla nich nagrodę — trzydniowy pobyt w „Zgodzie” (nagrodzeni „odebrali” nagrodę w sierpniu).

W zawodach drużynowych najlepszy rezultat osiągnęła reprezentacja na MOM.

Wszystkie zadania, które były rozwiązywane na obozie, wraz ze szkicami rozwiązań, zostały zebrane w broszurce, przygotowanej przez kadrę obozu.

Uzupełnienie sprawozdania z finału L Olimpiady Matematycznej

W sprawozdaniu z finału L Olimpiady nie zostały zamieszczone istotne informacje, które niniejszym uzupełniamy.

Pierwszy raz finał Olimpiady Matematycznej został zorganizowany jako impreza 4-dniowa. Wszyscy uczestnicy finału — zawodnicy i członkowie KGOM — mieszkali w hotelu ZIAD, położonym nieopodal Szyndzielni.

Same zawody odbywały się w dniach 14 i 15 kwietnia 1999 r. w budynku V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. W dniach 16 i 17 kwietnia uczestnicy mogli wziąć udział w programie turystycznym: zwiedzanie elektrowni szczytowo-pompowej na Żarze, spacer ulicami Bielska-Białej, wycieczka turystyczna na Szyndzielnię, Klimczok i Błatnią. Wielu uczniów wzięło udział w spotkaniu z Marianem Kasprzykiem, mieszkańcem Bielska-Białej, złotym medalistą olimpijskim w boksie z Tokio (1964 r.)

Zakończenie, w którym wzięli udział prawie wszyscy uczestnicy finału L OM, odbyło się 17 kwietnia wieczorem w hotelu ZIAD. Honorowy patronat nad uroczystością zgodził się objąć Prezydent RP, Aleksander Kwaśniewski. Przedstawiciel Prezydenta, Jerzy Wysokiński, przywiózł i odczytał list Pana Prezydenta do uczestników i organizatorów Olimpiady (na poprzedniej stronie zamieszczamy kopię). Na uroczystości zakończenia obecni byli również: Stefan Macner — poseł na Sejm RP, Andrzej Mróz — przedstawiciel Śląskiego Kuratorium Oświaty w Katowicach, Henryk Leszczyński — przedstawiciel Urzędu Miejskiego w Bielsku-Białej, oraz sponsorzy prywatni.

Przewodniczący KGOM, prof. dr hab. Edmund Puczyłowski, ogłosił wyniki zawodów oraz wręczył dyplomy i nagrody laureatom. Poza nagrodami pieniężnymi od KGOM i książkami od wydawnictw WSiP, PWN, WNT i Redakcji *DELTY* laureaci otrzymali nagrody ufundowane przez sponsorów prywatnych.

Doskonałą organizację finału — zarówno zawodów, jak i pozostałych wydarzeń w ciągu tych czterech dni — zapewnili panowie Tomasz Szymczyk (nauczyciel matematyki w V LO w Bielsku-Białej) i Kazimierz Polak (dyrektor V LO). Dzięki ich zaangażowaniu finał L Olimpiady znalazł wielu sponsorów, stał się znaczącym wydarzeniem, a jego uczestnicy spędzili 4 dni wypełnione interesującymi zajęciami i w przyjemnej atmosferze.

XL Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Sprawozdanie

W dniach od 10 do 22 lipca 1999 r. odbywała się w Rumunii XL Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Uczestniczyło w niej 453 uczniów z 81 państw. Większość państw przysłała po sześciu uczniów (pełne delegacje), nieliczne państwa przysłały delegacje niepełne. W skład delegacji polskiej weszli następujący uczniowie: Piotr Buciak (Szczecin), Michał Kapustka (Kraków), Eryk Kopczyński (Warszawa), Michał Matuszewski (Katowice), Paweł Parys (Tarnowskie Góry), Mikołaj Zalewski (Kraków). Przewodniczącym delegacji polskiej był dr Marcin E. Kuczma, zastępcą przewodniczącego — Rafał Łochowski.

Przewodniczący delegacji wszystkich uczestniczących państw tworzyli Jury Olimpiady. Obradom Jury przewodniczył prof. Viorel Barbu z Rumunii. Od 11 do 14 lipca obrady Jury odbywały się w znanej górskiej miejscowości wypoczynkowej Poiana Braşov; w trakcie tych obrad wybrano sześć zadań z listy dwudziestu siedmiu zadań, wcześniej wyselekcjonowanych spośród propozycji nadesłanych przez uczestniczące państwa, oraz postanowiono, że za rozwiązanie każdego z nich uczestnik Olimpiady może otrzymać do 7 punktów; tak więc łączna liczba możliwych do zdobycia punktów wynosiła 42.

Selekcja, o której mowa, była przeprowadzona w ciągu tygodni poprzedzających olimpiadę przez komisję zadaniową, złożoną z matematyków rumuńskich, reprezentujących różne ośrodki akademickie kraju. Taki system prac (wstępna selekcja przez komisję zadaniową kraju organizującego olimpiadę, a ostateczna — przez jej Jury) jest od wielu lat przyjęty w międzynarodowych olimpiadach matematycznych. Zadania umieszczone na liście przygotowanej dla Jury przez tegoroczną komisję zadaniową były wyraźnie trudniejsze niż w latach ubiegłych; w efekcie trudność sześciu zadań konkursowych też była wyższa od wieloletniej przeciętnej.

Uczniowie oraz zastępcy przewodniczących delegacji przebywali w Rumunii od 13 do 23 lipca i byli zakwaterowani w miasteczku akademickim politechniki bukareszteńskiej. Przewodniczący delegacji przebywali także w Bukareszcie od 15 do 22 lipca, i tam się odbyło końcowe posiedzenie Jury.

Zawody Olimpiady odbyły się w piątek i sobotę 16 i 17 lipca w salach politechniki. Każdego dnia uczniowie rozwiązywali po trzy zadania, mając na to po cztery i pół godziny w porze przedpołudniowej — z wyjątkiem drużyny z Izraela, której uczestnicy otrzymali od władz swojego kraju stanowczy zakaz uczestniczenia w konkursie w sobotę, aż do późnych godzin wieczornych, kiedy święto szabatu wygasa. Uczniowie izraelscy rozwiązywali więc drugą porcję zadań w nocy z soboty na niedzielę, nie mając w ciągu całego dnia sobotniego możliwości kontaktu z kimkolwiek, znającym treść zadań. Wymagało to, rzecz jasna, uprzedniej zgody Jury Olimpiady. Precedensowe postanowienie, zezwalające uczniom z Izraela na pisanie pracy konkursowej w nietypowej porze, zostało podjęte przez Jury zwykłą większością głosów po długotrwałej dyskusji.

Nikt z uczestników Olimpiady nie zdobył maksymalnej liczby punktów (tzn. 42). Najlepszy wynik — 39 punktów — uzyskało trzech uczniów: Maksym Fedorczuk (Ukraina), Ştefan Horneţ (Rumunia) i Tamás Terpai (Węgry). Jury przyznało 38 złotych medali zawodnikom, którzy uzyskali co najmniej 28 punktów, 70 srebrnych medali zawodnikom, którzy uzyskali od 19 do 27 punktów oraz 118 brązowych medali zawodnikom, którzy uzyskali od 12 do 18 punktów. Tak niskie ustawienie progów punktowych było oczywiście wynikiem wspomnianej wcześniej trudności zadań, nietypowo wysokiej.

Wszyscy uczniowie polscy zdobyli medale: Eryk Kopczyński — medal złoty, pozostali — medale brązowe. Wyniki Polaków: Kopczyński 29 p., Kapustka 17 p., Zalewski 17 p., Matuszewski 15 p., Buciak 13 p., Parys 13 p. Ramowe zestawienie wyników Olimpiady (według państw) przedstawia załączona tabela.

We wtorek 20 lipca zorganizowano wycieczkę krajoznawczą: zwiedziliśmy interesujący, eklektyczny pałac Peleş w miejscowości Sinaia oraz wspaniały, znakomicie zachowany w swej oryginalnej postaci, średniowieczny zamek Bran; jadąc autobusem mogliśmy podziwiać efektowne górskie krajobrazy Karpat Południowych. Następnego dnia odbyła się uroczystość wręczania medali oraz zakończenia Olimpiady. Przewodniczący delegacji Korei Południowej zaprosił wszystkie obecne państwa do uczestnictwa w XLI Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Korei Pd. w lipcu 2000 roku.

Przewodniczący delegacji polskiej
Marcin E. Kuczma

Wyniki XL Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej
(medale oraz łączna liczba punktów
zdobytych przez zawodników z poszczególnych państw)

Państwo	Liczba medali złotych	Liczba medali srebrnych	Liczba medali brązowych	Liczba zdobytych punktów
1. Rosja 1)	4	2		182
2. Chiny	4	2		182
3. Wietnam	3	3		177
4. Rumunia	3	3		173
5. Bułgaria	3	3		170
6. Białoruś	3	3		167
7. Korea Pd. 2)	3	3		164
8. Iran	2	4		159
9. Tajwan 3)	1	5		153
10. USA	2	3	1	150
11. Węgry	1	4	1	147
12. Ukraina	2	2	1	136
13. Japonia	2	4		135
14. Jugosławia	1	2	3	130
15. Australia	1	1	3	116
16. Turcja	1	1	4	109
17. Niemcy		2	4	108
18. Indie		3	3	107
19. Polska	1		5	104
20. Wielka Brytania 4)		3	2	100
21. Słowacja		2	3	88
22. Łotwa	1	1		86
23. Włochy		1	2	82
24. Szwajcaria		1	3	79
25. Mongolia		2	1	78
26. Izrael			5	78
27. Kuba		1	4	77
28. Afryka Pd.		1	1	77
29. Austria		1	2	75
30. Brazylia			4	75
31. Holandia			4	74
32. Kanada			3	74
33. Francja		1	2	73
34. Hong Kong			4	73
35. Kazachstan			4	72
36. Macedonia 5)			5	71
37. Singapur			4	71
38. Gruzja		1	1	68
39. Norwegia		1	2	67
40. Armenia			3	67
41. Szwecja			3	66
42. Chorwacja			2	66
43. Finlandia		1		65
44. Bośnia i Hercegowina			3	65
45. Argentyna			3	63
46. Hiszpania			1	60
47. Grecja		2		57
48. Tajlandia			3	57

Wyniki XL Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej
(ciąg dalszy)

Państwo	Liczba medali złotych	Liczba medali srebrnych	Liczba medali brązowych	Liczba zdobytych punktów
49. Kolumbia		1	1	55
50. Czechy [6)]			1	55
51. Litwa			2	54
52. Meksyk			1	53
53. Nowa Zelandia			1	53
54. Dania (5)			2	51
55. Belgia			2	51
56. Mołdawia [7)]			1	50
57. Maroko			1	48
58. Słowenia			2	46
59. Uzbekistan				42
60. Islandia			1	41
61. Macau				41
62. Irlandia			1	38
63. Malezja				37
64. Cypr				35
65. Indonezja				35
66. Azerbajdżan			1	34
67. Albania (5)				34
68. Trynidad i Tobago				33
69. Estonia (4)			1	30
70. Portugalia				29
71. Luksemburg (2)			1	26
72. Urugwaj (5*)				25
73. Filipiny (4)				24
74. Tunezja (4)				22
75. Gwatemala				19
76. Kirgizja (5**)				15
77. Turkmenia (2)				13
78. Peru (2)				10
79. Kuwejt (4)				10
80. Wenezuela (2)				8
81. Sri Lanka (1)				6

Nazwy państw w brzmieniu oficjalnym (używanym przez organizatorów):

[1)] Federacja Rosyjska

[2)] Korea

[3)] Chiński Tajwan

[4)] Zjednoczone Królestwo

[5)] Dawna Jugosłowiańska Republika Macedonii

[6)] Republika Czeska

[7)] Republika Mołdawii

Cyfra w nawiasie po nazwie państwa oznacza liczbę uczniów uczestniczących w Olimpiadzie (jeśli była ona mniejsza niż 6).

* Urugwaj: zarejestrowano 5 zawodników, ale pracę pisało tylko 4 zawodników;

** Kirgizja: zarejestrowano 5 zawodników, ale pracę pisało tylko 3 zawodników.

Dziesiąte Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich
Baltic Way '99

Sprawozdanie

W dniach 4–8 listopada 1999 r. odbyły się w Reykjaviku (Islandia) Dziesiąte Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich *Baltic Way '99*. W zawodach tych uczestniczyły delegacje następujących państw: Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Polski i Szwecji. Delegacja polska miała następujący skład:

— dr Maciej Bryński — przewodniczący,

— mgr Waldemar Pompe — zastępca przewodniczącego,

— Lech Duraj — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego w Krakowie,

— Wojciech Kamiński — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego w Łodzi,

— Jarosław Mederski — uczeń klasy czwartej I Liceum Ogólnokształcącego w Bydgoszczy,

— Marcin Wojnarski — uczeń klasy czwartej Katolickiego Liceum Ogólnokształcącego Księży Pijarów w Krakowie,

— Dominik Wojtczak — uczeń klasy trzeciej III Liceum Ogólnokształcącego w Gdyni.

Jury złożone z przewodniczących wszystkich delegacji obradujące pod przewodnictwem prof. Roberta Magnusa wybrało spośród propozycji nadesłanych przez państwa uczestniczące w zawodach 20 zadań. Zawody odbyły się 6 listopada, trwały cztery i pół godziny i miały charakter zespołowy. Za poprawne rozwiązanie każdego zadania drużyna mogła otrzymać 5 punktów. Oceny za rozwiązania poszczególnych zadań były uzgadniane przez przewodniczących delegacji i ich zastępców z koordynatorami — matematykami islandzkimi. Drużyna polska złożyła rozwiązania 18 zadań, spośród których 14 uzyskało maksymalną ocenę, pozostałe rozwiązania oceniono niżej.

Poszczególne drużyny uzyskały w zawodach następujące wyniki:

1. Estonia 90 pkt.
2. Szwecja 89 pkt.
3. Norwegia 87 pkt.
4. **Polska 79 pkt.**
5. Finlandia 76 pkt.
6. Łotwa 72 pkt.
7. Niemcy 68 pkt.
8. Islandia 64 pkt.
9. Dania 61 pkt.
10. Litwa 60 pkt.

Drużyna estońska otrzymała puchar przechodni. Zawodnicy drużyn sklasyfikowanych na pierwszych trzech pozycjach otrzymali dyplomy zwycięzców. Ponadto wszyscy zawodnicy otrzymali dyplomy uczestnictwa.

Następna Olimpiada Matematyczna Państw Bałtyckich odbyła się w listopadzie 2000 roku w Norwegii.

Maciej Bryński

TEKSTY ZADAŃ

Zawody stopnia pierwszego

1. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Dowieść, że suma sześcianów wszystkich liczb naturalnych mniejszych od n, względnie pierwszych z n, dzieli się przez n.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek
$$\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle ABC\,.$$
Punkt D leży na boku BC, przy czym $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$. Dowieść, że
$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\,.$$

3. Suma liczb dodatnich a, b, c równa jest 1. Udowodnić, że
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leqslant 1\,.$$

4. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb naturalnych, dla których liczby $a^3+6ab+1$ i $b^3+6ab+1$ są sześcianami liczb naturalnych.

6. Punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC, w którym kąt C jest prosty. Punkty P, Q i R są odpowiednio rzutami punktu X na boki BC, CA i AB. Udowodnić, że równość
$$AR\cdot RB = BP\cdot PC + AQ\cdot QC$$
zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na boku AB.

7. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i dowolnej liczby $t \in (\frac{1}{2},1)$ istnieją takie liczby $a,b \in (1999,2000)$, że
$$\tfrac{1}{2}a^n + \tfrac{1}{2}b^n < (ta + (1-t)b)^n.$$

8. Liczby $c(n,k)$ są określone dla liczb całkowitych nieujemnych $n \geqslant k$ w ten sposób, że zachodzą równości:
$$c(n,0) = c(n,n) = 1 \qquad \text{dla każdej liczby } n \geqslant 0,$$
$$c(n{+}1,k) = 2^k c(n,k) + c(n,k{-}1) \qquad \text{dla } n \geqslant k \geqslant 1.$$
Dowieść, że $c(n,k) = c(n,n{-}k)$ dla $n \geqslant k \geqslant 0$.

9. Dane są takie liczby całkowite dodatnie m i n, że $mn \mid m^2+n^2+m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby całkowitej.

10. W przestrzeni dane są trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Niech ω będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt O, zaś A', B', C' – rzutami punktów A, B, C odpowiednio na płaszczyznę ω. Wyznaczyć zbiór wartości wyrażenia

$$(OA')^2 + (OB')^2 + (OC')^2$$

dla wszystkich płaszczyzn ω.

11. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz zbiór M, złożony z n^2+1 różnych liczb całkowitych dodatnich i mający następującą własność: wśród $n+1$ liczb dowolnie wybranych ze zbioru M znajduje się para liczb, z których jedna dzieli się przez drugą. Udowodnić, że w zbiorze M istnieją różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ spełniające warunek: dla $i = 1, 2, \ldots, n$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1}.

12. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Okręgi opisane na trójkątach AEF, BFD, CDE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że jeżeli

$$\frac{PD}{PE} = \frac{BD}{AE}, \qquad \frac{PE}{PF} = \frac{CE}{BF}, \qquad \frac{PF}{PD} = \frac{AF}{CD},$$

to AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC.

Zawody stopnia drugiego

1. Rozstrzygnąć, czy każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w postaci

$$\frac{a^2 + b^3}{c^5 + d^7},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi.

2. Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D różnym od A. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na prostą AD. Dowieść, że

$$AD \geqslant BK + CL.$$

3. Na polach szachownicy $n \times n$ rozmieszczono n^2 różnych liczb całkowitych, po jednej na każdym polu. W każdej kolumnie pole z największą liczbą pomalowano na czerwono. Zbiór n pól szachownicy nazwiemy *dopuszczalnym*, jeżeli żadne dwa z tych pól nie znajdują się w tym samym wierszu, ani w tej samej kolumnie. Spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych wybrano zbiór, dla którego suma liczb umieszczonych na jego polach jest największa. Wykazać, że w tak wybranym zbiorze jest czerwone pole.

4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Proste BI i CI przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E. Wyznaczyć wszystkie miary kąta BAC, dla których może zachodzić równość $DI = EI$.

5. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$f(f(n)) = 2n.$$

6. Wielomian $w(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla całkowitych x wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Dowieść, że wielomian $w(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

Zawody stopnia trzeciego

1. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$.
Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ układu równań

$$\begin{cases} x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ x_4 + x_3^2 = 4x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \\ x_1 + x_n^2 = 4x_n \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ.$$

3. Ciąg liczb naturalnych (p_n) spełnia następujące warunki:
1° p_1 i p_2 są liczbami pierwszymi,
2° dla $n \geqslant 3$ liczba p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby

$$p_{n-1} + p_{n-2} + 2000.$$

Udowodnić, że ciąg (p_n) jest ograniczony.

4. W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2 \ldots A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3, \ldots, B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach $A_2S, A_3S, \ldots, A_nS$, że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

5. Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą liczbę k o następującej własności. Z dowolnego k-elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$ można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta.

6. Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x

$$P(x^2-1) = (P(x))^2 - 1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x) = x.$$

XL Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

1. Wyznaczyć wszystkie zbiory skończone S na płaszczyźnie, złożone z co najmniej trzech punktów i spełniające następujący warunek: Dla każdych dwóch różnych punktów A i B zbioru S, symetralna odcinka AB jest osią symetrii zbioru S.

2. Niech $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną.

(a) Wyznaczyć najmniejszą stałą C taką, że nierówność

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \Big)^4$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$.

(b) Dla tej stałej C ustalić, kiedy zachodzi równość.

3. Rozważmy planszę kwadratową $n \times n$, gdzie n jest daną dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Plansza jest podzielona na n^2 kwadratów jednostkowych. Dwa różne kwadraty planszy są *przyległe*, gdy mają wspólny bok. N kwadratów planszy zostało wyróżnionych w taki sposób, by każdy kwadrat planszy (wyróżniony lub nie) był przyległy do co najmniej jednego kwadratu wyróżnionego. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość N.

4. Wyznaczyć wszystkie takie pary (n,p) liczb całkowitych dodatnich, że: p jest liczbą pierwszą, $n \leqslant 2p$ oraz $(p-1)^n + 1$ dzieli się przez n^{p-1}.

5. Okręgi Γ_1 i Γ_2 są położone wewnątrz okręgu Γ i są odpowiednio styczne do Γ w różnych punktach M i N. Okrąg Γ_1 przechodzi przez środek okręgu Γ_2. Prosta przechodząca przez punkty przecięcia okręgów Γ_1 i Γ_2 przecina okrąg Γ w punktach A i B. Proste MA i MB przecinają Γ_1 odpowiednio w punktach C i D. Udowodnić, że prosta CD jest styczna do okręgu Γ_2.

6. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

XXII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

1. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech $M=\{1,2,\ldots,n\}$. Wyznaczyć liczbę uporządkowanych szóstek zbiorów $(A_1,A_2,\ldots,A_6)$ spełniających następujące dwa warunki:

(a) zbiory $A_1,A_2,\ldots,A_6$ są (niekoniecznie różnymi) podzbiorami zbioru M;

(b) każdy element zbioru M albo nie należy do żadnego, albo należy do dokładnie trzech, albo należy do wszystkich sześciu zbiorów $A_1,A_2,\ldots,A_6$.

2. Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą C_1 i najmniejszą liczbę rzeczywistą C_2 takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzą następujące nierówności

$$C_1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}<C_2.$$

3. Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie takie układy n funkcji $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$, gdzie $f_i\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dla każdego $i=1,2,\ldots,n$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned}
f_1(x)-f_2(x)f_2(y)+f_1(y)&=0\\
f_2(x^2)-f_3(x)f_3(y)+f_2(y^2)&=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
f_k(x^k)-f_{k+1}(x)f_{k+1}(y)+f_k(y^k)&=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
f_n(x^n)-f_1(x)f_1(y)+f_n(y^n)&=0
\end{aligned}$$

4. Dany jest trójkąt ABC. Przez punkt P leżący wewnątrz trójkąta ABC prowadzimy trzy proste k, l, m w taki sposób, że:

(a) prosta k przecina proste AB i AC odpowiednio w takich punktach A_1 i A_2 ($A_1\neq A_2$), że $PA_1=PA_2$;

(b) analogicznie prosta l przecina proste BC i BA odpowiednio w takich punktach B_1 i B_2 ($B_1\neq B_2$), że $PB_1=PB_2$;

(c) analogicznie prosta m przecina proste CA i CB odpowiednio w takich punktach C_1 i C_2 ($C_1\neq C_2$), że $PC_1=PC_2$.

Udowodnić, że proste k, l, m są przez te warunki wyznaczone jednoznacznie. Wyznaczyć punkt P (i udowodnić, że jest tylko jeden taki punkt), dla którego trójkąty AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 mają równe pola.

5. Ciąg liczb całkowitych (a_n) spełnia następującą zależność rekurencyjną:

$$a_{n+1}=a_n^3+1999$$

dla $n=1,2,\ldots$. Udowodnić, że istnieje co najwyżej jedna wartość n, dla której a_n jest kwadratem liczby całkowitej.

6. Rozwiązać następujący układ równań

$$x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^4 = 1 \quad (n = 1,2,\ldots,1999)$$
$$x_0 = x_{1999}$$

w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych.

7. Wyznaczyć wszystkie takie pary (x,y) liczb całkowitych dodatnich, że

$$x^{x+y} = y^{y-x}.$$

8. Dana jest prosta g i punkty P, Q, S leżące po tej samej stronie tej prostej. Punkty M i N leżą na prostej g, przy czym $PM \perp g$ i $QN \perp g$. Punkt S leży między prostymi PM i QN. Ponadto $PM = PS$ i $QN = QS$. Symetralne odcinków SM i SN przecinają się w punkcie R. Prosta RS przecina okrąg opisany na trójkącie PQR w punkcie T różnym od R. Udowodnić, że punkt S jest środkiem odcinka RT.

9. Punktem kratowym nazywamy punkt płaszczyzny, który ma współrzędne całkowite. Rozważamy następującą grę jednoosobową. Pozycja w grze składa się ze skończonego zbioru zaznaczonych punktów kratowych i ze skończonego zbioru zaznaczonych odcinków spełniających następujące warunki:

(a) końce każdego zaznaczonego odcinka są zaznaczonymi punktami kratowymi;

(b) każdy zaznaczony odcinek jest równoległy do jednej osi układu współrzędnych lub do jednej z dwóch prostych o równaniach $y = x$, $y = -x$;

(c) każdy zaznaczony odcinek zawiera dokładnie 5 punktów kratowych i każdy z tych punktów jest zaznaczony;

(d) dowolne dwa zaznaczone odcinki mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Ruch w grze polega na zaznaczeniu nowego punktu kratowego, a następnie zaznaczeniu odcinka w taki sposób, by powstała nowa pozycja w grze. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka pozycja początkowa w grze, że możliwe jest wykonanie nieskończonego ciągu ruchów.

X Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

1. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające układ równań:

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1 \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9 \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 9 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 9 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że pierwiastek trzeciego stopnia z n powstaje przez odrzucenie trzech ostatnich cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby n.

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 3$, że nierówność
$$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1 \leqslant 0$$
zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych $a_1,a_2,\ldots,a_n$ spełniających równość $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$.

4. Dla liczb rzeczywistych dodatnich x, y określamy
$$f(x,y)=\min\left(x,\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$
Udowodnić, że istnieją takie liczby x_0, y_0, że $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ dla wszystkich liczb dodatnich x, y. Wyznaczyć $f(x_0,y_0)$.

5. Styczna w punkcie o współrzędnych (a,b) do okręgu $x^2+y^2=1$ ma z parabolą $y=x^2+1$ dokładnie jeden punkt wspólny. Wyznaczyć wszystkie punkty (a,b) o powyższej własności.

6. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, którą potrzebuje skoczek szachowy, aby przejść z jednego narożnika szachownicy $n \times n$ (gdzie $n \geqslant 4$) do narożnika przeciwległego?

7. Dwa różne pola szachownicy 8×8 nazwiemy *sąsiadującymi*, jeżeli mają wspólny bok lub wspólny wierzchołek. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, aby król szachowy zaczynając od pewnego pola szachownicy 8×8 odwiedził wszystkie pola dokładnie raz według następującej reguły: W każdym etapie podróży (licząc od trzeciego odwiedzonego pola) król stoi na polu sąsiadującym z parzystą liczbą pól, które już odwiedził.

8. Mamy do dyspozycji 1999 monet, z których każde dwie mają różny ciężar. Dysponujemy urządzeniem, które pozwala spośród dowolnych trzech monet wskazać tę, której ciężar zawiera się pomiędzy ciężarami dwóch pozostałych. Dowieść, że moneta tysięczna pod względem ciężaru może być wyznaczona przez nasze urządzenie stosowane nie więcej niż 1 000 000 razy. Udowodnić, że za pomocą tego urządzenia miejsce w ciągu ciężarów można wyznaczyć tylko dla tej monety.

9. Sześcian o krawędzi 3 podzielono na 27 sześcianów jednostkowych, które ponumerowano w sposób dowolny liczbami $1,2,\ldots,27$. Tworzymy 27 możliwych sum w poszczególnych rzędach (jest dziewięć takich sum w każdym z trzech kierunków równoległych do krawędzi sześcianu, każda suma o trzech składnikach). Co najwyżej ile spośród tych 27 sum może być liczbą nieparzystą?

10. Czy można koło o promieniu 1 (łącznie z brzegiem) rozdzielić na trzy takie podzbiory, że żaden z nich nie zawiera dwóch punktów odległych o 1?

11. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnić, że istnieje taki okrąg przechodzący przez trzy z tych punktów, że czwarty punkt leży na okręgu lub w jego wnętrzu.

12. W trójkącie ABC zachodzi równość $2AB = AC + BC$. Udowodnić, że następujące cztery punkty: środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, środek okręgu opisanego oraz środki boków AC i BC, leżą na jednym okręgu.

13. W trójkącie ABC dwusieczne kątów A i B przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Ponadto $AE + BD = AB$. Wyznaczyć miarę kąta C.

14. W trójkącie równoramiennym ABC równe są boki AB i AC. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC. Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do AC przecina prostą DE w punkcie F. Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{AD}{AE},$$

gdzie $[PQRS]$ oznacza pole czworokąta $PQRS$.

15. W trójkącie ABC zachodzi $\sphericalangle C = 60^\circ$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC i spełnia $BD = AC$. Bok AC przedłużono do punktu E tak, aby $AC = CE$. Udowodnić, że $AB = DE$.

16. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, którą można przedstawić w postaci $k = 19^n - 5^m$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n.

17. Czy istnieje taki skończony ciąg liczb całkowitych $c_1, c_2, \ldots, c_n$, że każda z liczb $a + c_1$, $a + c_2$, ..., $a + c_n$ jest pierwsza dla więcej niż jednej, ale tylko dla skończenie wielu różnych liczb całkowitych a ?

18. Liczba całkowita dodatnia m daje z dzielenia przez 4 resztę 2. Dowieść, że istnieje co najwyżej jeden rozkład $m = ab$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi

$$0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m+1}}.$$

19. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich parzystych k, że dla każdej liczby pierwszej p liczba $p^2 + k$ jest złożona.

20. Liczby a, b, c, d są pierwsze oraz spełniają warunki $a > 3b > 6c > 12d$, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażenia

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

ROZWIĄZANIA ZADAŃ [1]

Zawody stopnia pierwszego

Zadanie **1.** Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Udowodnić, że suma sześcianów wszystkich liczb naturalnych mniejszych od n, względnie pierwszych z n, dzieli się przez n.

Rozwiązanie

Każda liczba naturalna mniejsza od n i względnie pierwsza z n jest równa k lub $n-k$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną mniejszą od $n/2$ i względnie pierwszą z n. Zatem dana w zadaniu suma sześcianów jest równa

$$\sum_{\substack{1\leqslant k<n/2\\ (k,n)=1}} \Big(k^3+(n-k)^3\Big) = \sum_{\substack{1\leqslant k<n/2\\ (k,n)=1}} \Big(n^3-3kn^2+3k^2n\Big) = n\cdot \sum_{\substack{1\leqslant k<n/2\\ (k,n)=1}} \Big(n^2-3kn+3k^2\Big),$$

a więc jest podzielna przez n.

Uwaga

Znacznie trudniejszym zadaniem jest wykazanie, że dana w zadaniu suma dzieli się przez n^2 w przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą.

Zadanie **2.** W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek

$$\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle ABC\,.$$

Punkt D leży na boku BC, przy czym $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$. Dowieść, że

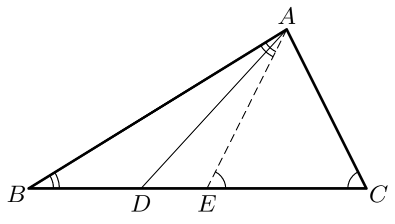
$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie

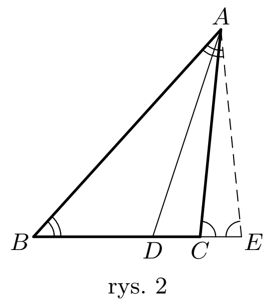
Wykażemy, że równość (1) jest prawdziwa dla dowolnego trójkąta ABC, niekoniecznie ostrokątnego.

Sposób I

Niech E będzie takim punktem półprostej $BC^{\rightarrow}$, że AD jest dwusieczną kąta BAE (rys. 1 i 2).



rys. 1



rys. 2

[1] Na podstawie materiałów Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej oraz prac uczestników opracowali *Waldemar Pompe* i *Jarosław Wróblewski*.

Wówczas $\sphericalangle EBA = \sphericalangle EAB$. Jeżeli punkt E leży na boku BC (rys. 1), to

$$\sphericalangle AEC = 2\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACE.$$

Jeśli natomiast punkt E nie leży na boku BC (rys. 2), to

$$\sphericalangle AEC = 180^\circ - 2\sphericalangle ABE = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACE.$$

Zatem w obu przypadkach $BE = AE = AC$. Na mocy twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{BD}{AB} + \frac{BD}{AC} = \frac{DE}{AE} + \frac{BD}{AE} = \frac{BE}{AE} = 1,$$

co należało udowodnić.

Sposób II

Oznaczmy: $\alpha = \sphericalangle ABC$ (rys. 3). Wówczas

$$\sphericalangle ACB = 2\alpha, \quad \sphericalangle BAD = \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sphericalangle ADB = 180^\circ - \tfrac{3}{2}\alpha. \tag{2}$$

Dowodzoną równość (1) przepisujemy w postaci

$$\frac{AB}{BD} = 1 + \frac{AB}{AC}, \tag{3}$$

co na mocy twierdzenia sinusów oraz zależności (2) możemy przepisać jako

$$\frac{\sin(180^\circ - \frac{3}{2}\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = 1 + \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

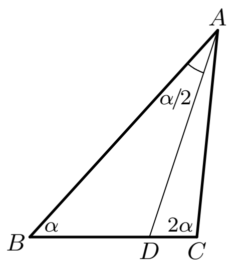
Przekształcając równoważnie powyższy związek uzyskujemy po kolei:

$$\frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = 1 + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = 1 + 2\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha + 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1 + 2\cos\alpha,$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1 + \cos\alpha.$$



rys. 3

Otrzymana równość jest prawdziwa dla dowolnego kąta α, co kończy dowód zależności (3).

Zadanie **3.** Suma liczb dodatnich a, b, c równa jest 1. Udowodnić, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie

Wystarczy dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leqslant (a+b+c)^2.$$

Przekształcając równoważnie powyższą zależność otrzymujemy

$$\sqrt{3abc(a+b+c)} \leqslant ab+bc+ca.$$

Wykonując podstawienie $x=bc$, $y=ca$, $z=ab$, sprowadzamy dowodzoną nierówność do postaci

$$\sqrt{3(xy+yz+zx)} \leqslant x+y+z.$$

Podnosząc do kwadratu obie strony ostatniej nierówności i przekształcając równoważnie otrzymujemy

$$xy+yz+xz \leqslant x^2+y^2+z^2 \quad \text{lub} \quad (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0,$$

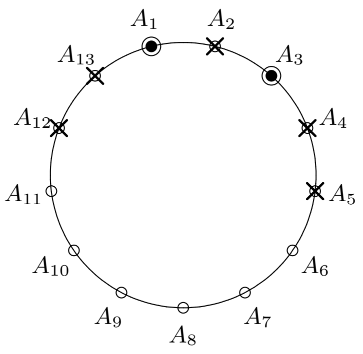
co jest prawdą.

Zadanie **4.** Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

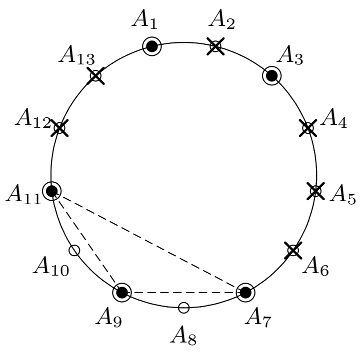
Rozwiązanie

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_{13}$ będą wierzchołkami dowolnego 13-kąta foremnego wpisanego w dany okrąg. Wykażemy, że wśród dowolnych pięciu wierzchołków tego 13-kąta znajdą się trzy, będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Ponieważ wśród dowolnych trzynastu punktów danego okręgu zawsze znajdzie się pięć pomalowanych tym samym kolorem, zadanie zostanie rozwiązane.

Przypuśćmy więc, że udało się tak wybrać pięć wierzchołków spośród $A_1, A_2, \ldots, A_{13}$, że żadne trzy spośród wybranych punktów nie tworzą trójkąta równoramiennego.



rys. 4

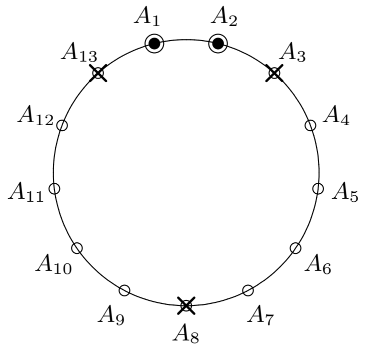


rys. 5

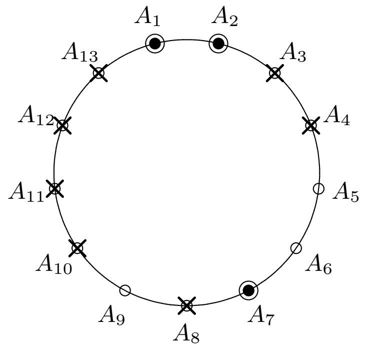
Załóżmy najpierw, że wśród wybranych punktów nie ma dwóch sąsiednich wierzchołków 13-kąta $A_1 A_2 \ldots A_{13}$. Wówczas wśród wybranych punktów znajdziemy dwa oddzielone dokładnie jednym wierzchołkiem, który nie został wybrany. Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy przyjąć, że są to A_1 i A_3. Ponieważ żadne trzy wybrane wierzchołki nie tworzą trójkąta równoramiennego, więc nie został wybrany żaden z punktów: A_{12}, A_{13}, A_2, A_4, A_5 (rys. 4).

Ponieważ trójkąt $A_1A_6A_{11}$ jest równoramienny, więc co najmniej jeden z wierzchołków A_6, A_{11} nie został wybrany. Bez straty ogólności rozumowania możemy przyjąć, że tym wierzchołkiem jest A_6. Zatem spośród pięciu punktów A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11} dokładnie trzy zostały wybrane, przy czym żadne dwa z nich nie są kolejnymi wierzchołkami 13-kąta $A_1A_2\ldots A_{13}$. Musiały więc zostać wybrane punkty A_7, A_9, A_{11}. To jednak nie jest możliwe, gdyż punkty te tworzą trójkąt równoramienny (rys. 5). Otrzymaliśmy sprzeczność.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym wśród wybranych wierzchołków znajdują się dwa sąsiednie, powiedzmy A_1 i A_2. Oznacza to, że nie został wybrany żaden z wierzchołków: A_{13}, A_3, A_8 (rys. 6).



rys. 6



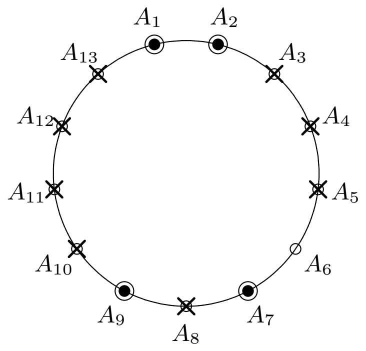
rys. 7

Ponieważ trójkąty $A_2A_4A_6$, $A_1A_6A_{11}$, $A_{11}A_1A_4$ są równoramienne, więc został wybrany co najwyżej jeden z punktów: A_4, A_6, A_{11}. Analogicznie stwierdzamy, że został wybrany co najwyżej jeden z punktów: A_5, A_{10}, A_{12}. Zatem wybrany być musiał co najmniej jeden z punktów A_7, A_9. Bez straty ogólności przyjmijmy, że został wybrany punkt A_7 (rys. 7). Równoramienność trójkątów: $A_1A_4A_7$, $A_2A_{10}A_7$, $A_2A_{11}A_7$ oraz $A_2A_{12}A_7$ dowodzi, że nie wybrano punktów: A_4, A_{10}, A_{11} oraz A_{12}.

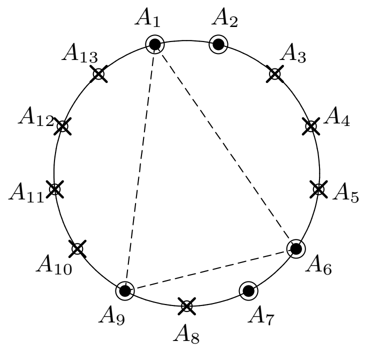
Zatem wśród wybranych pięciu punktów muszą być dwa spośród A_5, A_6, A_9. Z uwagi na równoramienność trójkąta $A_5A_6A_7$ wybrany mógł być tylko jeden z punktów A_5, A_6. Zatem wybranym punktem jest A_9 (rys. 8). To z kolei oznacza, że nie został wybrany punkt A_5, gdyż trójkąt $A_5A_7A_9$ jest równoramienny.

Tak więc piątym z wybranych punktów musi być A_6, co daje sprzeczność, gdyż trójkąt $A_9A_1A_6$ jest równoramienny (rys. 9).

Tym samym wykazaliśmy, że wybór pięciu wierzchołków 13-kąta, z których żadne trzy nie wyznaczają trójkąta równoramiennego, nie jest możliwy, co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 8



rys. 9

Uwaga 1.

Można również udowodnić, że wierzchołków 11-kąta foremnego nie da się pokolorować trzema kolorami tak, aby żadne trzy wierzchołki jednego koloru nie wyznaczały trójkąta równoramiennego. Jednak wybór czterech wierzchołków 11-kąta foremnego, z których żadne trzy nie wyznaczają trójkąta równoramiennego, jest możliwy.

Uwaga 2.

Znacznie mocniejszy rezultat można uzyskać korzystając z poniższego, niełatwego do udowodnienia, twierdzenia.

Twierdzenie van der Waerdena

Dla dowolnych liczb naturalnych k i m istnieje taka liczba naturalna n, że dla dowolnego podziału zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$ na k rozłącznych podzbiorów, co najmniej jeden z tych podzbiorów zawiera m-wyrazowy postęp arytmetyczny.

W oparciu o powyższe twierdzenie rozwiążemy następujące zadanie.

Zadanie

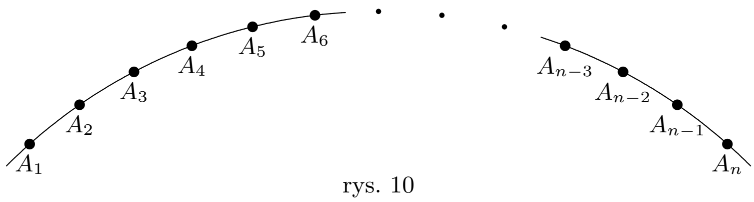
Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z l kolorów, gdzie l jest dowolną liczbą naturalną. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązanie

Niech n będzie liczbą dobraną na podstawie twierdzenia van der Waerdena do liczb $k=l$ oraz $m=3$. Wybierzmy na okręgu punkty $A_1,A_2,\ldots,A_n$ rozmieszczone w równych odległościach i na tyle blisko siebie, aby wszystkie one zmieściły się na półokręgu (rys. 10).

Zbiór $\{1,2,\ldots,n\}$ został tym samym podzielony na l rozłącznych podzbiorów według zasady: liczby i, j należą do tego samego podzbioru wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A_i, A_j są tego samego koloru.

Na mocy twierdzenia van der Waerdena znajdziemy liczby i, $i+r$, $i+2r$ należące do jednego z rozpatrywanych podzbiorów. To oznacza, że punkty A_i, A_{i+r}, A_{i+2r} są tego samego koloru. Oczywiście trójkąt $A_iA_{i+r}A_{i+2r}$ jest równoramienny.



rys. 10

Uwaga 3.

W znanych dowodach twierdzenia van der Waerdena wartość n, którą otrzymuje się z dowodu, jest na ogół daleka od optymalnej. Udowodniono, że dla $m=3$ oraz $k\leqslant 4$ najmniejsza liczba n spełniająca tezę twierdzenia van der Waerdena jest równa

$$9 \text{ dla } k=2, \quad 27 \text{ dla } k=3 \quad \text{oraz} \quad 76 \text{ dla } k=4.$$

Zadanie **5.** Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb naturalnych, dla których liczby $a^3+6ab+1$ i $b^3+6ab+1$ są sześcianami liczb naturalnych.

Rozwiązanie

Niech a i b będą liczbami spełniającymi warunki zadania. Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $a\leqslant b$. Wówczas

$$b^3 < b^3+6ab+1 \leqslant b^3+6b^2+1 < b^3+6b^2+12b+8 = (b+2)^3 .$$

Skoro liczba $b^3+6ab+1$ jest sześcianem liczby całkowitej, to musi zachodzić równość

$$(1) \qquad b^3+6ab+1 = (b+1)^3 ,$$

Przekształcając równoważnie powyższy związek otrzymujemy po kolei

$$b^3+6ab+1 = b^3+3b^2+3b+1 ,$$

$$2ab = b(b+1) ,$$

$$(2) \qquad b = 2a-1 .$$

Pozostaje rozstrzygnąć, dla jakich par (a,b) spełniających warunek (2) liczba

$$a^3+6ab+1$$

jest sześcianem liczby całkowitej. Na mocy zależności (2) powyższa liczba jest równa a^3+12a^2-6a+1. Z nierówności

$$a^3 \leqslant a^3+6a^2-6a < a^3+12a^2-6a+1 < a^3+12a^2+48a+64 = (a+4)^3$$

wynika, że jeżeli liczba a^3+12a^2-6a+1 jest sześcianem liczby całkowitej, to jest ona równa $(a+1)^3$, $(a+2)^3$ lub $(a+3)^3$. Należy więc rozważyć trzy przypadki:

(a) $a^3+12a^2-6a+1=(a+1)^3$.
Wówczas otrzymujemy $9a^2-9a=0$, skąd $a=0$ lub $a=1$.

(b) $a^3+12a^2-6a+1=(a+2)^3$.
Stąd mamy $6a^2-18a-7=0$. Uzyskane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych, gdyż lewa strona nie jest podzielna przez 3, a prawa jest.

(c) $a^3+12a^2-6a+1=(a+3)^3$.
Wtedy uzyskujemy $3a^2-33a-26=0$. Podobnie jak w przypadku (b), otrzymane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych, gdyż lewa strona nie jest podzielna przez 3, a prawa jest równa 0.

Ostatecznie znaleźliśmy tylko jedną parę $(a,b)=(1,1)$ spełniającą warunki zadania.

Zadanie **6.** Punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC, w którym kąt C jest prosty. Punkty P, Q i R są odpowiednio rzutami punktu X na boki BC, CA i AB. Udowodnić, że równość

$$AR\cdot RB=BP\cdot PC+AQ\cdot QC$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na boku AB.

Rozwiązanie

Wprowadźmy dla zwięzłości zapisu następujące oznaczenie:

$$w=2\cdot(AR\cdot RB-BP\cdot PC-AQ\cdot QC).$$

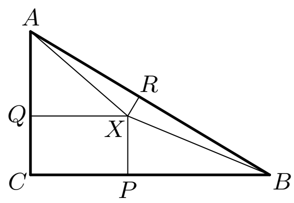
Należy wykazać, że $w=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $XR=0$.

Na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność (rys. 11):

$$(AR+RB)^2=(AQ+QC)^2+(CP+PB)^2.$$

Przekształcając równoważnie powyższą równość uzyskujemy po kolei:

$$w=AQ^2+QC^2+CP^2+PB^2-AR^2-RB^2$$
$$w=AQ^2+PX^2+QX^2+PB^2-AR^2-RB^2$$
$$w=AX^2+BX^2-AR^2-RB^2$$
$$w=2XR^2$$



rys. 11

Z ostatniej równości wynika natychmiast, że $w=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $XR=0$.

Zadanie **7.** Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i dowolnej liczby $t\in(\frac{1}{2},1)$ istnieją takie liczby $a,b\in(1999,2000)$, że

$$\tfrac{1}{2}a^n+\tfrac{1}{2}b^n<\big(ta+(1-t)b\big)^n.$$

Rozwiązanie

Niech $c=3999/2$. Liczb a, b szukamy w postaci $a=c+x$, $b=c-x$, gdzie $x\in(0,\frac{1}{2})$. Wówczas

$$\begin{aligned}(ta+(1-t)b)^n-\tfrac{1}{2}a^n-\tfrac{1}{2}b^n&=\\&=(ct+tx+(1-t)c-(1-t)x)^n-\tfrac{1}{2}(c+x)^n-\tfrac{1}{2}(c-x)^n=\\&=(c+(2t-1)x)^n-\tfrac{1}{2}(c+x)^n-\tfrac{1}{2}(c-x)^n=\\&=(c+sx)^n-\tfrac{1}{2}(c+x)^n-\tfrac{1}{2}(c-x)^n\,,\end{aligned}$$

gdzie $s=2t-1>0$. Po rozpisaniu ze wzoru dwumianowego Newtona ostatnie wyrażenie przyjmuje postać

$$w(x)=sx+x^2p(x)\,, \tag{1}$$

gdzie $p(x)$ jest pewnym wielomianem.

Chcemy wykazać, że dla pewnej liczby $y\in(0,\frac{1}{2})$, liczba $w(y)$ jest dodatnia. Z równości (1) wynika, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{w(x)}{x}=s>0.$$

Zatem istnieje taka liczba $y\in(0,\frac{1}{2})$, że wyrażenie $w(y)/y$, a co za tym idzie również wyrażenie $w(y)$, ma wartość dodatnią. To zaś kończy dowód.

Zadanie **8.** Liczby $c(n,k)$ są określone dla liczb całkowitych nieujemnych $n\geqslant k$ w ten sposób, że zachodzą równości:

$$c(n,0)=c(n,n)=1 \qquad \text{dla każdej liczby } n\geqslant 0,$$
$$c(n+1,k)=2^kc(n,k)+c(n,k-1) \qquad \text{dla } n\geqslant k\geqslant 1.$$

Dowieść, że $c(n,k)=c(n,n-k)$ dla $n\geqslant k\geqslant 0$.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych zdefiniowaną wzorami:

$$f(0)=1, \qquad f(m)=(2^1-1)(2^2-1)\cdots(2^m-1) \quad \text{dla } m\geqslant 1.$$

Niech ponadto

$$a(n,k)=\frac{f(n)}{f(k)f(n-k)} \qquad \text{dla } n\geqslant k\geqslant 0.$$

Wówczas $a(n,k)=a(n,n-k)$. Wykażemy, że $a(n,k)=c(n,k)$.

Ponieważ warunki dane w treści zadania wyznaczają jednoznacznie liczby $c(n,k)$, więc wystarczy dowieść, że liczby $a(n,k)$ spełniają te same warunki.

Oczywiście $a(n,0)=a(n,n)=1$. Ponadto

$$2^ka(n,k)+a(n,k-1)=\frac{2^kf(n)}{f(k)f(n-k)}+\frac{f(n)}{f(k-1)f(n-k+1)}=$$

$$= \frac{2^k f(n)(2^{n-k+1}-1)}{f(k)f(n-k)(2^{n-k+1}-1)} + \frac{f(n)(2^k-1)}{f(k-1)(2^k-1)f(n-k+1)} =$$

$$= f(n)\cdot\frac{2^k(2^{n-k+1}-1)+(2^k-1)}{f(k)f(n-k+1)} =$$

$$= f(n)\cdot\frac{2^{n+1}-1}{f(k)f(n+1-k)} = \frac{f(n+1)}{f(k)f(n+1-k)} = a(n+1,k)\,,$$

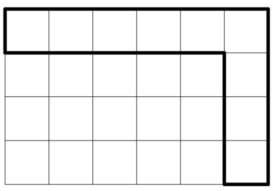
co dowodzi, że $a(n,k)=c(n,k)$.

Sposób II

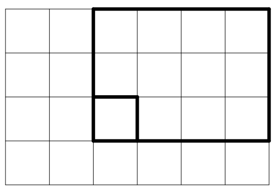
Dla liczb całkowitych nieujemnych k i l rozważamy szachownicę o $k+1$ kolumnach i $l+1$ wierszach. *Dopuszczalnym kolorowaniem* nazwiemy takie pokolorowanie pól szachownicy kolorami białym, zielonym i czerwonym, że spełnione są następujące warunki:

(a) Wszystkie pola górnego wiersza i prawej kolumny pomalowane są na biało (rys. 12).

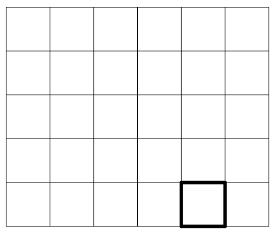
(b) Dla każdego pola pomalowanego na biało wszystkie pola leżące powyżej niego i wszystkie pola leżące na prawo od niego też są pomalowane na biało (rys. 13).



rys. 12



rys. 13



rys. 14

Niech $D(l,k)$ będzie liczbą wszystkich dopuszczalnych kolorowań szachownicy. Z uwagi na symetrię mamy $D(k,l)=D(l,k)$. Ponadto

(1) $$D(l,0)=D(0,k)=1 \quad \text{dla} \quad k,l \geqslant 0\,,$$

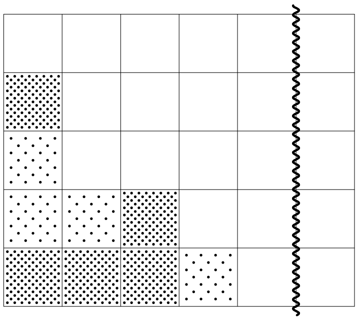
gdyż jedynym dopuszczalnym kolorowaniem szachownicy złożonej z jednego wiersza lub z jednej kolumny jest pomalowanie całej szachownicy na biało.

Wyznaczmy wartość $D(l+1,k)$ przy $k \geqslant 1$ oraz $l \geqslant 0$. Kolorowania szachownicy o $k+1$ kolumnach i $l+2$ wierszach można podzielić na dwa rodzaje według tego, czy dolne pole drugiej kolumny od prawej (rys. 14) jest pomalowane na biało, czy nie.

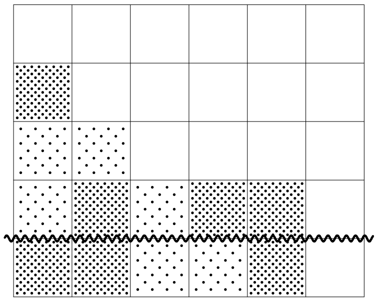
Jeżeli jest ono pomalowane na biało, to kolorowanie jest dopuszczalnym kolorowaniem szachownicy z usuniętą prawą kolumną (rys. 15), a takich kolorowań jest $D(l+1,k-1)$.

Jeżeli zaś jest ono pomalowane innym kolorem (rys. 16), to k pól dolnego wiersza jest pomalowanych w dowolny sposób dwoma kolorami (można to uczynić na 2^k sposobów), a pozostałe wiersze tworzą szachownicę pomalowaną w dopuszczalny sposób (można to zrobić na $D(l,k)$ sposobów). Dopuszczalnych kolorowań tego rodzaju jest więc $2^k D(l,k)$. Zatem

(2) $$D(l+1,k) = 2^k D(l,k) + D(l+1,k-1) \quad \text{dla} \quad k \geqslant 1,\ l \geqslant 0\,.$$



rys. 15



rys. 16

Przyjmijmy $b(n,k) = D(n-k,k)$. Wtedy wzory (1) i (2) przyjmują odpowiednio postaci

$$b(n,0) = b(n,n) = 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0$$

oraz

$$b(n{+}1,k) = 2^k b(n,k) + b(n,k{-}1) \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant k \leqslant n\,.$$

Stąd $b(n,k) = c(n,k) = D(n-k,k)$. Zatem

$$c(n,k) = D(n-k,k) = D(k,n-k) = c(n,n-k)\,.$$

Sposób III

Rozpatrzmy ciąg wielomianów: $P_0(x) = 1 = a(0,0)$,

$$P_n(x) = (x+1)(x+2^1)(x+2^2)\ldots(x+2^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} a(n,k)x^k \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Wówczas $a(n,0) = 2^{n(n-1)/2}$, $a(n,n) = 1$ dla wszystkich $n \geqslant 0$. Ponadto

$$P_{n+1}(x) = P_n(x)(x+2^n) \quad \text{oraz} \quad P_{n+1}(x) = 2^n(x+1)P_n(\tfrac{1}{2}x) \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0.$$

Porównując współczynniki w powyższych zależnościach rekurencyjnych uzyskujemy odpowiednio

(3) $$a(n{+}1,k) = 2^n a(n,k) + a(n,k{-}1) \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

oraz

(4) $$a(n{+}1,k) = 2^{n-k} a(n,k) + 2^{n-k+1} a(n,k{-}1) \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Niech $b(n,k) = a(n,k)/2^{(n-k)(n-1-k)/2}$. Wówczas

(5) $$b(n,0) = b(n,n) = 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0.$$

Ponadto zależności (3) i (4) przybierają odpowiednio postaci

$$b(n+1,k) = 2^k b(n,k) + b(n,k-1) \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{6}$$

oraz

$$b(n+1,k) = b(n,k) + 2^{n+1-k} b(n,k-1) \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{7}$$

Z równości (5) i (6) wynika, że liczby $b(n,k)$ spełniają tę samą zależność rekurencyjną, co liczby $c(n,k)$. Ponieważ warunki dane w treści zadania wyznaczają jednoznacznie liczby $c(n,k)$, więc $b(n,k) = c(n,k)$. Pozostaje wykazać, że $b(n,n-k) = b(n,k)$.

Wstawiając w związku (7) wartość $n+1-k$ w miejsce k uzyskujemy

$$b(n+1,(n+1)-k) = b(n,n-(k-1)) + 2^k b(n,n-k) \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Zatem liczby $b(n,n-k)$ spełniają tę samą zależność rekurencyjną (6), co liczby $b(n,k)$. Ponadto $b(n,n-n) = b(n,n-0) = 1$, co daje $b(n,n-k) = b(n,k)$.

Uwaga

Zadanie można uogólnić następująco:

Liczby $c(n,k)$ są określone dla liczb całkowitych nieujemnych $n \geqslant k$ w ten sposób, że zachodzą równości:

$$c(n,0) = c(n,n) = 1 \qquad \text{dla każdej liczby} \quad n \geqslant 0,$$
$$c(n+1,k) = q^k c(n,k) + c(n,k-1) \quad \text{dla} \quad n \geqslant k \geqslant 1.$$

Dowieść, że $c(n,k) = c(n,n-k)$ dla $n \geqslant k \geqslant 0$.

Przypadek $q = 2$ to rozpatrywane zadanie.

Dla $q = 1$ mamy oczywiście $c(n,k) = \binom{n}{k}$.

W powyższym uogólnieniu liczba q może być dowolną, ustaloną liczbą rzeczywistą. Za q można także przyjąć zmienną x; wtedy $c(n,k)$ będą wielomianami jednej zmiennej. Zatem aby rozwiązać powyższe zadanie dla każdego q, wystarczy je rozwiązać dla pewnych nieskończenie wielu wartości q.

Sposób I przenosi się bez zmian dla każdego $q \neq -1$, przy czym

$$f(0) = 1 \quad \text{oraz} \quad f(m) = 1 \cdot (q+1) \cdot (q^2+q+1) \cdot \ldots \cdot (q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + 1)$$

dla $m \geqslant 1$.

Sposób II można zmodyfikować rozpatrując, zamiast dwóch kolorów różnych od białego (zielony i czerwony), q kolorów. Otrzymamy wtedy dowód dla wszystkich liczb q całkowitych dodatnich.

Sposób III nie zmieni się, gdy w miejsce liczby 2 wstawimy dowolną liczbę rzeczywistą $q \neq 0$.

Zadanie **9.** Dane są takie liczby całkowite dodatnie m i n, że $mn \mid m^2 + n^2 + m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb m i n. Wówczas $d^2 \mid mn$, a zatem $d^2 \mid m^2+n^2+m$. Stąd wobec podzielności $d^2 \mid m^2$ oraz $d^2 \mid n^2$ otrzymujemy $d^2 \mid m$.

Z drugiej strony, $m \mid m^2+n^2+m$, skąd uzyskujemy podzielność $m \mid n^2$. Zatem m jest wspólnym dzielnikiem liczb n^2 i m^2. To oznacza, że największy wspólny dzielnik liczb m^2 i n^2, który jest równy d^2, jest podzielny przez m. Wobec wyżej udowodnionej podzielności $d^2 \mid m$ otrzymujemy $m=d^2$.

Uwaga 1.

Powyższe rozwiązanie opiera się na wykazaniu równości

$$m=(\mathrm{NWD}(m,n))^2,$$

nie widać jednak, skąd mamy wiedzieć, żeby takiej właśnie równości dowodzić.

Naturalny sposób postępowania polega na wprowadzeniu liczby d będącej największym wspólnym dzielnikiem liczb m i n. Wówczas możemy zapisać $m=da$ oraz $n=db$, gdzie a i b są względnie pierwsze. Wtedy dana w zadaniu podzielność przyjmuje postać

$$d^2ab \mid d^2a^2+d^2b^2+da\,,$$

skąd otrzymujemy $d \mid a$. Wobec tego zapisujemy a w postaci dc (teraz b i c są względnie pierwsze), co daje podzielność

$$d^3cb \mid d^4c^2+d^2b^2+d^2c\,.$$

Z podzielności tej wynika, że $c \mid b$, co daje $c=1$, a stąd $m=d^2c=d^2$.

Uwaga 2.

Trudniejszym zagadnieniem jest wyznaczenie wszystkich par liczb (m,n) spełniających warunek podany w zadaniu.

Okazuje się, że wzór ogólny na m i n wykorzystuje liczby Fibonacciego ($F_{-1}=1$, $F_0=0$ oraz $F_k=F_{k-2}+F_{k-1}$ dla $k \geqslant 1$). Wtedy musi być

$$m=F_l^2 \quad \text{oraz} \quad n=F_lF_{l\pm 2}\,,$$

gdzie l jest liczbą dodatnią nieparzystą.

Zadanie **10.** W przestrzeni dane są trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Niech ω będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt O, zaś A', B', C' – rzutami punktów A, B, C odpowiednio na płaszczyznę ω. Wyznaczyć zbiór wartości wyrażenia

(1) $$(OA')^2+(OB')^2+(OC')^2$$

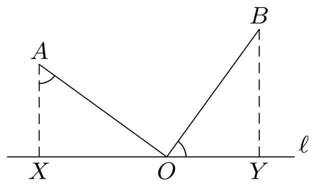
dla wszystkich płaszczyzn ω.

Rozwiązanie

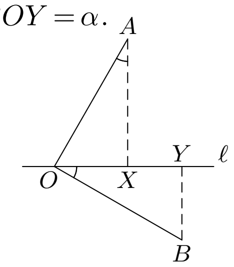
Wykażemy, że wartość wyrażenia (1) jest równa **2**, niezależnie od wyboru płaszczyzny ω.

Niech ω będzie dowolną płaszczyzną przechodzącą przez punkt O, zaś π płaszczyzną zawierającą punkty O, A, B. Oznaczmy przez ℓ wspólną prostą płaszczyzn π i ω. Niech X, Y będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A, B na prostą ℓ. Wówczas, niezależnie od położenia punktów A, B względem prostej ℓ (rys. 17 i 18),

$$\sphericalangle OAX = 90^\circ - \sphericalangle AOX = \sphericalangle BOY = \alpha.$$



rys. 17



rys. 18

Stąd

(2) $$AX^2 + BY^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Ponadto $\sphericalangle AXA' = \sphericalangle BYB' =$ (kąt pomiędzy płaszczyznami π i ω) $= \beta$. Zatem na mocy równości (2),

$$(AA')^2 + (BB')^2 = AX^2\sin^2\beta + BY^2\sin^2\beta = \sin^2\beta.$$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa oraz powyższej równości otrzymujemy

(3) $$(OA')^2 + (OB')^2 = 2 - (AA')^2 - (BB')^2 = 2 - \sin^2\beta.$$

Wektor $\overrightarrow{OC}$ jest prostopadły do płaszczyzny π, skąd $\sphericalangle COC' = 90^\circ - \beta$. Zatem

(4) $$(OC')^2 = \cos^2(90^\circ - \alpha) = \sin^2\beta.$$

Dodając stronami równości (3) i (4) uzyskujemy

$$(OA')^2 + (OB')^2 + (OC')^2 = 2,$$

niezależnie od wyboru płaszczyzny ω.

Zadanie **11.** Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz zbiór M, złożony z n^2+1 różnych liczb całkowitych dodatnich i mający następującą własność: wśród $n+1$ liczb dowolnie wybranych ze zbioru M znajduje się para liczb, z których jedna dzieli się przez drugą. Udowodnić, że w zbiorze M istnieją różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ spełniające warunek: dla $i = 1, 2, \ldots, n$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1}.

Rozwiązanie

Niech $k \in M$. Oznaczmy przez $d(k)$ największą liczbę naturalną ℓ, dla której istnieją różne liczby $a_1 = k$, a_2, a_3, …, a_ℓ spełniające warunek: dla $i = 1,2,\ldots,\ell-1$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1}.

Przypuśćmy, że teza zadania nie jest spełniona. To oznacza, że dla dowolnego $k \in M$ mamy $1 \leqslant d(k) \leqslant n$. Wówczas, na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, istnieją takie różne liczby $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$, że

$$d(k_1) = d(k_2) = \ldots = d(k_{n+1}) = m\,.$$

Z założeń zadania wynika, że dla pewnych różnych liczb s, t zachodzi podzielność $k_s \mid k_t$. Warunek $d(k_s) = m$ oznacza, że istnieją liczby $a_1 = k_s$, a_2, …, a_m mające własność: dla $i = 1,2,\ldots,m-1$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1}. Jednak wtedy liczby $b_1 = k_t$, $b_2 = a_1 = k_s$, $b_3 = a_2$, … , $b_{m+1} = a_m$ spełniają warunek: dla $i = 1,2,\ldots,m$ liczba b_i dzieli się przez b_{i+1}. To dowodzi, że $d(k_t) \geqslant m+1$ wbrew założeniu, że $d(k_t) = m$.

Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie **12.** W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Okręgi opisane na trójkątach AEF, BFD, CDE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że jeżeli

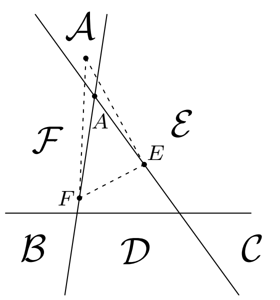
$$\frac{PD}{PE} = \frac{BD}{AE}, \qquad \frac{PE}{PF} = \frac{CE}{BF}, \qquad \frac{PF}{PD} = \frac{AF}{CD},$$

to AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC.

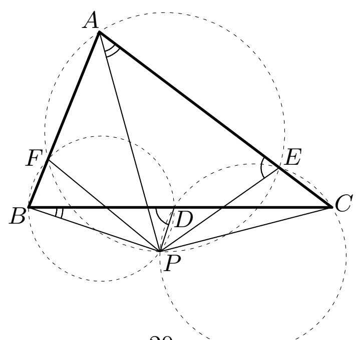
Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC.

Proste BC, CA, AB rozcinają płaszczyznę na siedem części: jeden trójkąt oraz sześć nieograniczonych obszarów $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ (rys. 19). Przypuśćmy, że punkt P leży w obszarze $\mathcal{A}$, którego wierzchołkiem jest punkt A. Punkt A leży wówczas wewnątrz (lub na obwodzie) trójkąta PEF, a to oznacza, że punkty A, F, E, P nie mogą leżeć na jednym okręgu. Zatem punkt P nie może znajdować się w obszarze $\mathcal{A}$. Z tego samego powodu punkt P nie może leżeć w obszarach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$.



rys. 19



rys. 20

Przypuśćmy teraz, że punkt P leży w jednym z obszarów $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to obszar $\mathcal{D}$ (rys. 20). Ponieważ punkty P, C, E, D leżą na jednym okręgu, więc $\measuredangle BDP = \measuredangle AEP$. Ponadto wiemy, że

$$\frac{PD}{BD} = \frac{PE}{AE}.$$

Z powyższych równości wnioskujemy, że trójkąty BDP i AEP są podobne. Zatem $\measuredangle PBC = \measuredangle PAC$. Stąd wynika, że punkty A, B, P, C leżą na jednym okręgu. Ponieważ punkty E i F leżą odpowiednio na *odcinkach* AC i AB, więc

$$180^\circ = \measuredangle ABP + \measuredangle ACP < \measuredangle AFP + \measuredangle AEP = 180^\circ.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Dowodzi ona, że punkt P musi leżeć wewnątrz trójkąta ABC.

Dalsze rozumowanie przeprowadzimy na trzy sposoby.

Sposób I

Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat

Dane są dwa trójkąty KLM i STU, w których $\measuredangle MKL < \measuredangle UST$ oraz

$$\frac{LK}{TS} = \frac{MK}{US}.$$

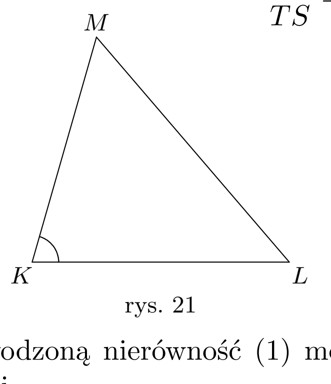
Wówczas zachodzi nierówność

(1) $$\frac{LK}{TS} > \frac{LM}{TU}.$$

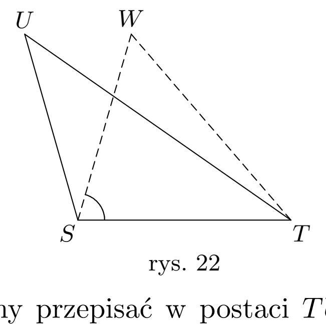
Dowód lematu

Niech W będzie takim punktem leżącym w płaszczyźnie trójkąta STU, że trójkąty KLM i STW są podobne, tzn. $KL:LM:MK = ST:TW:WS$ (rys. 21, 22). Wtedy

$$\frac{LK}{TS} = \frac{LM}{TW}.$$



rys. 21



rys. 22

Zatem dowodzoną nierówność (1) możemy przepisać w postaci $TU > TW$. Z zależności

$$\frac{US}{TS} = \frac{MK}{LK} = \frac{WS}{TS}$$

otrzymujemy $US=WS$, a ponieważ $\sphericalangle WST<\sphericalangle UST$, więc $TU>TW$. (Nierówność tę można uzasadnić korzystając z twierdzenia kosinusów; można ją również „zobaczyć” rysując dwa okręgi o środkach w punktach S i T przecinające się punkcie W). Dowód lematu jest więc zakończony.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Udowodnimy najpierw, że punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB.

Ponieważ okręgi opisane na trójkątach AEF, BFD, CDE przecinają się w punkcie P, więc zachodzą następujące równości kątów (rys. 23):

(1) $\sphericalangle BDP=\sphericalangle CEP=\sphericalangle AFP$ oraz $\sphericalangle AEP=\sphericalangle BFP=\sphericalangle CDP$.

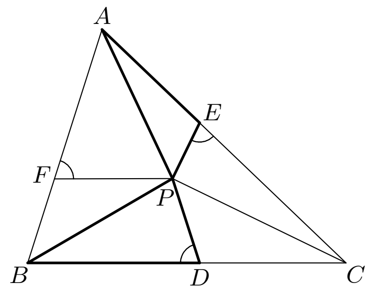
Przypuśćmy, że $\sphericalangle BDP\neq 90^\circ$. Bez straty ogólności możemy założyć, że zachodzi nierówność $\sphericalangle PDB<90^\circ$. Wtedy na mocy zależności (1) uzyskujemy

$$\sphericalangle BDP<\sphericalangle AEP,\quad \sphericalangle CEP<\sphericalangle BFP,\quad \sphericalangle AFP<\sphericalangle CDP.$$

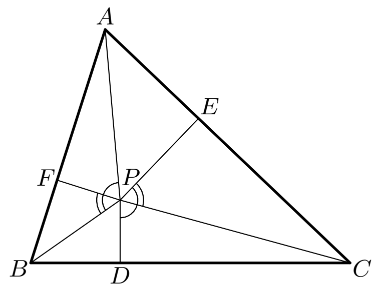
Korzystając z powyższych nierówności oraz z danych w treści zadania proporcji możemy zastosować lemat do par trójkątów (DPB,EPA), (EPC,FPB), (FPA,DPC). Otrzymamy wówczas

$$\frac{PD}{PE}>\frac{PB}{PA},\quad \frac{PE}{PF}>\frac{PC}{PB},\quad \frac{PF}{PD}>\frac{PA}{PC}.$$

Mnożąc stronami powyższe równości mamy $1>1$, sprzeczność.



rys. 23



rys. 24

Zatem $\sphericalangle PDB=90^\circ$, a więc również $\sphericalangle PEC=\sphericalangle PFA=90^\circ$ (rys. 24).

Na mocy danych w treści zadania tożsamości, trójkąty prostokątne APE i BPD są podobne. Zatem

$$\sphericalangle APE=\sphericalangle BPD.$$

Analogicznie uzyskujemy równości

$$\sphericalangle APF=\sphericalangle CPD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CPE=\sphericalangle BPF.$$

Stąd $\sphericalangle APF+\sphericalangle APE+\sphericalangle CPE=180^\circ$, co oznacza, że punkty C, P, F są współliniowe. Ponieważ prosta PF jest prostopadła do prostej AB, więc CF jest wysokością w trójkącie ABC.

Identycznie dowodzimy, że BE i AD są wysokościami w trójkącie ABC, co kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

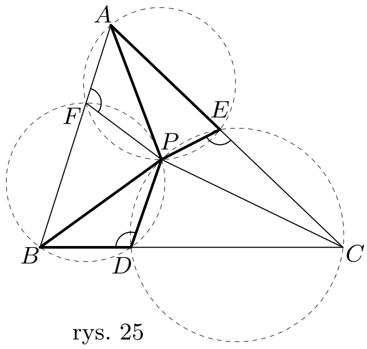
$$\frac{PD}{PE}=\frac{BD}{AE}=k, \qquad \frac{PE}{PF}=\frac{CE}{BF}=l, \qquad \frac{PF}{PD}=\frac{AF}{CD}=m.$$

Wówczas $klm=1$. Ponieważ P jest punktem wspólnym okręgów opisanych na trójkątach AEF, BFD, CDE (rys. 25), więc

$$\sphericalangle BDP=\sphericalangle CEP=\sphericalangle AFP=\alpha.$$

Na mocy twierdzenia kosinusów zastosowanego do trójkąta APE mamy

$$AP^2=AE^2+PE^2-2\cdot AE\cdot PE\cdot\cos(180^\circ-\alpha)=$$
$$=\frac{1}{k^2}(BD^2+PD^2-2\cdot BD\cdot PD\cdot\cos(180^\circ-\alpha)).$$



rys. 25

Wykorzystując powyższą równość oraz stosując jeszcze raz twierdzenie kosinusów, lecz tym razem do trójkąta BPD, otrzymujemy

(1) $$k^2\cdot AP^2=BD^2+PD^2-2\cdot BD\cdot PD\cdot\cos\alpha+4\cdot BD\cdot PD\cdot\cos\alpha=$$
$$=BP^2+4\cdot BD\cdot PD\cdot\cos\alpha.$$

Analogicznie dowodzimy, że

(2) $$l^2\cdot BP^2=CP^2+4\cdot CE\cdot PE\cdot\cos\alpha$$

oraz

(3) $$m^2\cdot CP^2=AP^2+4\cdot AF\cdot PF\cdot\cos\alpha.$$

Mnożąc stronami równość (1) przez l^2 oraz wykorzystując zależność (2) uzyskujemy

$$(kl)^2\cdot AP^2=CP^2+4\cdot CE\cdot PE\cdot\cos\alpha+4l^2\cdot BD\cdot PD\cdot\cos\alpha.$$

Z kolei mnożąc stronami powyższą równość przez m^2 oraz wykorzystując zależność (3) dostajemy

$$(klm)^2\cdot AP^2=AP^2+4\cdot AF\cdot PF\cdot\cos\alpha+4m^2\cdot CE\cdot PE\cdot\cos\alpha$$
$$+4l^2m^2\cdot BD\cdot PD\cdot\cos\alpha.$$

Ponieważ $klm = 1$, więc ostatnia zależność upraszcza się do postaci

$$(4 \cdot AF \cdot PF + 4m^2 \cdot CE \cdot PE + 4l^2 m^2 \cdot BD \cdot PD)\cos\alpha = 0.$$

Liczba stojąca w nawiasie w powyższej równości jest dodatnia, więc $\cos\alpha = 0$. To oznacza, że *punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB* (rys. 24).

Dalszą część rozumowania przeprowadzamy tak jak w sposobie I.

Sposób III

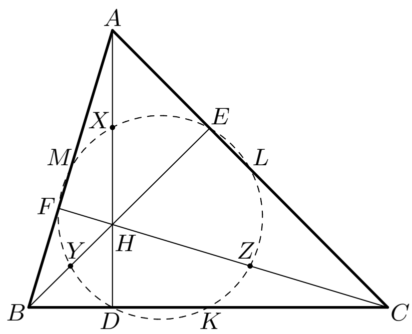
Wykorzystamy następujące

Twierdzenie

W trójkącie ABC wysokości AD, BE, CF przecinają się w punkcie H (rys. 26). Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB. Punkty X, Y, Z są odpowiednio środkami odcinków AH, BH, CH. Wówczas następujące punkty: D, E, F, K, L, M, X, Y, Z leżą na jednym okręgu.

Okrąg ten nazywa się *okręgiem dziewięciu punktów trójkąta ABC*.

Nietrudny dowód powyższego twierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi. Można też zajrzeć do książek: H. S. M. Coxeter „Wstęp do geometrii dawnej i nowej" na str. 34, jak również S. I. Zetel „Geometria trójkąta" na str. 52.



rys. 26

Z zacytowanego twierdzenia wynika, że *jeśli okrąg przechodzący przez środki boków trójkąta ostrokątnego ABC przecina obwód tego trójkąta po raz drugi w punktach D, E, F, to punkty D, E, F są spodkami wysokości trójkąta ABC.*

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Na półprostej $FA^{\rightarrow}$ odkładamy taki punkt Q, aby zachodziła następująca równość kątów: $\sphericalangle FPQ = \sphericalangle EPC$ (rys. 27).

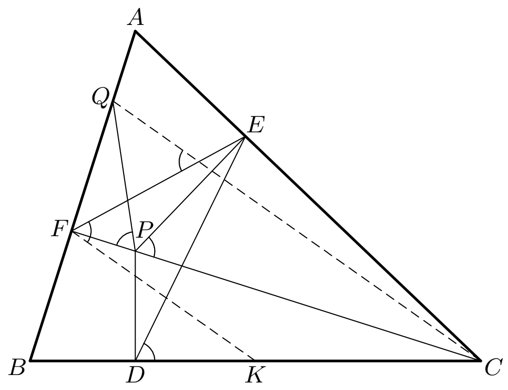
Punkty A, E, P, F leżą na jednym okręgu, więc $\sphericalangle QFP = \sphericalangle CEP$. Z powyższych równości wynika, że trójkąty PQF oraz PCE są podobne. Zatem

$$\frac{PF}{PE} = \frac{PQ}{PC}.$$

Ponadto $\sphericalangle FPE = \sphericalangle QPC$. Z dwóch ostatnich równości wynika, że trójkąty PFE oraz PQC są podobne. Z zależności w treści zadania oraz z podobieństwa trójkątów PQF, PCE otrzymujemy

$$\frac{BF}{CE} = \frac{PF}{PE} = \frac{QF}{CE},$$

skąd $BF = QF$. Zatem punkt F jest środkiem odcinka BQ.



rys. 27

Niech K będzie środkiem boku BC. Wówczas proste KF oraz CQ są równoległe. Zatem kąt EFK jest równy kątowi pomiędzy prostymi FE oraz CQ. Natomiast na mocy podobieństwa trójkątów PFE oraz PQC, kąt pomiędzy prostymi FE oraz CQ jest równy kątowi pomiędzy odcinkami PE i PC, czyli kątowi EPC. Punkty E, P, D, C leżą na jednym okręgu, skąd wynika równość $\sphericalangle EPC = \sphericalangle EDC$.

Z powyższych rozważań uzyskujemy zależność $\sphericalangle EFK = \sphericalangle EDC$. Dowodzi ona, że punkty D, K, E, F leżą na jednym okręgu, niezależnie od tego, z której strony punktu K leży punkt D. Jeżeli $K = D$, to okrąg opisany na trójkącie DEF jest styczny do prostej BC w punkcie D.

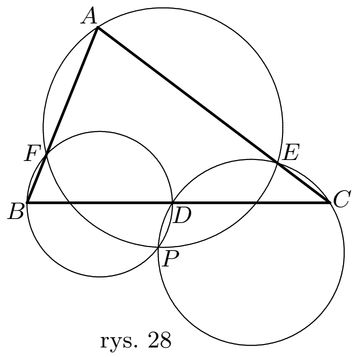
Innymi słowy: okrąg opisany na trójkącie DEF przechodzi przez punkt D oraz środek boku BC i nigdzie indziej nie przecina prostej BC. Analogicznie dowodzimy, że ten sam okrąg przechodzi przez środki pozostałych boków. Poza punktami D, E, F oraz środkami boków trójkąta ABC okrąg ten nie ma punktów wspólnych z obwodem trójkąta ABC.

Wykazaliśmy więc, że okrąg przechodzący przez środki boków trójkąta ABC przecina jego obwód po raz drugi w punktach D, E, F. To zaś dowodzi, że proste AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC.

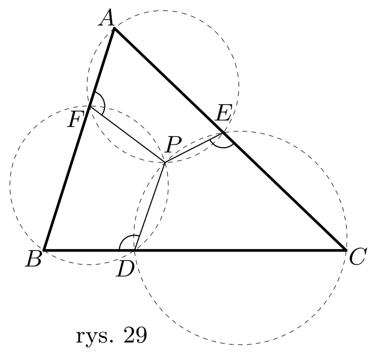
Uwaga

Niech ABC będzie dowolnym trójkątem. Wówczas *dla dowolnych punktów D, E, F leżących odpowiednio na bokach BC, CA, AB, okręgi opisane na* *trójkątach AEF, BFD, CDE przecinają się w jednym punkcie*. Nietrudny dowód powyższego stwierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi.

Zatem jedynym założeniem w treści zadania ograniczającym swobodę wyboru punktów D, E, F są dane proporcje. W przypadku ogólnym (tzn. bez zakładania prawdziwości danych proporcji) punkt wspólny P okręgów opisanych na trójkątach AEF, BFD, CDE *nie musi* leżeć wewnątrz trójkąta ABC, nawet jeśli trójkąt ten jest ostrokątny (rys. 28).



rys. 28



rys. 29

Podobnie, nie jest prawdą, że (w przypadku ogólnym) rzuty prostokątne punktu P na proste BC, CA, AB pokrywają się odpowiednio z punktami D, E, F. Na rysunku 29, punkt P jest dowolnym punktem leżącym wewnątrz trójkąta ABC, zaś punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, przy czym zachodzą związki:

$$\sphericalangle PDB = \sphericalangle PEC = \sphericalangle PFA \neq 90^\circ .$$

Wówczas okręgi opisane na trójkątach AEF, BFD, CDE przecinają się w punkcie P, którego rzuty prostokątne na boki trójkąta ABC są różne od punktów D, E, F.

Z powyższych przykładów wynika, że *bez wykorzystania proporcji danych w treści zadania* nie da się wykazać, że punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, bądź też że rzuty prostokątne punktu P na boki trójkąta ABC pokrywają się z punktami D, E, F.

Zawody stopnia drugiego

Zadanie **1.** Rozstrzygnąć, czy każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w postaci

$$\frac{a^2+b^3}{c^5+d^7},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich p, q zachodzą następujące równości:

$$\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{p^5q^4+p^{14}q^6}{p^5q^4+p^{14}q^6}=\frac{p^6q^4+p^{15}q^6}{p^5q^5+p^{14}q^7}=\frac{(p^3q^2)^2+(p^5q^2)^3}{(pq)^5+(p^2q)^7}.$$

Zatem każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w żądanej postaci.

Uwaga 1.

Zadanie można również rozwiązać wykorzystując inną, podobną tożsamość, na przykład

$$\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{p^7q^6+p^5q^9}{p^7q^6+p^5q^9}=\frac{p^8q^6+p^6q^9}{p^7q^7+p^5q^{10}}=\frac{(p^4q^3)^2+(p^2q^3)^3}{(pq^2)^5+(pq)^7}$$

lub też

$$\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{p^{35}q^{174}+p^{35}q^{174}}{p^{35}q^{174}+p^{35}q^{174}}=\frac{p^{36}q^{174}+p^{36}q^{174}}{p^{35}q^{175}+p^{35}q^{175}}=\frac{(p^{18}q^{87})^2+(p^{12}q^{58})^3}{(p^7q^{35})^5+(p^5q^{25})^7}.$$

Uwaga 2.

Przyglądając się powyższym skomplikowanym wykładnikom, można odnieść wrażenie, że cała trudność zadania leży właśnie w ich zgadnięciu. Tymczasem jedynym, choć wcale niełatwym, pomysłem jest przemnożenie licznika i mianownika ułamka p/q przez liczbę postaci $p^aq^b+p^cq^d$. Dobranie odpowiednich wykładników nie sprawia najmniejszych trudności. Musimy jedynie zadbać o to, aby:

$$\begin{array}{llll} 2\mid a+1 & 3\mid c+1 & 5\mid a & 7\mid c \\ 2\mid b & 3\mid d & 5\mid b+1 & 7\mid d+1. \end{array}$$

Czwórek liczb naturalnych (a,b,c,d) spełniających powyższe podzielności jest nieskończenie wiele, a jedną z nich, np. $(5,4,14,6)$ bez trudu wyznaczymy.

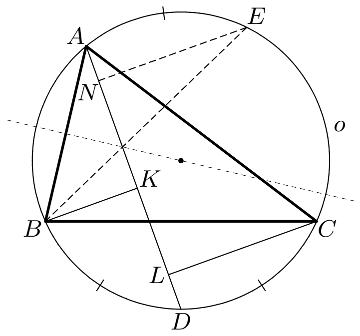
Zadanie **2.** Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D różnym od A. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na prostą AD. Dowieść, że

$$AD \geqslant BK+CL.$$

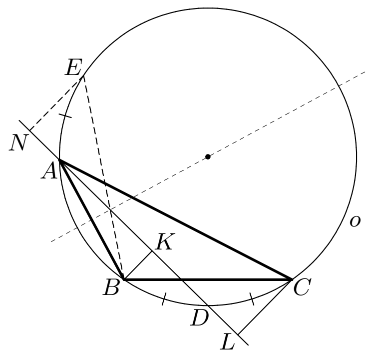
Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez o okrąg opisany na trójkącie ABC. Z równości kątów BAD i DAC wynika, że długości łuków BD i DC okręgu o są równe (długość łuku XY jest mierzona od punktu X do punktu Y w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).



rys. 30



rys. 31

Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu D względem symetralnej boku AB, zaś N niech będzie rzutem prostokątnym punktu E na prostą AD (rys. 30 i 31). Wówczas $AD = BE$. Ponadto długości łuków DC i EA są równe, co oznacza, że $EN = CL$.

Punkty B i E leżą po dwóch różnych stronach prostej AD. Zatem długość odcinka BE jest nie mniejsza niż suma odległości punktów B i E od prostej AD. Innymi słowy $BE \geqslant BK + EN$, czyli $AD \geqslant BK + CL$.

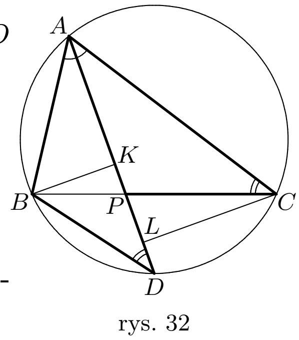
Sposób II

Niech P będzie punktem przecięcia odcinków AD i BC (rys. 32). Ponieważ

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle PAC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ADB = \sphericalangle ACP,$$

więc trójkąty BAD i PAC są podobne. Stąd

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AP}\,. \tag{1}$$



rys. 32

Oznaczając przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ oraz korzystając z równości (1) otrzymujemy

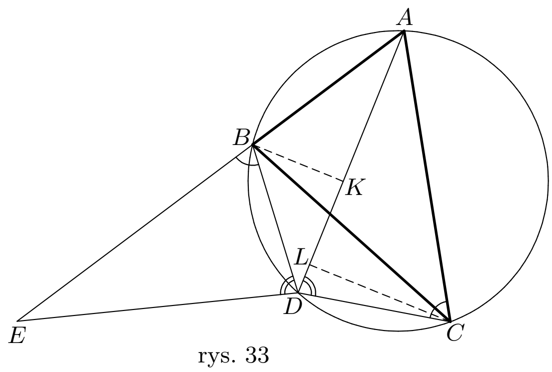
$$AP\cdot(BK + CL) = 2\cdot[ABP] + 2\cdot[ACP] = 2\cdot[ABC] \leqslant AC\cdot AB = AP\cdot AD,$$

skąd $BK + CL \leqslant AD$.

Sposób III

Przedłużmy półprostą $AB^{\rightarrow}$ do takiego punktu E, że $BE = AC$ (rys. 33). Ponieważ AD jest dwusieczną kąta BAC, więc $BD = CD$. Punkty A, B,

D, C leżą na jednym okręgu, skąd $\sphericalangle ACD = \sphericalangle EBD$. Z trzech powyższych równości wynika, że trójkąty ACD i EBD są przystające.



rys. 33

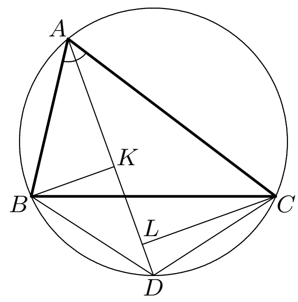
Oznaczając przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ otrzymujemy:

$$BK \cdot AD + CL \cdot AD = 2 \cdot [ABD] + 2 \cdot [ACD] = 2 \cdot [ADE] = \\ = AD \cdot DE \cdot \sin \sphericalangle ADE \leqslant AD \cdot DE = AD^2,$$

skąd $BK + CL \leqslant AD$.

Sposób IV

Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Korzystając z twierdzenia sinusów otrzymujemy



rys. 34

(1) $$BK = BD \cdot \sin \sphericalangle BDA = BD \cdot \frac{AB}{2R}.$$

Analogicznie:

(2) $$CL = CD \cdot \sin \sphericalangle CDA = CD \cdot \frac{AC}{2R}.$$

Ponieważ AD jest dwusieczną kąta BAC, więc $BD = CD$. Na mocy równości (1) i (2) oraz twierdzenia Ptolemeusza (zob. *Dodatek*, str. 112) uzyskujemy

$$BK + CL = \frac{1}{2R} \cdot (BD \cdot AB + CD \cdot AC) = \frac{1}{2R} \cdot (CD \cdot AB + BD \cdot AC) = \\ = AD \cdot \frac{BC}{2R} \leqslant AD.$$

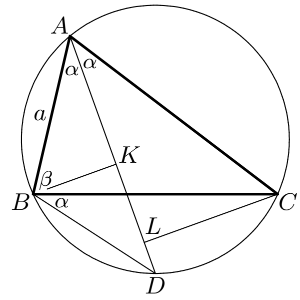
Sposób V

Wprowadźmy następujące oznaczenia (rys. 35):

$$AB = a, \quad \sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \alpha, \quad \sphericalangle ABC = \beta.$$

Wyznaczymy najpierw długości odcinków BK, CL, AD w zależności od a, α, β. Oczywiście

(1) $$BK = a \cdot \sin\alpha.$$



rys. 35

Na mocy twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkąta ABC otrzymujemy
$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle ABC} = \frac{AB}{\sin\sphericalangle ACB}.$$
Ponieważ $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 180^\circ - 2\alpha - \beta$, więc powyższa równość przybiera postać
$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(2\alpha+\beta)}, \quad \text{skąd} \quad AC = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}.$$
Zatem

(2) $$CL = a \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}.$$

Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkąta ADB otrzymujemy

(3) $$\frac{AD}{\sin\sphericalangle ABD} = \frac{AB}{\sin\sphericalangle ADB}, \quad \text{skąd} \quad AD = a \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(2\alpha+\beta)}.$$

Na mocy tożsamości (1), (2) i (3) nierówność, którą chcemy udowodnić, sprowadza się do postaci
$$a \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(2\alpha+\beta)} \geqslant a \cdot \sin\alpha + a \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}.$$
Przekształcając równoważnie powyższą zależność mamy
$$\sin(\alpha+\beta) \geqslant \sin\alpha\,(\sin(2\alpha+\beta) + \sin\beta).$$
Korzystając z tożsamości $\sin x + \sin y = 2\sin(\frac{1}{2}(x+y))\cos(\frac{1}{2}(x-y))$ możemy dowodzoną przez nas nierówność przepisać w postaci
$$\sin(\alpha+\beta) \geqslant 2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha.$$
Ponieważ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\sphericalangle ABD > 0$, więc ostatnia zależność jest równoważna nierówności $1 \geqslant \sin 2\alpha$, która jest prawdziwa.

Uwaga

Śledząc uważnie którekolwiek z zaprezentowanych rozwiązań można wywnioskować, że prawdziwa jest zależność
$$BK + CL = AD \cdot \sin\sphericalangle BAC.$$
Zatem równość w dowodzonej przez nas nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle BAC = 90^\circ$.

Zadanie **3.** Na polach szachownicy $n \times n$ rozmieszczono n^2 różnych liczb całkowitych, po jednej na każdym polu. W każdej kolumnie pole z największą liczbą pomalowano na czerwono. Zbiór n pól szachownicy nazwiemy *dopuszczalnym*, jeżeli żadne dwa z tych pól nie znajdują się w tym samym wierszu, ani w tej samej kolumnie. Spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych wybrano zbiór, dla którego suma liczb umieszczonych na jego polach jest największa.

Wykazać, że w tak wybranym zbiorze jest czerwone pole.

Rozwiązanie

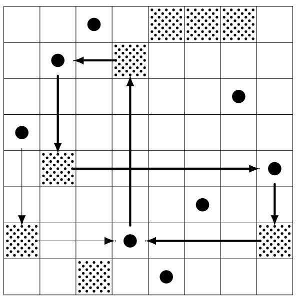
Przeprowadzimy dowód nie wprost.

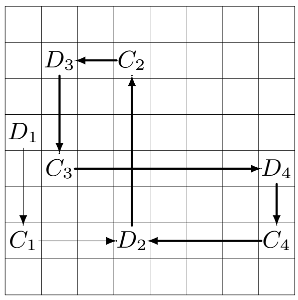
Załóżmy, że w wybranym zbiorze dopuszczalnym (oznaczmy go przez A) nie ma czerwonego pola.

Zdefiniujemy ciąg pól $D_1, C_1, D_2, C_2, \ldots$ danej szachownicy według niżej opisanej reguły. (Dla $n=8$ proces wyboru pól $D_1, C_1, D_2, C_2, \ldots$ jest przedstawiony na rysunkach 36 i 37. Pola czerwone są zacieniowane, zaś pola ze zbioru A są oznaczone kółkiem).

Pole D_1 jest dowolnym polem ze zbioru A. Niech C_1 będzie polem czerwonym leżącym w tej samej kolumnie, co D_1.

Następnie rozważamy to pole D_2 ze zbioru A, które leży w tym samym wierszu, co C_1. Przez C_2 oznaczamy pole czerwone leżące w tej samej kolumnie, co D_2. Postępowanie to kontynuujemy. (Ogólnie: pole czerwone C_i leży w tej samej kolumnie, co D_i, natomiast pole D_{i+1} jest polem ze zbioru A leżącym w tym samym wierszu, co C_i).


rys. 36



rys. 37

W ten sposób otrzymujemy ciąg pól $D_1, C_1, D_2, C_2, D_3, \ldots$, w którym każde pole jednoznacznie wyznacza pole następne. Ponieważ pól czerwonych jest skończenie wiele, więc znajdziemy takie liczby całkowite dodatnie i, t, dla których $C_i = C_{i+t}$ oraz $C_i \neq C_{i+s}$ dla $s = 1, 2, \ldots, t-1$. (W naszym przykładzie przedstawionym na rysunkach 36 i 37, $C_2 = C_5$, a więc $i=2$, $t=3$).

Usuwamy ze zbioru A pola $D_{i+1}, D_{i+2}, \ldots, D_{i+t}$ zastępując je odpowiednio polami $C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_{i+t}$ (rys. 38). Otrzymany w ten sposób zbiór oznaczmy przez B.

Z określenia ciągu $D_1, C_1, D_2, C_2, D_3, \ldots$ wynika, że pola

$$D_{i+1},\ D_{i+2},\ \ldots,\ D_{i+t}$$

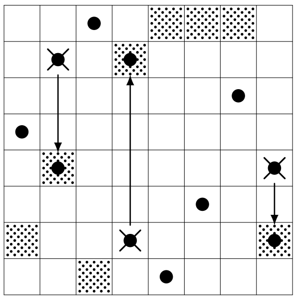
znajdują się odpowiednio w tych samych kolumnach, co pola

$$C_{i+1},\ C_{i+2},\ \ldots,\ C_{i+t}$$

oraz odpowiednio w tych samych wierszach, co pola

$$C_i = C_{i+t},\ C_{i+1},\ C_{i+2},\ \ldots,\ C_{i+t-1}.$$

Zatem zbiór B jest dopuszczalny. Ponadto liczby, które zostały napisane na polach $C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_{i+t}$, są *większe* odpowiednio od liczb napisanych na polach $D_{i+1}, D_{i+2}, \ldots, D_{i+t}$. Wynika stąd, że suma liczb napisanych na polach zbioru B jest większa od sumy liczb napisanych na polach zbioru A. To jednak przeczy założeniu, że A ma największą sumę liczb spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych.



rys. 38

Zadanie **4.** Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Proste BI i CI przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E. Wyznaczyć wszystkie miary kąta BAC, dla których może zachodzić równość $DI = EI$.

Rozwiązanie

Sposób I

Wykażemy, że jedyną wartością przyjmowaną przez kąt BAC jest 60°.

Na mocy twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów ADI i AEI otrzymujemy $\sin\sphericalangle AEI = \sin\sphericalangle ADI$. Stąd

$$\sphericalangle AEI = \sphericalangle ADI \qquad \text{lub} \qquad \sphericalangle AEI + \sphericalangle ADI = 180^\circ.$$

Przypuśćmy najpierw, że zachodzi związek $\sphericalangle AEI = \sphericalangle ADI$ (rys. 39). Wtedy także $\sphericalangle AIE = \sphericalangle AID$, co oznacza, że trójkąty AEI oraz ADI są przystające (cecha *kąt-bok-kąt*). Zatem $AD = AE$. To dowodzi, że przystające są także trójkąty ADB i AEC (cecha *kąt-bok-kąt*). Stąd uzyskujemy równość $AB = AC$, która przeczy założeniom poczynionym w treści zadania.

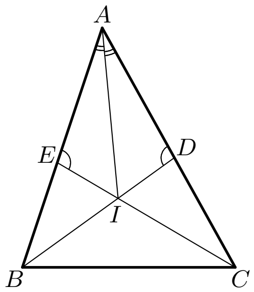
Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym $\sphericalangle AEI + \sphericalangle ADI = 180°$ (rys. 40). Wtedy punkty A, E, I, D leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DIC = \sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC + \tfrac{1}{2}\sphericalangle BCA.$$

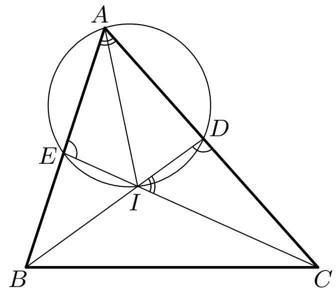
Stąd otrzymujemy

$$180° = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC + 2\sphericalangle BAC = 3\sphericalangle BAC,$$

czyli $\sphericalangle BAC = 60°$.



rys. 39



rys. 40

Do zakończenia rozwiązania pozostało wykazać, że istnieje trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$, $\sphericalangle BAC = 60°$ oraz $DI = EI$. Wykażemy więcej: w każdym trójkącie ABC o kącie BAC równym $60°$ zachodzi równość $DI = EI$.

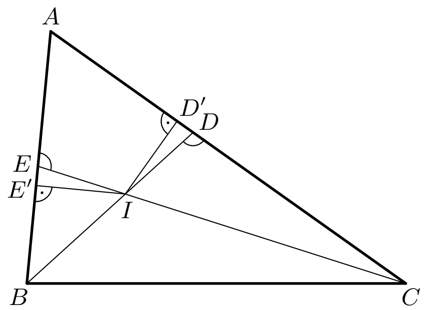
Jeżeli $\sphericalangle BAC = 60°$, to

$$\sphericalangle DIC = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC + \tfrac{1}{2}\sphericalangle BCA = 90° - \tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC = 60° = \sphericalangle BAC.$$

Na czworokącie $AEID$ można więc opisać okrąg. Ponieważ AI jest dwusieczną kąta EAD, więc $DI = EI$.

Sposób II

Podobnie jak w pierwszym sposobie rozwiązania, dochodzimy do równości $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BDC$ wykluczając konfigurację jak na rysunku 39.



rys. 41

Niech D' i E' będą rzutami punktu I odpowiednio na boki AC i BC. Wówczas wobec $ID' = IE'$ warunek $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BDC$ jest równoważny równości $DD' = EE'$ (rys. 41), a ta z kolei równości

$$D'A + AE' = DA + AE\,. \tag{1}$$

Oznaczając $BC=a$, $AC=b$ oraz $AB=c$ otrzymujemy

$$(2) \qquad AD'=AE'=\frac{b+c-a}{2}, \quad AD=b\cdot\frac{c}{a+c} \quad \text{oraz} \quad AE=c\cdot\frac{b}{a+b}$$

(dwie ostatnie zależności wynikają z twierdzenia o dwusiecznej). Wobec równości (2), warunek (1) przyjmuje postać

$$b+c-a=\frac{bc}{a+c}+\frac{bc}{a+b}\,.$$

Dalsze przekształcenia dają kolejno:

$$(b+c-a)(a+c)(a+b)=bc(2a+b+c)\,,$$
$$-a^3+ab^2+abc+b^2c+ac^2+bc^2=2abc+b^2c+bc^2\,,$$
$$ab^2-abc+ac^2=a^3\,,$$
$$b^2-bc+c^2=a^2\,,$$

co z kolei na mocy twierdzenia kosinusów jest równoważne temu, że kąt przy wierzchołku A ma miarę 60°.

Zadanie **5.** Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(f(n))=2n$.

Rozwiązanie

Taka funkcja istnieje. Oto przykład.

Niech A będzie zbiorem tych liczb całkowitych dodatnich, w których rozkładzie na czynniki pierwsze „trójka” występuje nieparzystą liczbę razy. Funkcję f definiujemy wzorem:

$$f(n)=\begin{cases}\frac{1}{3}n & \text{dla} \quad n\in A,\\ 6n & \text{dla} \quad n\in\mathbb{N}\setminus A.\end{cases}$$

Wówczas jeśli $n\in A$, to $f(n)\in\mathbb{N}\setminus A$, skąd

$$f(f(n))=f(\tfrac{1}{3}n)=2n \qquad \text{dla} \quad n\in A.$$

Podobnie, jeżeli $n\in\mathbb{N}\setminus A$, to $f(n)\in A$, co daje

$$f(f(n))=f(6n)=2n \qquad \text{dla} \quad n\in\mathbb{N}\setminus A.$$

Uwaga

Istnieje nieskończenie wiele funkcji f spełniających warunki zadania. Można je opisać następująco.

Łączymy liczby nieparzyste w pary (n_k,m_k) $(k=0,1,2,\ldots)$ dbając jedynie o to, aby każda liczba nieparzysta wystąpiła dokładnie raz, na przykład $(n_k,m_k)=(4k+1,4k+3)$. Dla każdej liczby całkowitej nieujemnej r definiujemy

$$f(2^r n_k)=2^r m_k, \qquad f(2^r m_k)=2^{r+1}n_k.$$

W ten sposób określona funkcja f spełnia warunek $f(f(n))=2n$.

Zadanie **6.** Wielomian $w(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla całkowitych x wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Dowieść, że wielomian $w(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

Rozwiązanie

Niech $w(x)=ax^2+bx+c$. Wprowadźmy oznaczenie: $k_n=\sqrt{w(n)}$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n. Wówczas k_n może być zerem dla co najwyżej dwóch wartości n. Dla pozostałych n mamy

$$k_{n+1}-k_n=\frac{k_{n+1}^2-k_n^2}{k_{n+1}+k_n}=\frac{(2n+1)a+b}{\sqrt{a(n+1)^2+b(n+1)+c}+\sqrt{an^2+bn+c}}\,.$$

Dzieląc licznik i mianownik otrzymanego ułamka przez n i przechodząc z n do nieskończoności widzimy, że ciąg $(k_{n+1}-k_n)$ jest zbieżny i jego granica wynosi $\sqrt{a}$. Ponieważ wyrazy ciągu $(k_{n+1}-k_n)$ są całkowite, więc granica tego ciągu, liczba $\sqrt{a}$, jest też całkowita. Ponadto istnieje taka liczba naturalna m, że

(1) $$k_{n+1}-k_n=\sqrt{a} \qquad \text{dla } \ n\geqslant m.$$

Niech $d=k_m-m\sqrt{a}$. Ze związku (1) wynika, że

(2) $$k_n=n\sqrt{a}+d \qquad \text{dla } \ n\geqslant m.$$

Przyjmijmy: $p(x)=(x\sqrt{a}+d)^2$. Na mocy definicji liczb k_n oraz zależności (2) uzyskujemy równość $p(n)=w(n)$ dla $n\geqslant m$. To oznacza, że $p(x)=w(x)$, skąd

$$w(x)=\left(x\sqrt{a}+d\right)^2.$$

Zawody stopnia trzeciego

Zadanie **1.** Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$.
Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ układu równań

$$\begin{cases} x_2+x_1^2=4x_1 \\ x_3+x_2^2=4x_2 \\ x_4+x_3^2=4x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n+x_{n-1}^2=4x_{n-1} \\ x_1+x_n^2=4x_n \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

Rozwiązanie

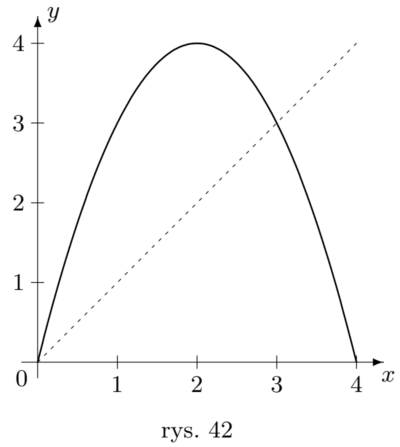
Odpowiedź: 2^n.

Sposób I

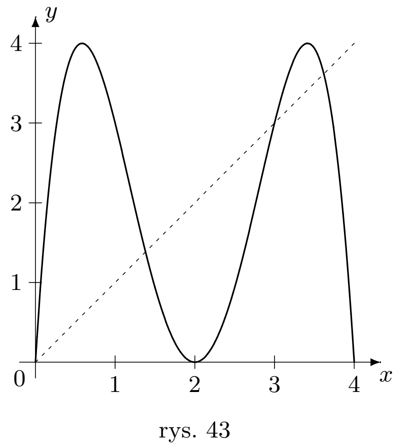
Niech $f(x)=4x-x^2=(4-x)x$. Wówczas dany w zadaniu układ równań przyjmuje postać

$$\begin{cases} x_2=f(x_1) \\ x_3=f(x_2) \\ x_4=f(x_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=f(x_{n-1}) \\ x_1=f(x_n)\,. \end{cases}$$

Ponieważ wielomian f przyjmuje wartości nieujemne tylko dla argumentów z przedziału $\langle 0,4\rangle$, zadanie sprowadza się do znalezienia liczby rozwiązań w zbiorze $\langle 0,4\rangle$ równania $f^n(x)=x$, gdzie f^k oznacza k-krotne złożenie funkcji f.



rys. 42

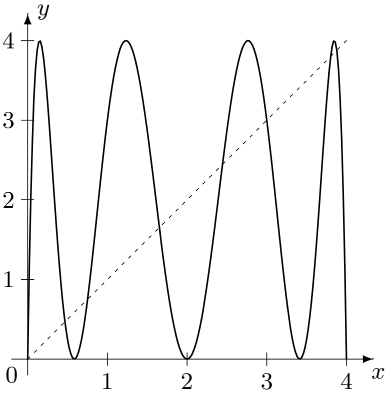


rys. 43

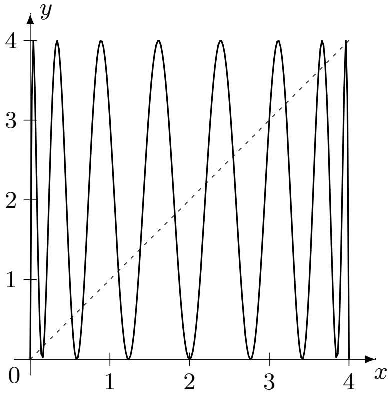
Wykażemy, że istnieją takie liczby $0=z_0<z_1<z_2<\ldots<z_{2^n}=4$, że

(1) $\quad f^n(z_k)=0$ dla k parzystych $\quad$ oraz $\quad f^n(z_k)=4$ dla k nieparzystych

(por. rysunki 42–45, które przedstawiają kolejno wykresy funkcji $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$).



rys. 44



rys. 45

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. Dla $n=1$ wystarczy przyjąć $z_1=2$.

Załóżmy teraz, że warunek (1) jest spełniony dla pewnego n. Dla dowolnego $k\in\{0,1,2,\ldots,2^n-1\}$, jedna z liczb $f^n(z_k)$, $f^n(z_{k+1})$ jest równa 0, druga zaś wynosi 4. Stąd oraz z ciągłości funkcji $f^n(x)$ wynika, że istnieje taka liczba $u_k\in(z_k,z_{k+1})$, dla której $f^n(u_k)=2$. Wtedy oczywiście

$$0=z_0<u_0<z_1<u_1<\ldots<z_{2^n-1}<u_{2^n-1}<z_{2^n}=4$$

oraz $f^{n+1}(z_k)=f(f^n(z_k))=0,\ f^{n+1}(u_k)=f(f^n(u_k))=f(2)=4.$

Dowód indukcyjny jest więc zakończony.

Z udowodnionego faktu oraz z ciągłości funkcji $f^n(x)$ wynika, że równanie $f^n(x)=x$ ma co najmniej 2^n rozwiązań: $x=0$ oraz przynajmniej po jednym rozwiązaniu w każdym z przedziałów (z_k,z_{k+1}) dla $k=1,2,\ldots,2^n-1$ (rys. 42–45). Ponieważ $f^n(x)$ jest wielomianem stopnia 2^n, równanie to nie może mieć więcej niż 2^n rozwiązań, musi więc ich mieć dokładnie 2^n.

Uwaga

Równanie $f(f(x))=x$ ma rozwiązania: 0, $\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})$, 3, $\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})$.

Sposób II

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$x_1(x_1-4)=x_1^2-4x_1=-x_2\leqslant 0,$$

skąd wynika, że $x_1\leqslant 4$. Istnieje więc dokładnie jedna liczba $\alpha\in\langle 0,\pi/2\rangle$, spełniająca zależność $x_1=4\sin^2\alpha$.

Wówczas $x_2=x_1(4-x_1)=4\sin^2\alpha\cdot 4\cos^2\alpha=4\sin^2 2\alpha$. Rozumując analogicznie dostajemy

$$x_k=4\sin^2(2^{k-1}\alpha)\qquad (k=3,4,\ldots,n)$$

oraz $x_1 = 4\sin^2(2^n\alpha)$.

Liczba rozwiązań danego układu równań w liczbach nieujemnych jest więc równa liczbie rozwiązań równania

$$\sin^2\alpha = \sin^2(2^n\alpha)$$

w liczbach rzeczywistych $\alpha \in \langle 0, \pi/2\rangle$. Ponieważ równość $\sin\beta = \pm\sin\gamma$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy któraś z liczb $\beta+\gamma$, $\beta-\gamma$ jest całkowitą wielokrotnością π, więc jedna z liczb $(2^n+1)\alpha$, $(2^n-1)\alpha$ musi być całkowitą wielokrotnością π. Stąd wynika, że α jest jedną z liczb:

$$0, \quad \frac{k\pi}{2^n+1}, \quad \frac{\ell\pi}{2^n-1}, \quad \text{gdzie } k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}, \ \ell \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}-1\}.$$

Ponieważ największy wspólny dzielnik liczb 2^n+1 i 2^n-1 jest równy 1, więc wyżej wypisane możliwe wartości α są różne. Zatem istnieje dokładnie 2^n ciągów liczb nieujemnych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spełniających dany układ równań.

Zadanie **2.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ.$$

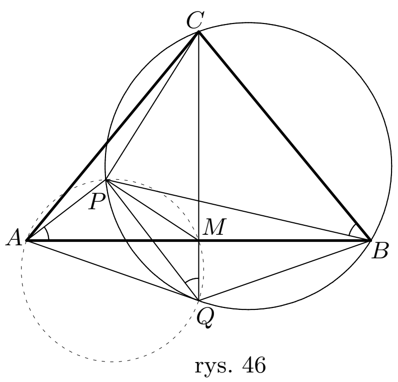
Rozwiązanie

Sposób I

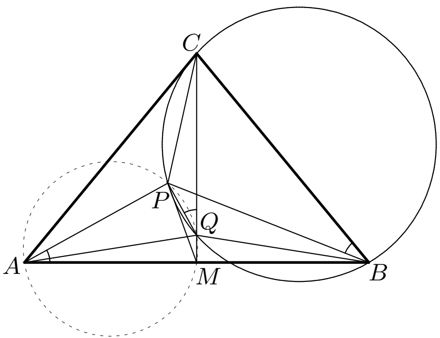
Załóżmy najpierw, że punkt P leży wewnątrz trójkąta AMC lub na odcinku MC.

Niech $Q \neq C$ będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie BCP z prostą CM (rys. 46 i 47). Ponieważ $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PQC$, więc punkty A, P, M, Q leżą na jednym okręgu. Ponadto

$$(1) \qquad \sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC = \sphericalangle AQC.$$



rys. 46



rys. 47

Jeżeli punkt Q znajduje się na zewnątrz trójkąta ABC (rys. 46) lub na odcinku AB, to na mocy zależności (1) otrzymujemy

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle APM + \sphericalangle AQC = 180^\circ.$$

Jeżeli natomiast punkt Q znajduje się wewnątrz trójkąta ABC (rys. 47), to korzystając raz jeszcze z równości (1) uzyskujemy

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle AQM + \sphericalangle AQC = 180^\circ .$$

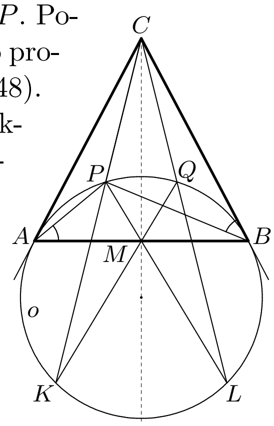
Załóżmy teraz, że punkt P znajduje się wewnątrz trójkąta BCM. Ponieważ $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PAC$, więc przeprowadzając rozumowanie analogiczne do powyższego otrzymujemy równość $\sphericalangle BPM + \sphericalangle APC = 180^\circ$. Stąd

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABP. Ponieważ $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC$, więc okrąg ten jest styczny do prostych AC, BC odpowiednio w punktach A, B (rys. 48). Niech $K \neq P$ będzie punktem przecięcia prostej CP z okręgiem o. Oznaczmy ponadto przez Q i L punkty symetryczne odpowiednio do punktów P i K względem prostej CM.



rys. 48

Prosta AB jest biegunową punktu C względem okręgu o, a więc proste KQ i PL przecinają się na odcinku AB (zob. *L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, str. 110, twierdzenie 3). Zatem punkt przecięcia prostych PL i QK pokrywa się z punktem M.

Długości łuków AL, KB okręgu o są równe, więc $\sphericalangle APL = \sphericalangle KPB$. Stąd

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle KPB + \sphericalangle BPC = 180^\circ .$$

Sposób III

Skorzystamy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie

Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC (rys. 49). Punkt N leży na odcinku AB, przy czym spełniony jest warunek

$$\frac{AN}{NB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 .$$

Wówczas $\sphericalangle ACN = \sphericalangle MCB$.

Powyższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem zadania 5 z zawodów stopnia trzeciego XLIX Olimpiady Matematycznej. (Dowód można znaleźć w broszurze *XLIX Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, str. 70).

Oznaczmy: $\alpha = \sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC$, $\beta = \sphericalangle CAP = \sphericalangle PBA$. Na mocy twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkąta ABP (rys. 50) otrzymujemy

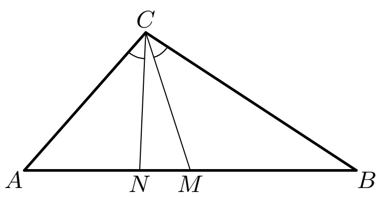
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{AP}{BP}.$$

Oznaczając przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ oraz korzystając z powyższej równości dostajemy

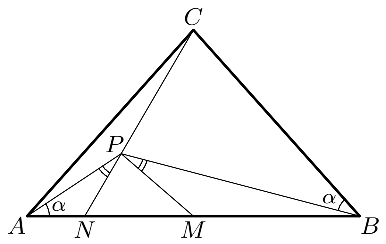
$$\frac{AN}{NB} = \frac{[APC]}{[BPC]} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AP\cdot\sin\beta}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BP\cdot\sin\alpha} = \frac{AP}{BP}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \left(\frac{AP}{BP}\right)^2.$$

Na mocy zacytowanego twierdzenia uzyskujemy $\sphericalangle APN = \sphericalangle MPB$. Stąd

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle NPB + \sphericalangle BPC = 180^\circ.$$



rys. 49



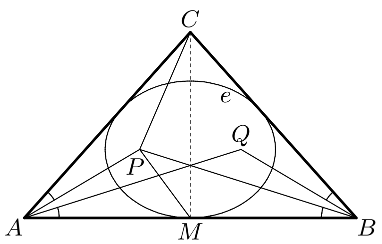
rys. 50

Sposób IV

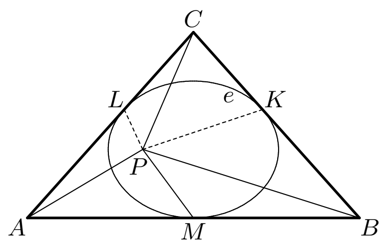
Niech Q będzie punktem symetrycznym do punktu P względem prostej CM (rys. 51). Wówczas

$$\sphericalangle CAP = \sphericalangle QAB = \sphericalangle PBA = \sphericalangle CBQ.$$

Zatem istnieje elipsa e wpisana w trójkąt ABC, której ogniskami są punkty P, Q (zob. *Dodatek*, twierdzenie 4, str. 108). Elipsa ta jest styczna do boku AB w punkcie M.



rys. 51



rys. 52

Oznaczmy przez K, L punkty styczności elipsy e odpowiednio z bokami BC, CA (rys. 52). Na mocy twierdzenia 3 (str. 107) zachodzą następujące równości kątów:

$$\sphericalangle LPA = \sphericalangle APM, \quad \sphericalangle MPB = \sphericalangle BPK, \quad \sphericalangle KPC = \sphericalangle CPL.$$

Zatem $\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \frac{1}{2}\cdot 360^\circ = 180^\circ$.

Zadanie **3.** Ciąg liczb naturalnych (p_n) spełnia następujące warunki:
1° p_1 i p_2 są liczbami pierwszymi,
2° dla $n \geqslant 3$ liczba p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby
$$p_{n-1} + p_{n-2} + 2000.$$
Udowodnić, że ciąg (p_n) jest ograniczony.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że dla dowolnego $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność

(1) $$p_n \leqslant \max(p_{n-2}, p_{n-1}) + 2002.$$

Istotnie, jeśli jedna z liczb p_{n-2}, p_{n-1} jest równa 2, to na mocy definicji, liczba p_n jest dzielnikiem pierwszym liczby $\max(p_{n-2}, p_{n-1}) + 2002$. Nierówność (1) jest wtedy udowodniona. Jeśli natomiast obydwie liczby p_{n-2}, p_{n-1} są nieparzyste, to liczba p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby parzystej $p_{n-2} + p_{n-1} + 2000$, a więc jest także dzielnikiem pierwszym liczby

$$\frac{p_{n-2} + p_{n-1} + 2000}{2} = \frac{p_{n-2} + p_{n-1}}{2} + 1000 \leqslant \max(p_{n-2}, p_{n-1}) + 1000.$$

Zatem nierówność (1) jest spełniona również w tym przypadku.

Niech $M = \max(p_1, p_2) \cdot 2003! + 2$. Wykażemy indukcyjnie, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność $p_n < M$.

Oczywiście $p_1 < M$ oraz $p_2 < M$.

Załóżmy, że dla liczby naturalnej $n \geqslant 3$ zachodzą nierówności $p_{n-2} < M$ oraz $p_{n-1} < M$. Wówczas na mocy zależności (1) otrzymujemy $p_n < M + 2002$. Ponieważ liczby M, $M+1$, $M+2$, ..., $M+2001$ są złożone, jako podzielne odpowiednio przez $2, 3, 4, \ldots, 2003$, więc w rezultacie uzyskujemy silniejsze oszacowanie: $p_n < M$.

To kończy dowód indukcyjny oraz rozwiązanie zadania.

Uwaga

Powyższe rozwiązanie polega na wykazaniu, że ciąg (p_n) nie może „przeskoczyć” dużej dziury w liczbach pierwszych oraz na wskazaniu odpowiednio wielu kolejnych liczb złożonych.

Zadanie **4.** W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2...A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3, \ldots, B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach A_2S, $A_3S, \ldots, A_nS$, że
$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

Rozwiązanie

Odp.: Takie punkty istnieją dla dowolnego $n \geqslant 3$.

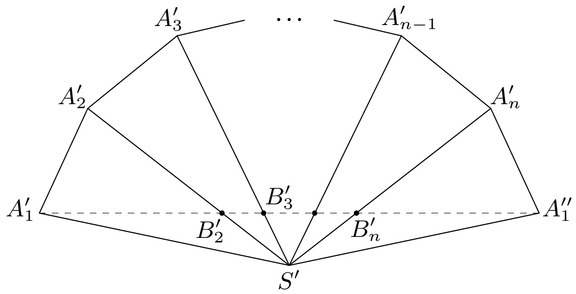
Niech O będzie spodkiem wysokości ostrosłupa, zaś α miarą kąta ściany bocznej przy wierzchołku S. Z równości $A_1S = 2A_1O$ otrzymujemy

$$\sin\tfrac{\alpha}{2} = \frac{A_1A_2}{2A_1S} = \frac{1}{2}\cdot\frac{A_1A_2}{2A_1O} = \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{180^\circ}{n} = \sin\tfrac{90^\circ}{n}\,\cos\tfrac{90^\circ}{n} < \sin\tfrac{90^\circ}{n},$$

skąd

$$n\alpha < 180^\circ. \tag{1}$$

Rozetnijmy powierzchnię boczną ostrosłupa wzdłuż krawędzi A_1S i rozłóżmy ją na płaszczyźnie. Otrzymamy wtedy wielokąt $S'A_1'A_2'\ldots A_n'A_1''$ (rys. 53). Na mocy nierówności (1), $\sphericalangle A_1'S'A_1'' = n\alpha < 180^\circ$.



rys. 53

Niech $B_2', B_3', \ldots, B_n'$ będą punktami przecięcia odcinka $A_1'A_1''$ odpowiednio z odcinkami $A_2'S', A_3'S', \ldots, A_n'S'$. Na mocy nierówności trójkąta,

$$A_1'B_2' + B_2'B_3' + B_3'B_4' + \ldots + B_{n-1}'B_n' + B_n'A_1'' < 2A_1'S' .$$

Punkty $B_2', B_3', \ldots, B_n'$ wyznaczają więc punkty $B_2, B_3, \ldots, B_n$ na krawędziach ostrosłupa spełniające warunki zadania.

Uwaga

Warunkiem, który rozstrzyga o istnieniu punktów $B_2, B_3, \ldots, B_n$, jest nierówność (1). Można ją udowodnić również bez użycia trygonometrii w następujący sposób.

Rozpatrzmy stożek $\mathcal{S}$, którego podstawą jest okrąg opisany na wielokącie $A_1A_2\ldots A_n$, zaś wierzchołkiem punkt S. Tworząca stożka $\mathcal{S}$ tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. To oznacza, że powierzchnia boczna stożka $\mathcal{S}$, po rozłożeniu na płaszczyznę, jest półkolem. Zatem wielkość

$$\sphericalangle A_1SA_2 + \sphericalangle A_2SA_3 + \ldots + \sphericalangle A_{n-1}SA_n + \sphericalangle A_nSA_1$$

jest *mniejsza* od 180°, skąd uzyskujemy nierówność (1).

Powyższe rozumowanie przenosi się bez najmniejszych zmian na przypadek, gdy $SA_1A_2\ldots A_n$ jest ostrosłupem, na którego podstawie $A_1A_2\ldots A_n$ można opisać okrąg, i którego każda krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Zatem również w tym nieco ogólniejszym przypadku istnieją punkty $B_2, B_3, \ldots, B_n$ spełniające warunki zadania.

Zadanie **5.** Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą liczbę k o następującej własności. Z dowolnego k-elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$ można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta.

Rozwiązanie

Udowodnimy następujące dwa zdania:

1. Z dowolnego zbioru złożonego z $m+n$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$ $(m,n \geqslant 2)$ można wybrać niepusty podzbiór mający w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy parzystą liczbę pól.

2. Istnieje zbiór $m+n-1$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$, z którego nie da się wybrać niepustego podzbioru mającego w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy parzystą liczbę pól.

Z powyższych zdań zastosowanych dla $m = n$ wnioskujemy, że najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest $\boldsymbol{k = 2n}$.

Dowód zdania 1.

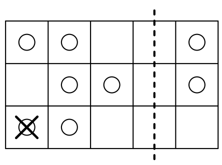
Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem $m+n$. Dla $m = 2$, $n = 2$ teza zdania 1 jest prawdziwa.

Ustalmy dwie liczby naturalne m, n o sumie większej niż 4 i załóżmy, że zdanie 1 jest prawdziwe dla dowolnej szachownicy o sumie wymiarów mniejszej niż $m+n$. Rozważmy dowolny zbiór A złożony z $m+n$ pól szachownicy S o wymiarach $m \times n$. Możliwe są następujące trzy przypadki:

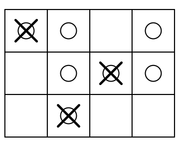
(a) istnieje wiersz lub kolumna szachownicy S nie zawierająca żadnego pola ze zbioru A;

(b) istnieje wiersz lub kolumna szachownicy S, w której znajduje się dokładnie jedno pole ze zbioru A;

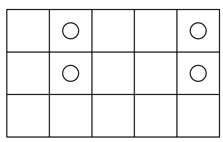
(c) w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się co najmniej dwa pola ze zbioru A.



rys. 54



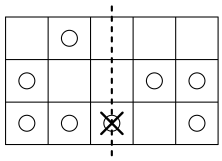
rys. 55



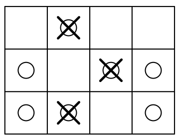
rys. 56

W przypadku (a) usuwamy z szachownicy S tę kolumnę (lub wiersz), która nie zawiera żadnego pola ze zbioru A. Następnie usuwamy ze zbioru A dowolne pole (na rysunku 54 pola zbioru A oznaczone są kółeczkami). W ten sposób otrzymujemy nową szachownicę, która zawiera pewien zbiór A' złożony z $m+n-1$ pól i której suma wymiarów jest równa $m+n-1$ (rys. 55). Stąd wynika, że każdy z wymiarów uzyskanej szachownicy jest nie mniejszy niż 2. Zatem na mocy założenia indukcyjnego można wybrać ze zbioru A' niepusty podzbiór mający w każdym wierszu i w każdej kolumnie parzystą liczbę pól. Wklejając z powrotem usuniętą kolumnę lub usunięty wiersz na swoje miejsce (rys. 56) otrzymujemy żądany podzbiór zbioru A.

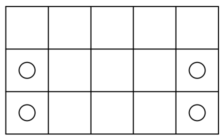
Podobnie postępujemy w przypadku (b): znajdujemy najpierw kolumnę (lub wiersz), w której znajduje się dokładnie jedno pole ze zbioru A, a następnie usuwamy tę kolumnę z szachownicy S (rys. 57). W rezultacie otrzymujemy nową szachownicę, która zawiera pewien zbiór A' złożony z $m+n-1$ pól i której suma wymiarów jest równa $m+n-1$ (rys. 58). Tak jak wyżej, stosujemy założenie indukcyjne, po czym wklejamy z powrotem usuniętą kolumnę lub usunięty wiersz (rys. 59).



rys. 57



rys. 58



rys. 59

Rozpatrzmy przypadek (c). Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $w_1, w_2, \ldots, w_m$ oznaczają odpowiednio liczby pól zbioru A w poszczególnych kolumnach i wierszach. Wówczas

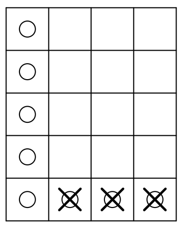
$$(k_1+k_2+\ldots+k_n)+(w_1+w_2+\ldots+w_m)=2(m+n).$$

Ponadto $k_i, w_j \geqslant 2$ dla wszystkich i, j. Stąd wynika, że $k_i = w_j = 2$. Zatem zbiór A ma w każdej kolumnie i w każdym wierszu dokładnie dwa pola. To oznacza, że liczba pól zbioru A w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest parzysta.

Dowód indukcyjny, a tym samym dowód zdania 1, został zakończony.

Dowód zdania 2.

Rozważmy zbiór A złożony ze wszystkich $m+n-1$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$ znajdujących się w dolnym wierszu i pierwszej kolumnie (rys. 60). Aby otrzymać parzystą liczbę pól w kolumnach od drugiej do ostatniej musimy usunąć ze zbioru A pola, które się w tych kolumnach znajdują. Po ich usunięciu widzimy, że z tego samego powodu musimy usunąć pozostałe pola zbioru A. To kończy dowód zdania 2.



rys. 60

Zadanie **6.** Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x

$$P(x^2-1)=\big(P(x)\big)^2-1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x)=x.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwe są zależności

$$(P(-x))^2=P(x^2-1)+1=(P(x))^2.$$

Stąd wynika, że dla każdego x zachodzi jedna z równości: $P(-x)=P(x)$ lub $P(-x)=-P(x)$.

Przypuśćmy, że dla nieskończenie wielu x zachodzi równość $P(-x)=P(x)$. Wówczas równość ta musi być prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x, co przeczy założeniu, że stopień wielomianu P jest liczbą nieparzystą.

Zatem dla nieskończenie wielu x zachodzi równość $P(-x)=-P(x)$, skąd wynika, że równość ta jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

Dowolną liczbę rzeczywistą $x\geqslant -1$ możemy zapisać w postaci $x=y^2-1$, dla pewnej liczby rzeczywistej y. Stąd

(1) $$P(x)=P(y^2-1)=(P(y))^2-1\geqslant -1\,.$$

Określamy rekurencyjnie ciąg (x_n) wzorami:

$$x_1=1 \quad \text{oraz} \quad x_n=\sqrt{x_{n-1}+1} \quad \text{dla} \quad n\geqslant 2\,.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że

(2) $$P(x_n)=x_n \quad \text{dla} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Z zależności $P(-x)=-P(x)$ otrzymujemy $P(0)=0$. Kładąc $x=0$ do danej w treści zadania tożsamości otrzymujemy $P(-1)=-1$, skąd $P(1)=1$. To dowodzi równości (2) dla $n=1$.

Ze związku $P(x_{n-1})=x_{n-1}$ wynika, że

$$(P(x_n))^2=P(x_n^2-1)+1=P(x_{n-1})+1=x_{n-1}+1=x_n^2\,.$$

Ponieważ $x_n>1$ dla $n\geqslant 2$, więc nierówność (1) wyklucza prawdziwość równości $P(x_n)=-x_n$. Zatem $P(x_n)=x_n$, co kończy dowód zależności (2).

Ciąg (x_n) jest rosnący, więc równość $P(x)=x$ zachodzi dla nieskończenie wielu x. Z tego zaś wynika, że $P(x)=x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$.

XL Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Zadanie **1.** Wyznaczyć wszystkie zbiory skończone S na płaszczyźnie, złożone z co najmniej trzech punktów i spełniające następujący warunek: Dla każdych dwóch różnych punktów A i B zbioru S, symetralna odcinka AB jest osią symetrii zbioru S.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

Wszystkie osie symetrii dowolnego zbioru ograniczonego płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie.

Dowód lematu

Przypuśćmy, wbrew tezie, że istnieją trzy różne osie symetrii k, l, m zbioru ograniczonego M, które nie przecinają się w jednym punkcie. Rozpatrzymy dwa przypadki.

(a) *Co najmniej dwie spośród prostych k, l, m są równoległe.* Przyjmijmy, że $k \parallel l$. Wówczas odwzorowanie t będące złożeniem symetrii względem prostej k z symetrią względem prostej l jest translacją o pewien niezerowy wektor. Odwzorowanie t przeprowadza zbiór M na zbiór M, a więc wielokrotne złożenie przekształcenia t również przeprowadza zbiór M na zbiór M. To przeczy jednak temu, że zbiór M jest ograniczony.

(b) *Każde dwie spośród prostych k, l, m przecinają się.* Złożenie symetrii względem prostej k z symetrią względem prostej l jest obrotem o środku nie należącym do prostej m. Zatem przekształcenie r będące złożeniem trzech symetrii, kolejno względem prostych k, l, m, jest złożeniem pewnej symetrii osiowej z translacją o niezerowy wektor. Odwzorowanie r przeprowadza zbiór M na zbiór M, a więc wielokrotne złożenie przekształcenia r również przekształca zbiór M na zbiór M. To przeczy jednak temu, że zbiór M jest ograniczony.

Dowód lematu jest więc zakończony.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Niech $S=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$. Oznaczmy przez s_{ij} $(i\neq j)$ symetrię względem symetralnej odcinka A_iA_j. Na mocy lematu, symetralne wszystkich odcinków A_iA_j $(i\neq j)$ przecinają się w jednym punkcie P. Ponieważ $s_{1i}(A_i)=A_1$, więc $PA_i=PA_1$. To oznacza, że punkty $A_1,A_2,\ldots,A_n$ leżą na okręgu o środku P.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkty $A_1,A_2,\ldots,A_n$ leżą na danym okręgu w tej właśnie kolejności. Rozpatrując symetrię s_{13} widzimy, że punkt A_2 musi przejść na siebie przy tym odwzorowaniu. To dowodzi, że punkt A_2 leży na symetralnej odcinka A_1A_3, a więc $A_1A_2=A_2A_3$. Analogiczne rozumowanie dowodzi, że wszystkie boki n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$ są równe. Ponieważ n-kąt ten jest wpisany w okrąg, więc musi on być foremny.

Bez trudu sprawdzamy, że zbiór S złożony z wierzchołków n-kąta foremnego spełnia warunki zadania.

Zadanie **2.** Niech $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną.

(a) Wyznaczyć najmniejszą stałą C taką, że nierówność

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^4$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$.

(b) Dla tej stałej C ustalić, kiedy zachodzi równość.

Rozwiązanie

Kładąc $x_1 = x_2 = 1$ oraz $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$ obliczamy

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = 2, \qquad \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^4 = 16\,.$$

Wynika stąd, że szukana stała C nie może być mniejsza niż $\frac{1}{8}$. Wykażemy, że stała $C = \frac{1}{8}$ spełnia warunki zadania, tzn. że zachodzi nierówność

$$8 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^4\,. \tag{1}$$

Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że x_1 jest największą z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Szacujemy prawą stronę nierówności (1) wprowadzając oznaczenie $S = x_2 + x_3 + \ldots + x_n$. Mamy:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^4 &\geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^4 - \Big(x_1 - \sum_{i=2}^{n} x_i\Big)^4 = \\ &= (x_1+S)^4 - (x_1-S)^4 = \\ &= 8x_1 S^3 + 8x_1^3 S.\end{aligned}$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = S$, czyli $x_1 = x_2 + x_3 + \ldots + x_n$. Ponadto mamy

$$\begin{aligned}S^3 &= \sum_{i=2}^{n} x_i^3 + 3 \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (x_i^2 x_j + x_i x_j^2) + 6 \sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant n} x_i x_j x_k \geqslant \\ &\geqslant \sum_{i=2}^{n} x_i^3 + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (x_i^2 x_j + x_i x_j^2),\end{aligned}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy co najwyżej jedna z liczb $x_2, x_3, \ldots, x_n$ jest dodatnia. Zatem

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^4 \geqslant 8x_1\Big(\sum_{i=2}^{n} x_i^3 + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (x_i^2 x_j + x_i x_j^2)\Big) + 8x_1^3 \sum_{i=2}^{n} x_i$$

i do udowodnienia pozostaje nierówność

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2+x_j^2) \leqslant x_1\Big(\sum_{i=2}^{n} x_i^3 + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (x_i^2 x_j + x_i x_j^2)\Big) + x_1^3 \sum_{i=2}^{n} x_i\,,$$

czyli

$$\sum_{i=2}^{n} (x_1^3 x_i + x_1 x_i^3) + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2+x_j^2) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=2}^{n} x_1 x_i^3 + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (x_1 x_i^2 x_j + x_1 x_i x_j^2) + \sum_{i=2}^{n} x_1^3 x_i\,,$$

co z kolei sprowadza się do

$$\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (x_i^3 x_j + x_i x_j^3) \leqslant \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (x_1 x_i^2 x_j + x_1 x_i x_j^2)\,.$$

Powyższa nierówność wynika z nierówności $x_i \leqslant x_1$ oraz $x_j \leqslant x_1$.

Uwalniając się od założenia, że x_1 jest liczbą największą, możemy dać odpowiedź: najmniejszą stałą spełniającą warunki zadania jest $C=\frac{1}{8}$; równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dwie z liczb $x_1,x_2,\ldots,x_n$ są sobie równe, a pozostałe są zerami.

Uwaga

Dla $n=2$ nierówność (1) jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1,x_2, niekoniecznie nieujemnych. Mamy bowiem

$$8(x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3) = (x_1+x_2)^4 - (x_1-x_2)^4 \leqslant (x_1+x_2)^4\,.$$

Dla $n=3$ już tak nie jest, co pokazuje przykład liczb $x_1=x_2=2$, $x_3=-1$. Nierówność (1) przybiera wtedy postać $96 \leqslant 81$.

Zadanie **3.** Rozważmy planszę kwadratową $n\times n$, gdzie n jest daną dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Plansza jest podzielona na n^2 kwadratów jednostkowych. Dwa różne kwadraty planszy są *przyległe*, gdy mają wspólny bok. N kwadratów planszy zostało wyróżnionych w taki sposób, by każdy kwadrat planszy (wyróżniony lub nie) był przyległy do co najmniej jednego kwadratu wyróżnionego. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość N.

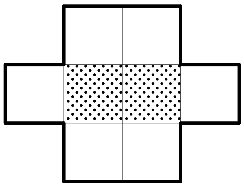
Rozwiązanie

Odp.: Minimalna liczba pól wyróżnionych wynosi $n(n+2)/4$.

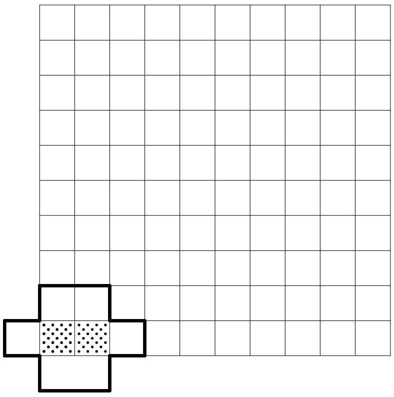
Przyjmijmy $n=2k$.

Podamy metodę jak wyróżnić $n(n+2)/4=k(k+1)$ pól planszy w sposób spełniający warunki zadania. W tym celu pokryjemy planszę figurami o kształcie jak na rysunku 61. Każda taka figura zawiera dwa wyróżnione pola. Sposób pokrycia jest następujący.

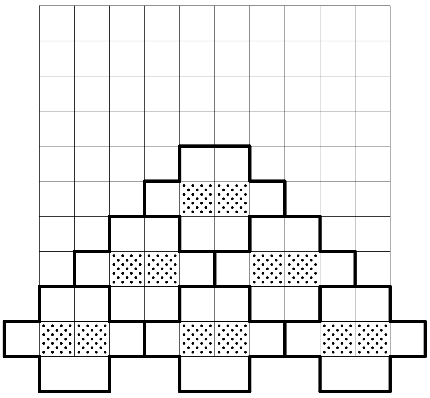
Pierwszą figurę umieszczamy w rogu planszy (rys. 62). Naszym celem jest pokrycie całej planszy, dopuszczamy jednak, aby figury wystawały poza nią.



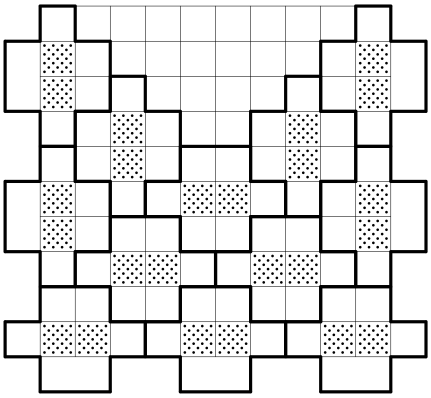
rys. 61



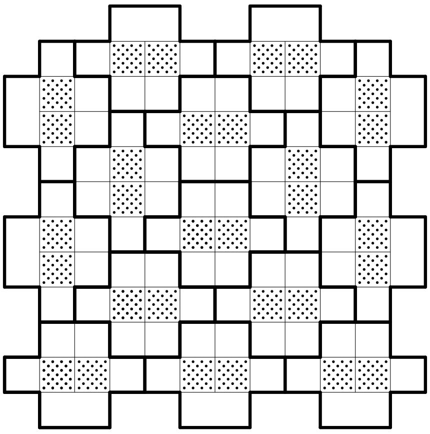
rys. 62



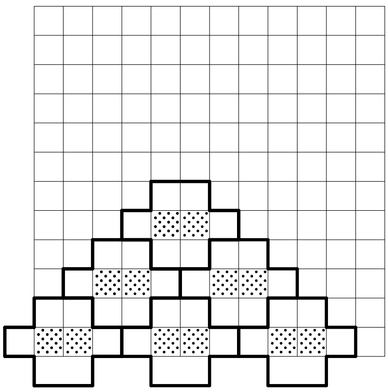
rys. 63



rys. 64

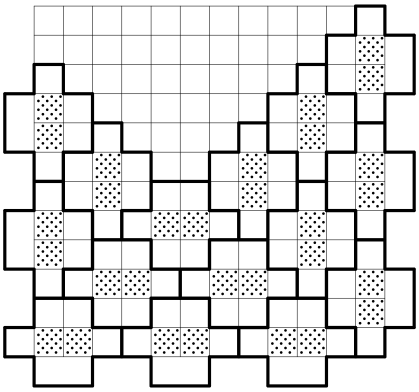


rys. 65

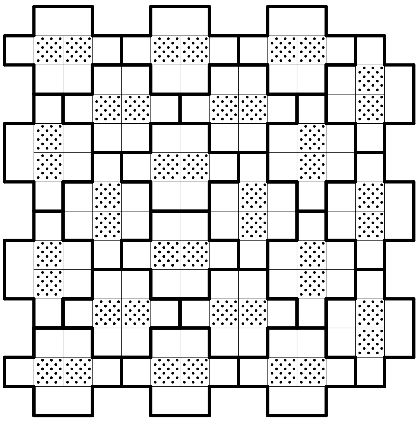


rys. 66

Gdy k jest liczbą nieparzystą, pokrywanie planszy kontynuujemy według zasady pokazanej na rysunkach 63, 64 oraz 65. Dla liczb k parzystych pokrywamy szachownicę tak, jak pokazano na rysunkach 66, 67 oraz 68.



rys. 67



rys. 68

Po pokryciu planszy wystaje poza nią $4k$ pól (rys. 65 i 68). Stąd liczba figur, które pokrywają planszę, wynosi $\frac{1}{8}((2k)^2+4k)=\frac{1}{2}k(k+1)$, co oznacza, że wyróżniliśmy $k(k+1)$ pól.

Wykorzystując to samo pokrycie planszy wykazujemy, że nie da się wyróżnić mniej niż $k(k+1)$ pól w sposób spełniający warunki zadania. Istotnie: gdyby takie wyróżnienie istniało, oznaczałoby to, że w jednej z $\frac{1}{2}k(k+1)$ figur, które pokrywają planszę, jest tylko jedno wyróżnione pole. W figurze tej byłoby wówczas pole (jedno z dwóch zacieniowanych na rysunku 61), które nie jest przyległe do żadnego z wyróżnionych pól.

Zadanie **4.** Wyznaczyć wszystkie takie pary (n,p) liczb całkowitych dodatnich, że: p jest liczbą pierwszą, $n \leqslant 2p$ oraz $(p-1)^n+1$ dzieli się przez n^{p-1}.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu zadania skorzystamy z następującego lematu.

Lemat

Jeżeli q jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez q, to dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej r względnie pierwszej z $q-1$ liczba $(a-1)^r+1$ nie dzieli się przez q.

Dowód lematu

Dla $q=2$ teza lematu jest oczywista.

Jeżeli natomiast q jest liczbą nieparzystą, to wobec parzystości liczby $q-1$ liczba r jest nieparzysta. Ponieważ r jest względnie pierwsze z $q-1$, istnieje taka liczba całkowita dodatnia s, że

$$rs \equiv 1 \pmod{q-1},$$

czyli $rs = k(q-1)+1$ dla pewnego k. Przy tym liczba s jest nieparzysta. Gdyby liczba $(a-1)^r+1$ była podzielna przez q, tzn. gdyby zachodziła kongruencja

$$(a-1)^r \equiv -1 \pmod{q},$$

to podnosząc stronami tę kongruencję do potęgi s otrzymalibyśmy

$$(a-1)^{rs} \equiv -1 \pmod{q}.$$

Na mocy wniosku z dodatku (zob. str. 105) mamy

$$(a-1)^{rs} \equiv a-1 \pmod{q},$$

skąd $a-1 \equiv -1 \pmod{q}$. To przeczy założeniu, że a nie dzieli się przez q.

Dowód lematu jest więc zakończony.

Przejdziemy teraz do właściwej części rozwiązania.

Zauważmy, że warunki zadania spełnia każda para postaci $(1,p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Przyjmijmy więc, że $n \geqslant 2$. Niech q będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n. Wówczas liczba n jest względnie pierwsza z $q-1$. Jeżeli $q \neq p$, to na mocy lematu liczba $(p-1)^n+1$ nie dzieli się przez q, tym bardziej nie dzieli się przez n.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $q=p$, co wobec nierówności $n \leqslant 2p$ wymusza $n=p$ lub $(n,p)=(4,2)$.

Przypadek $(n,p)=(4,2)$ odrzucamy sprawdzając bezpośrednio, że liczba $(2-1)^4+1=2$ nie dzieli się przez $4^{2-1}=4$.

Zatem $n=p$. Należy więc wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $(p-1)^p+1$ dzieli się przez p^{p-1}. Podzielność ta jest spełniona dla $p=2$. Pozostaje rozważyć przypadek, gdy p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Z rozwinięcia dwumiennego Newtona

$$(p-1)^p+1 = p^p - \binom{p}{p-1}p^{p-1} + \binom{p}{p-2}p^{p-2} - \ldots + \binom{p}{3}p^3 - \binom{p}{2}p^2 + p\cdot p.$$

Stąd widać, że liczba $(p-1)^p+1$ daje z dzielenia przez p^3 resztę p^2, gdyż $\binom{p}{2}$ dzieli się przez p. Zatem $(p-1)^p+1$ dzieli się przez p^2, ale nie dzieli się przez p^3. Stąd $p \leqslant 3$.

Odpowiedź

Parami spełniającymi warunki zadania są pary postaci $(1,p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą oraz pary $(2,2)$ i $(3,3)$.

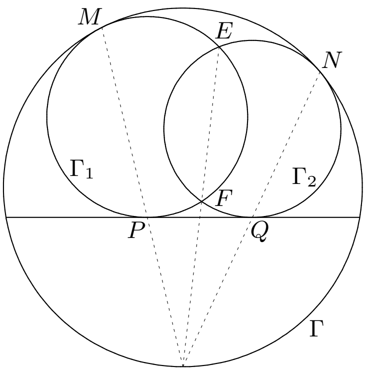
Zadanie **5.** Okręgi Γ_1 i Γ_2 są położone wewnątrz okręgu Γ i są odpowiednio styczne do Γ w różnych punktach M i N. Okrąg Γ_1 przechodzi przez środek okręgu Γ_2. Prosta przechodząca przez punkty przecięcia okręgów Γ_1 i Γ_2 przecina okrąg Γ w punktach A i B. Proste MA i MB przecinają Γ_1 odpowiednio w punktach C i D. Udowodnić, że prosta CD jest styczna do okręgu Γ_2.

Rozwiązanie

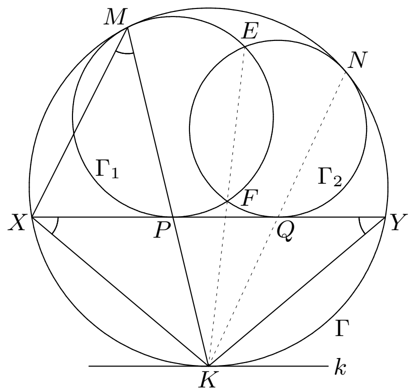
Cała trudność zadania leży w następującym lemacie.

Lemat

Okręgi Γ_1 i Γ_2 przecinają się w punktach E i F. Okręgi te są położone wewnątrz okręgu Γ i są styczne do niego odpowiednio w punktach M i N (rys. 69). Prosta p jest styczna do okręgów Γ_1 i Γ_2 odpowiednio w punktach P i Q. Wówczas proste MP, NQ, EF przecinają się w jednym punkcie, który leży na okręgu Γ.



rys. 69



rys. 70

Dowód lematu

Oznaczmy przez X i Y punkty przecięcia prostej PQ z okręgiem Γ, tak jak na rysunku 70. Poprowadźmy styczną k do okręgu Γ, równoległą do prostej PQ oraz taką, że okręgi Γ_1 i Γ_2 nie leżą pomiędzy prostymi k i PQ. Niech K będzie punktem wspólnym prostej k i okręgu Γ.

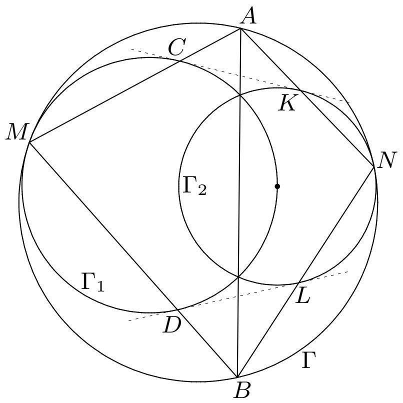
Jednokładność o środku M przekształcająca okrąg Γ_1 na Γ, przeprowadza punkt P na punkt K. To dowodzi, że punkty M, P, K są współliniowe. Analogicznie dowodzimy, że punkty N, Q, K są współliniowe.

Pozostaje wykazać, że punkty E, F, K leżą na jednej prostej. Fakt ten jest równoważny stwierdzeniu, że punkt K leży na osi potęgowej okręgów Γ_1, Γ_2, i tego właśnie będziemy dowodzić.

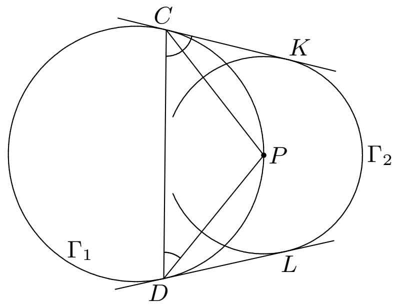
Ponieważ proste k i XY są równoległe, punkt K jest środkiem łuku XY. Stąd $\sphericalangle KXY = \sphericalangle KYX = \sphericalangle KMX$, co oznacza, że trójkąty KPX oraz KXM są podobne. Zatem $KX^2 = KP\cdot KM$. Rozumując analogicznie dochodzimy do równości $KY^2 = KQ\cdot KN$. Łącząc dwa ostatnie związki otrzymujemy $KP\cdot KM = KQ\cdot KN$. Uzyskana równość oznacza, że punkt K leży na osi potęgowej okręgów Γ_1 i Γ_2, a tego dowodziliśmy.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Oznaczmy przez K i L punkty przecięcia okręgu Γ_2 odpowiednio z odcinkami AN i BN (rys. 71). Na mocy lematu proste CK i DL są wspólnymi stycznymi okręgów Γ_1 i Γ_2.



rys. 71



rys. 72

Niech P będzie środkiem okręgu Γ_2 (rys. 72). Aby wykazać, że prosta CD jest styczna do okręgu Γ_2, wystarczy udowodnić, że prosta CP jest dwusieczną kąta DCK. To jednak wynika z następujących równości:

$$\sphericalangle PCK = \sphericalangle PDC = \sphericalangle PCD.$$

Rozwiązanie zadania jest więc zakończone.

Zadanie **6.** Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$f(x-f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

dla wszystkich $x,y\in\mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że f nie jest funkcją stałą. Gdyby bowiem $f(x)=c$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, to mielibyśmy $c=c+xc+c-1$, czyli $cx+(c-1)=0$, skąd $c=0$ i $c=1$, co prowadzi do sprzeczności $0=1$.

Niech $h(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-1$, czyli $f(x)=h(x)-\frac{1}{2}x^2+1$.

Niech w_1 oraz w_2 będą dwiema różnymi wartościami funkcji f, powiedzmy $w_1=f(y_1)$ oraz $w_2=f(y_2)$. Wtedy dla dowolnej liczby rzeczywistej x uzyskujemy

$$f(x-w_1) = f(w_1) + xw_1 + f(x) - 1\,,$$

skąd

$$h(x-w_1) - \tfrac{1}{2}(x-w_1)^2 + 1 = h(w_1) - \tfrac{1}{2}w_1^2 + 1 + xw_1 + h(x) - \tfrac{1}{2}x^2\,,$$

co sprowadza się do

$$h(x-w_1) = h(w_1) + h(x)\,. \tag{1}$$

Wstawiając do powyższej równości $x = w_1$ otrzymujemy $h(0) = 2h(w_1)$, skąd

(2) $$h(w_1) = \tfrac{1}{2}h(0)\,.$$

Zależność (1) przybiera więc postać

$$h(x - w_1) = \tfrac{1}{2}h(0) + h(x)\,.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$h(x - w_2) = \tfrac{1}{2}h(0) + h(x)\,.$$

Porównując dwie ostatnie zależności widzimy, że liczba $r = w_1 - w_2$ jest okresem funkcji h. Ponadto udowodniliśmy, że okresem funkcji h jest każda liczba postaci $f(x_1) - f(x_2)$. W szczególności biorąc $x_1 = x + r$ oraz $x_2 = x$ otrzymujemy

$$f(x_1) - f(x_2) = h(x+r) - \tfrac{1}{2}(x+r)^2 + 1 - h(x) + \tfrac{1}{2}x^2 - 1 = -xr - \tfrac{1}{2}r^2\,.$$

Dobierając odpowiednią liczbę x w powyższej zależności stwierdzamy, że każda liczba rzeczywista jest okresem funkcji h. Stąd wynika, że funkcja h jest stała, a wobec (2) jest funkcją zerową. Stąd musi być

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2\,.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że powyższa funkcja spełnia podane w zadaniu równanie.

XXII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Zadanie **1.** Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech $M=\{1,2,\ldots,n\}$. Wyznaczyć liczbę uporządkowanych szóstek zbiorów $(A_1,A_2,\ldots,A_6)$ spełniających następujące dwa warunki:

(a) zbiory $A_1,A_2,\ldots,A_6$ są (niekoniecznie różnymi) podzbiorami zbioru M;

(b) każdy element zbioru M albo nie należy do żadnego, albo należy do dokładnie trzech, albo należy do wszystkich sześciu zbiorów $A_1,A_2,\ldots,A_6$.

Rozwiązanie

Niech $A_1,A_2,\ldots,A_6$ będą zbiorami spełniającymi warunki zadania. Wtedy z każdą, ustaloną liczbą $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ możemy związać ciąg $(x_1,x_2,\ldots,x_6)$ określony wzorem:

$$x_i=\begin{cases}0 & \text{gdy} \quad k\in A_i\\ 1 & \text{gdy} \quad k\notin A_i\end{cases}$$

W każdym takim ciągu wszystkie wyrazy są zerami lub wszystkie wyrazy są jedynkami lub też występują trzy zera i trzy jedynki — liczba tych ciągów jest więc równa $\binom{6}{0}+\binom{6}{3}+\binom{6}{6}=22$. Ponieważ wybranie dla każdej liczby k ciągu $(x_1,x_2,\ldots,x_6)$ wyznacza zbiory $A_1,A_2,\ldots,A_6$, wnioskujemy, że liczba szóstek zbiorów spełniających warunki zadania jest równa 22^n.

Zadanie **2.** Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą C_1 i najmniejszą liczbę rzeczywistą C_2 takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzą następujące nierówności

$$C_1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}<C_2.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że $C_1=1$ oraz $C_2=4$. Z zależności

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}>$$
$$>\frac{a}{a+b+c+d+e}+\frac{b}{a+b+c+d+e}+\frac{c}{a+b+c+d+e}+$$
$$+\frac{d}{a+b+c+d+e}+\frac{e}{a+b+c+d+e}=1$$

wynika, że $C_1\geqslant 1$, natomiast przy założeniu, że a jest największą spośród liczb a, b, c, d, e otrzymujemy

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}<1+1+1+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+d}=4,$$

skąd $C_2\leqslant 4$. W celu wykazania, że podanych stałych nie można poprawić, rozważmy następujące liczby

$$a=1,\quad b=q,\quad c=q^2,\quad d=q^3,\quad e=q^4,$$

gdzie q jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Wtedy

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}=\frac{4}{q+1}+\frac{q^4}{q^4+1}\,,$$

co dąży do 1 przy $q\to\infty$ oraz do 4 przy $q\to 0$. To dowodzi, że podana w zadaniu suma może osiągać wartości dowolnie bliskie 1 oraz wartości dowolnie bliskie 4.

Uwaga

Przyjmując

$$W(a,b,c,d,e)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}$$

oraz zauważając, że

$$W(a,b,c,d,e)+W(e,d,c,b,a)=5$$

stwierdzamy, że $C_1+C_2=5$. Po tym spostrzeżeniu zadanie sprowadza się do wyznaczenia tylko jednej ze stałych C_1, C_2.

Zadanie **3.** Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie takie układy n funkcji $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$, gdzie $f_i\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dla każdego $i=1,2,\ldots,n$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned}
f_1(x)-f_2(x)f_2(y)+f_1(y)&=0\\
f_2(x^2)-f_3(x)f_3(y)+f_2(y^2)&=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
f_k(x^k)-f_{k+1}(x)f_{k+1}(y)+f_k(y^k)&=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
f_n(x^n)-f_1(x)f_1(y)+f_n(y^n)&=0
\end{aligned}$$

Rozwiązanie

Odp.: $f_1(x)=f_2(x)=\ldots=f_n(x)=a$, gdzie $a=0$ lub $a=2$.

W celu uzyskania cyklicznej numeracji rozważanych funkcji, wprowadźmy oznaczenie: $f_{n+1}=f_1$. Wstawiając $y=x$ do k-tego równania otrzymujemy

$$2f_k(x^k)=(f_{k+1}(x))^2\,,\quad \text{dla wszystkich } x\in\mathbb{R}.$$

Po podstawieniu powyższego związku do k-tego równania, sprowadzamy je do postaci

$$(f_{k+1}(x))^2-2f_{k+1}(x)f_{k+1}(y)+(f_{k+1}(y))^2=0,$$

czyli

$$(f_{k+1}(x)-f_{k+1}(y))^2=0\,,\quad \text{dla wszystkich } x,y\in\mathbb{R} \text{ oraz } k=1,2\ldots,n.$$

Zatem funkcje $f_1,f_2,\ldots,f_n$ są stałe. Niech więc $f_k(x)=a_k$ dla $k=1,2,\ldots,n+1$. Wtedy $a_1=a_{n+1}$ oraz $2a_k=a_{k+1}^2$ dla $k=1,2,\ldots,n$.

Liczby a_k są nieujemne. Jeżeli jedna z tych liczb jest zerem, to pozostałe też są zerami, co daje nam rozwiązanie danego w zadaniu układu równań: funkcje stałe równe 0.

Przyjmijmy więc, że $a_1 > 0$. Z równości $2a_k = a_{k+1}^2$ wynika, że liczba a_{k+1} jest średnią geometryczną liczb 2 i a_k, co oznacza, że a_{k+1} znajduje się pomiędzy liczbami 2 i a_k. Zatem jeśli $a_1 < 2$, to ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ jest rosnący, co stoi w sprzeczności z założenem $a_1 = a_{n+1}$. Podobnie, jeżeli $a_1 > 2$, to ciąg ten jest malejący. Zatem musi być $a_1 = 2$, co pociąga $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 2$. Otrzymaliśmy drugie rozwiązanie układu równań: funkcje stałe równe 2.

Zadanie **4.** Dany jest trójkąt ABC. Przez punkt P leżący wewnątrz trójkąta ABC prowadzimy trzy proste k, l, m w taki sposób, że:

(a) prosta k przecina proste AB i AC odpowiednio w takich punktach A_1 i A_2 ($A_1 \neq A_2$), że $PA_1 = PA_2$;

(b) analogicznie prosta l przecina proste BC i BA odpowiednio w takich punktach B_1 i B_2 ($B_1 \neq B_2$), że $PB_1 = PB_2$;

(c) analogicznie prosta m przecina proste CA i CB odpowiednio w takich punktach C_1 i C_2 ($C_1 \neq C_2$), że $PC_1 = PC_2$.

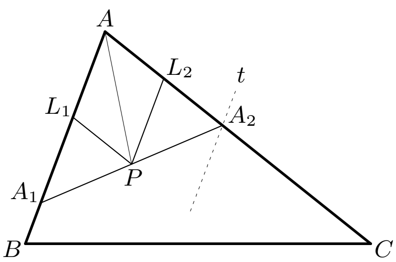
Udowodnić, że proste k, l, m są przez te warunki wyznaczone jednoznacznie. Wyznaczyć punkt P (i udowodnić, że jest tylko jeden taki punkt), dla którego trójkąty AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 mają równe pola.

Rozwiązanie

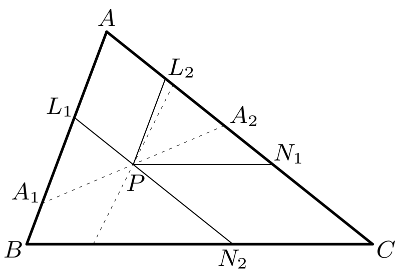
Oznaczmy przez t prostą będącą obrazem prostej AB w symetrii względem punktu P (rys. 73). Wtedy punkt A_2 leży zarówno na prostej t, jak i na prostej AC — jest więc wyznaczony jednoznacznie. Łącząc punkty P i A_2 otrzymujemy prostą k.

Załóżmy, że pola trójkątów AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 są równe.

Niech L_1 i L_2 będą odpowiednio środkami odcinków AA_1 i AA_2. Wówczas czworokąt AL_1PL_2 jest równoległobokiem, którego pole jest równe połowie pola trójkąta AA_1A_2 (pola trójkątów A_1L_1P, AL_1P są równe, jak również pola trójkątów A_2L_2P, AL_2P są równe).



rys. 73



rys. 74

Analogicznie, niech N_1 i N_2 będą odpowiednio środkami odcinków CC_1 i CC_2 (rys. 74). Wtedy CN_1PN_2 jest równoległobokiem oraz

$$[AL_1PL_2] = \tfrac{1}{2}[AA_1A_2] = \tfrac{1}{2}[CC_1C_2] = [CN_1PN_2],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Wysokości równoległoboków AL_1PL_2 oraz CN_1PN_2, opuszczone odpowiednio na podstawy L_1P i N_2P, są równe, co na mocy równości pól tych równoległoboków daje $L_1P = N_2P$. Ponieważ proste L_1N_2 i AC są równoległe, punkt P musi leżeć na środkowej trójkąta ABC poprowadzonej do boku AC.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie w pozostałych dwóch przypadkach widzimy, że punkt P, dla którego pola trójkątów AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 są równe, jest punktem przecięcia środkowych w trójkącie ABC.

Pozostaje zauważyć, że środek ciężkości trójkąta ABC wyznacza trójkąty AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, każdy o polu równym 4/9 pola trójkąta ABC.

Zadanie **5.** Ciąg liczb całkowitych (a_n) spełnia następującą zależność rekurencyjną:

$$a_{n+1} = a_n^3 + 1999$$

dla $n = 1,2,\ldots$. Udowodnić, że istnieje co najwyżej jedna wartość n, dla której a_n jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Niech r_n będzie resztą z dzielenia liczby a_n przez 7. Wtedy

$$r_{n+1} \equiv r_n^3 + 4 \pmod 7 \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots\,.$$

Przez bezpośrednie sprawdzenie stwierdzamy, że ciąg (r_n) wygląda następująco (w zależności od r_1):

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	$\ldots$
0	4	5	3	3	3	$\ldots$
1, 2, 4	5	3	3	3	3	$\ldots$
3, 5, 6	3	3	3	3	3	$\ldots$

Patrząc na powyższą tabelę widzimy, że $r_n \in \{3,5\}$ dla $n \geqslant 3$. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej daje z dzielenia przez 7 resztę 0, 1, 2 lub 4, więc liczba a_n nie jest kwadratem liczby całkowitej dla żadnego $n \geqslant 3$.

Przypuśćmy, wbrew tezie, że dany ciąg zawiera co najmniej dwa wyrazy będące kwadratami liczb całkowitych. Wtedy $a_1 = u^2$ oraz $a_2 = v^2$, gdzie u, v są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Wówczas

$$1999 = a_2 - a_1^3 = v^2 - u^6 = (v - u^3)(v + u^3)\,,$$

a ponieważ liczba 1999 jest pierwsza, uzyskujemy $v - u^3 = 1$ i $v + u^3 = 1999$. Stąd $u^3 = 999$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba 999 nie jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie **6.** Rozwiązać następujący układ równań

$$x_n^2 + x_nx_{n-1} + x_{n-1}^4 = 1 \quad (n = 1,2,\ldots,1999)$$
$$x_0 = x_{1999}$$

w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych.

Rozwiązanie

Rozważmy wielomian

$$W(x,y) = x^2 + xy + y^4 - 1.$$

Wówczas dany układ równań można zapisać w postaci

$$W(x_n, x_{n-1}) = 0 \quad (n = 1,2,\ldots,1999)$$
$$x_0 = x_{1999}.$$

Dla ustalonego $y \geqslant 0$ równanie $W(x,y) = 0$ jest równaniem kwadratowym o niewiadomej x i sumie rozwiązań równej $-y \leqslant 0$. Zatem równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie nieujemne. Stąd wynika, że x_0 wyznacza wartości wszystkich pozostałych niewiadomych układu równań.

Równanie $W(x,x) = 0$, czyli $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$, ma jedno rozwiązanie rzeczywiste nieujemne:

$$a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Jeżeli $0 \leqslant y < a$, to nieujemne rozwiązanie równania $W(x,y) = 0$ spełnia warunek: $x > a$. Istotnie: przypuśćmy, że $x \leqslant a$. Wielomian W dla argumentów nieujemnych jest rosnący względem każdej ze zmiennych, więc

$$W(x,y) \leqslant W(a,y) < W(a,a) = 0,$$

sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że jeżeli $y > a$, to nieujemne rozwiązanie równania $W(x,y) = 0$ spełnia warunek $x < a$. Stąd stwierdzamy, że

jeśli $x_{n-1} < a$, to $x_n > a$, jeśli $x_{n-1} = a$, to $x_n = a$, jeśli $x_{n-1} > a$, to $x_n < a$.

Zatem nierówność $x_0 < a$ (odpowiednio $x_0 > a$) implikuje $x_{1999} > a$ (odpowiednio $x_{1999} < a$), co stoi w sprzeczności z warunkiem $x_0 = x_{1999}$. To dowodzi, że istnieje tylko jedno rozwiązanie układu równań, a mianowicie

$$x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_{1999} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że powyższy ciąg $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{1999})$ spełnia podany układ równań.

Zadanie **7.** Wyznaczyć wszystkie takie pary (x,y) liczb całkowitych dodatnich, że $x^{x+y} = y^{y-x}$.

Rozwiązanie

Odp.: $x = q^{(q-1)/2}$, $y = q^{(q+1)/2}$, gdzie $q \geqslant 1$ jest liczbą nieparzystą lub kwadratem liczby parzystej.

Sposób I

Zauważmy, że równanie ma rozwiązanie $x = y = 1$ i nie posiada innych rozwiązań, w których $x = 1$ lub $y = 1$. Załóżmy więc, że x i y są większe od 1. Ponieważ $y^{y-x} = x^{x+y} > 1$, więc $y > x > 1$.

Lemat

Jeżeli liczby całkowite a, b, x, y większe od 1 spełniają równanie $x^a = y^b$, to x i y są potęgami tej samej liczby. Dokładniej, istnieją takie liczby całkowite dodatnie k, m, n, że $x = k^m$ oraz $y = k^n$, przy czym liczby m i n są względnie pierwsze.

Dowód lematu

Niech $z = x^a = y^b$ oraz niech c będzie najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a, b. Wtedy każdy dzielnik pierwszy liczby z wchodzi do jej rozkładu na czynniki pierwsze z wykładnikiem podzielnym zarówno przez a, jak i przez b, a więc podzielnym przez c. Zatem liczba $k = \sqrt[c]{z}$ jest całkowita. Liczby $m = c/a$ oraz $n = c/b$ są względnie pierwsze i ponadto $x = k^m$ oraz $y = k^n$, co kończy dowód lematu.

Korzystając z lematu dobieramy takie liczby k, m, n, że $x = k^m$, $y = k^n$. Skoro $y > x$, więc $n > m$. Ponadto $k > 1$. Dane równanie sprowadza się do postaci

$$m(k^n + k^m) = n(k^n - k^m)\,,$$

co daje

$$\frac{n}{m} = \frac{k^n + k^m}{k^n - k^m}, \quad \text{czyli} \quad \frac{n}{m} = \frac{k^{n-m} + 1}{k^{n-m} - 1}\,.$$

Po podstawieniu $r = n - m$ ostatnie równanie przybiera postać

$$\frac{r}{m} = \frac{2}{k^r - 1}, \quad \text{skąd} \quad m = \frac{r(k^r - 1)}{2}, \quad n = m + r = \frac{r(k^r + 1)}{2}\,.$$

Zatem

$$x = k^{r(k^r-1)/2} \quad \text{oraz} \quad y = k^{r(k^r+1)/2}.$$

Podstawienie $q = k^r$ daje

$$x = q^{(q-1)/2} \quad \text{oraz} \quad y = q^{(q+1)/2}.$$

Liczba q jest większa od 1 i całkowita. Z powyższych wzorów wynika więc, że liczby x, y są całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy q jest liczbą nieparzystą lub kwadratem liczby parzystej. Łącząc to z przypadkiem $q = 1$ rozważanym na początku otrzymujemy wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich danego równania.

Sposób II

Przekształcamy dane równanie do postaci

$$(xy)^x = \left(\frac{y}{x}\right)^y,$$

a następnie podnosimy stronami do potęgi $1/x$ uzyskując

$$xy = \left(\frac{y}{x}\right)^{y/x}.$$

Podstawiając $q = y/x$ otrzymujemy $xy = q^q$. Z dwóch ostatnich równań mamy

$$x = q^{(q-1)/2} \quad \text{oraz} \quad y = q^{(q+1)/2}.$$

Powyższy wzór daje wszystkie rozwiązania danego równania w liczbach rzeczywistych dodatnich, gdy q jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Pozostaje wyznaczyć takie liczby q, dla których liczby x i y są całkowite. Ze wzoru $q = y/x$ wynika, że q musi być liczbą wymierną. Liczba q^q przy wymiernym q jest całkowita tylko wtedy, gdy liczba q jest całkowita. Istotnie: jeżeli liczba $q = m/n$ jest przedstawiona w postaci ułamka nieskracalnego, to

$$(q^q)^n = q^m = \frac{m^m}{n^m}$$

jest liczbą całkowitą, skąd $n = 1$.

Zatem q jest liczbą całkowitą dodatnią, a więc musi być ona nieparzysta lub być kwadratem liczby parzystej.

Zadanie **8.** Dana jest prosta g i punkty P, Q, S leżące po tej samej stronie tej prostej. Punkty M i N leżą na prostej g, przy czym $PM \perp g$ i $QN \perp g$. Punkt S leży między prostymi PM i QN. Ponadto $PM = PS$ oraz $QN = QS$. Symetralne odcinków SM i SN przecinają się w punkcie R. Prosta RS przecina okrąg opisany na trójkącie PQR w punkcie T różnym od R. Udowodnić, że punkt S jest środkiem odcinka RT.

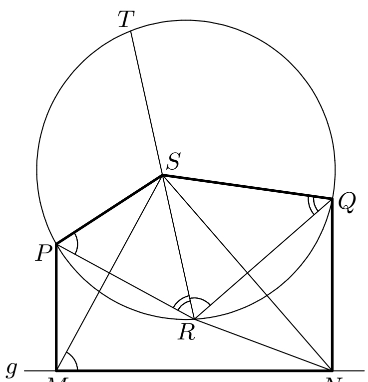
Rozwiązanie

Zauważmy, że punkt R jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie MNS (rys. 75). Zatem

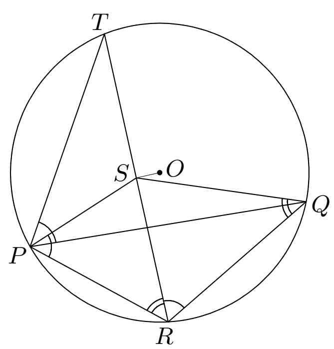
(1) $$\sphericalangle SRQ = \tfrac{1}{2}\sphericalangle SRN = \sphericalangle SMN = 90^\circ - \sphericalangle PMS = \sphericalangle MPR = \sphericalangle SPR.$$

Analogicznie dowodzimy, że

(2) $$\sphericalangle SRP = \sphericalangle SQR.$$



rys. 75



rys. 76

Z powyższych równości otrzymujemy (rys. 76)

$$\sphericalangle TPQ = \sphericalangle TRQ = \sphericalangle SPR, \quad \text{a więc} \quad \sphericalangle SPT = \sphericalangle RPQ.$$

Ponadto $\sphericalangle STP = \sphericalangle RQP$. Z dwóch ostatnich zależności wynika, że trójkąty SPT i RPQ są podobne. Podobne są również trójkąty PRS i RQS. Zatem

$$\frac{ST}{RQ} = \frac{PS}{PR} = \frac{RS}{RQ},$$

skąd $RS = ST$, a to należało udowodnić.

Uwaga 1.

Teza zadania jest równoważna wykazaniu, że $\sphericalangle RSO = 90^\circ$, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR (rys. 76). Po uzyskaniu związków (1) i (2), nasze zadanie sprowadza się więc do rozwiązania następującego problemu:

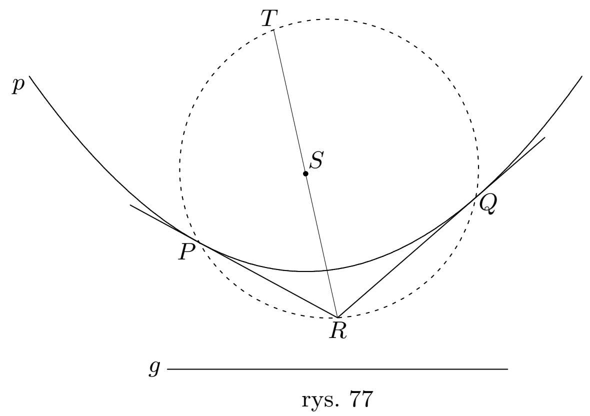
Zadanie

Punkt S leży wewnątrz kąta wypukłego PRQ, przy czym spełnione są równości: $\sphericalangle SRQ = \sphericalangle SPR$ oraz $\sphericalangle SRP = \sphericalangle SQR$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR. Dowieść, że $\sphericalangle RSO = 90^\circ$.

Zacytowane zadanie (w przypadku, gdy punkt S leży wewnątrz trójkąta PQR) to zadanie 4 z zawodów stopnia drugiego L Olimpiady Matematycznej. Trzy sposoby jego rozwiązania zostały przedstawione w broszurze: *L Olimpiada Matematyczna*, Sprawozdanie Komitetu Głównego, Warszawa 2000, str. 54–55. Druga część zaprezentowanego wyżej rozwiązania zaczynająca się od słów „Z powyższych równości otrzymujemy …" to kopia sposobu III.

Uwaga 2.

W treści rozpatrywanego zadania jest ukryta pewna ciekawa własność paraboli (zob. str. 110):



rys. 77

Niech p będzie parabolą o ognisku S i kierownicy g (rys. 77). Punkty P i Q leżą na tej paraboli. Styczne do paraboli p w punktach P i Q przecinają się w punkcie R. Punkt T jest punktem symetrycznym do punktu R względem ogniska S. Wówczas punkty P, Q, R, T leżą na jednym okręgu.

Zadanie **9.** Punktem kratowym nazywamy punkt płaszczyzny, który ma współrzędne całkowite. Rozważamy następującą grę jednoosobową. Pozycja w grze składa się ze skończonego zbioru zaznaczonych punktów kratowych i ze skończonego zbioru zaznaczonych odcinków spełniających następujące warunki:

(a) końce każdego zaznaczonego odcinka są zaznaczonymi punktami kratowymi;

(b) każdy zaznaczony odcinek jest równoległy do jednej osi układu współrzędnych lub do jednej z dwóch prostych o równaniach $y=x$, $y=-x$;

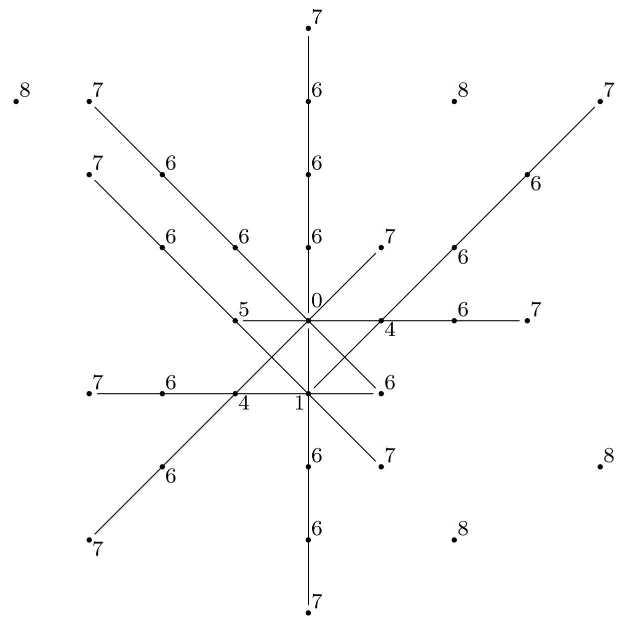
(c) każdy zaznaczony odcinek zawiera dokładnie 5 punktów kratowych i każdy z tych punktów jest zaznaczony;

(d) dowolne dwa zaznaczone odcinki mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Ruch w grze polega na zaznaczeniu nowego punktu kratowego, a następnie zaznaczeniu odcinka w taki sposób, by powstała nowa pozycja w grze. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka pozycja początkowa w grze, że możliwe jest wykonanie nieskończonego ciągu ruchów.

Rozwiązanie

Potencjałem punktu zaznaczonego nazwiemy liczbę tych spośród ośmiu odcinków długości 1 lub $\sqrt{2}$ łączących ten punkt z punktami kratowymi, które **nie są zawarte** w żadnym odcinku zaznaczonym (na rys. 78 przedstawiona jest przykładowa pozycja w grze i podane są potencjały zaznaczonych punktów). Punkt zaznaczony o dodatnim potencjale nazwiemy punktem *aktywnym*, a punkt o potencjale zerowym — punktem *wyczerpanym*.



rys. 78

Potencjałem pozycji w grze nazwiemy sumę potencjałów wszystkich punktów zaznaczonych. Prześledźmy, jak zmienia potencjał pozycji wykonanie ruchu w grze. Zaznaczenie dodatkowego punktu zwiększa potencjał pozycji o 8, gdyż tyle wynosi potencjał punktu zaznaczonego, który nie należy do żadnego odcinka zaznaczonego. Dorysowanie nowego odcinka zaznaczonego zmniejsza potencjał pozycji o $1+2+2+2+1=8$, gdyż potencjały pięciu punktów zaznaczonych należących do dorysowanego odcinka zmniejszają się odpowiednio o 1, 2, 2, 2, 1. Zatem wykonanie pełnego ruchu w grze nie zmienia potencjału pozycji.

Niech P będzie potencjałem pozycji wyjściowej. Po P^2+1 ruchach potencjał będzie nadal równy P, ale liczba punktów zaznaczonych będzie większa od P^2. Ponieważ liczba punktów aktywnych nie może przekroczyć potencjału, punktów aktywnych jest nie więcej niż P. Istnieje więc taki punkt zaznaczony, że przechodząca przez niego prosta pozioma lub pionowa nie zawiera żadnych punktów aktywnych. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to prosta pozioma, a wybrany punkt ma współrzędne (x,y). Punkt ten jest zaznaczony i nie jest aktywny, musi więc być punktem wyczerpanym. Zatem punkt $(x+1,y)$ jest zaznaczony i także musi być wyczerpany. Rozumując analogicznie otrzymujemy przez prostą indukcję, że wszystkie punkty postaci $(x+k,y)$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$, są wyczerpane. Stanowi to sprzeczność z regułami gry, z których wynika, że liczba punktów zaznaczonych w każdej pozycji jest skończona.

Wykazaliśmy więc, że nie można wykonać więcej niż P^2 ruchów zaczynając od pozycji o potencjale P.

X Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

Zadanie **1.** Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające układ równań:

$$\begin{cases} abc+ab+bc+ca+a+b+c=1 \\ bcd+bc+cd+db+b+c+d=9 \\ cda+cd+da+ac+c+d+a=9 \\ dab+da+ab+bd+d+a+b=9 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Do obu stron danych w treści zadania równań dodajemy liczbę 1. Wtedy układ równań przyjmuje równoważną postać

$$(1) \qquad \begin{cases} (a+1)(b+1)(c+1)=2 \\ (b+1)(c+1)(d+1)=10 \\ (c+1)(d+1)(a+1)=10 \\ (d+1)(a+1)(b+1)=10. \end{cases}$$

Mnożąc stronami pierwsze trzy równania uzyskujemy

$$((a+1)(b+1)(d+1))^2(c+1)^3=200,$$

skąd na mocy czwartego równania otrzymujemy $(c+1)^3=2$. Analogicznie dowodzimy, że $(a+1)^3=2$, $(b+1)^3=2$, $(d+1)^3=250$. Zatem

$$a=b=c=\sqrt[3]{2}-1, \qquad d=5\sqrt[3]{2}-1\,.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że otrzymana czwórka liczb rzeczywistych spełnia układ (1). Jest więc ona jedynym rozwiązaniem danego w zadaniu układu równań.

Zadanie **2.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że pierwiastek trzeciego stopnia z n powstaje przez odrzucenie trzech ostatnich cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby n.

Rozwiązanie

Niech $n=k^3$ będzie liczbą spełniającą warunki zadania. Wówczas

$$(1) \qquad 1000k \leqslant k^3 < 1000k+1000.$$

Z lewej nierówności otrzymujemy $k^2 \geqslant 1000$, co daje $k \geqslant 32$. Na mocy prawej nierówności (1) uzyskujemy

$$k^2 < 1000+\frac{1000}{k} \leqslant 1000+\frac{1000}{32}=1031{,}25.$$

Stąd $k<33$, co wymusza $k=32$. Liczba $n=k^3=32768$ jest więc jedyną liczbą o własności opisanej w treści zadania.

Zadanie **3.** Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 3$, że nierówność

$$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1 \leqslant 0$$

zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych $a_1,a_2,\ldots,a_n$ spełniających równość $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że dana nierówność jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $n=3$ lub $n=4$.

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$0=(a_1+a_2+a_3)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+2(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)\geqslant$$
$$\geqslant 2(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1),$$

co dowodzi danej nierówności dla $n=3$.

Dla $n=4$ mamy

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1=(a_1+a_3)(a_2+a_4)=-(a_1+a_3)^2\leqslant 0,$$

co oznacza, że dana nierówność jest prawdziwa również dla $n=4$.

Dla $n\geqslant 5$ przyjmijmy: $a_1=-1$, $a_2=-2$, $a_3=a_4=\ldots=a_{n-2}=0$, $a_{n-1}=2$, $a_n=1$. Suma powyższych liczb jest równa zeru, lecz

$$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1=3>0.$$

Zatem jeśli $n\geqslant 5$, to dana nierówność nie zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1,a_2,\ldots,a_n$ o sumie równej 0.

Zadanie **4.** Dla liczb rzeczywistych dodatnich x, y określamy

$$f(x,y)=\min\left(x,\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Udowodnić, że istnieją takie liczby x_0, y_0, że $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$ dla wszystkich liczb dodatnich x, y. Wyznaczyć $f(x_0,y_0)$.

Rozwiązanie

Na mocy definicji funkcji f mamy

$$f(x,y)\leqslant x \qquad \text{oraz} \qquad f(x,y)\leqslant \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Mnożąc stronami powyższe nierówności dostajemy

$$(f(x,y))^2\leqslant \frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant \frac{1}{2}, \qquad \text{skąd} \quad f(x,y)\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Równość w otrzymanej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$ oraz $x=y/(x^2+y^2)$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y=1/\sqrt{2}$. Przyjmując $x_0=y_0=1/\sqrt{2}$ mamy

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

dla wszystkich liczb dodatnich x, y.

Zadanie **5.** Styczna w punkcie o współrzędnych (a,b) do okręgu $x^2+y^2=1$ ma z parabolą $y=x^2+1$ dokładnie jeden punkt wspólny. Wyznaczyć wszystkie punkty (a,b) o powyższej własności.

Rozwiązanie

Styczna do okręgu $x^2+y^2=1$ w punkcie (a,b) ma równanie $ax+by=1$. Zatem prosta ta ma z parabolą $y=x^2+1$ dokładnie jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ -x^2+y=1 \end{cases} \tag{1}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Jeśli $b=0$, to $a=1$ lub $a=-1$. Układ równań (1) przyjmuje wówczas jedną z postaci

$$\begin{cases} x=1 \\ -x^2+y=1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x=-1 \\ -x^2+y=1. \end{cases}$$

Każdy z otrzymanych układów ma dokładnie jedno rozwiązanie. To oznacza, że punkty $(a,b)=(1,0)$, $(a,b)=(-1,0)$ spełniają warunki zadania.

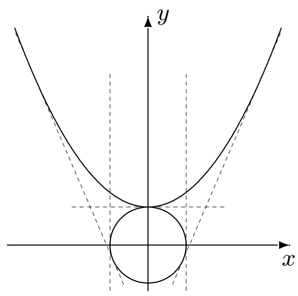
Załóżmy z kolei, że $b\neq 0$. Układ równań (1) przepisujemy w następującej, równoważnej postaci

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ bx^2+ax+b-1=0. \end{cases}$$

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $bx^2+ax+b-1=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. To ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta=a^2-4b(b-1)=0$. Ponieważ $a^2+b^2=1$, więc ostatnie równanie przybiera postać

$$5b^2-4b-1=0.$$

Stąd $b=1$ lub $b=-1/5$. Jeżeli $b=1$, to $a=0$; jeżeli natomiast $b=-1/5$, to $a=\sqrt{24}/5$ lub $a=-\sqrt{24}/5$.



rys. 79

Łącznie otrzymaliśmy pięć par (a,b) (rys. 79) spełniających warunki zadania. Są nimi:

$$(1,0), \quad (-1,0), \quad (0,1), \quad (\tfrac{1}{5}\sqrt{24},-\tfrac{1}{5}), \quad (-\tfrac{1}{5}\sqrt{24},-\tfrac{1}{5}).$$

Zadanie **6.** Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, którą potrzebuje skoczek szachowy, aby przejść z jednego narożnika szachownicy $n\times n$ (gdzie $n\geqslant 4$) do narożnika przeciwległego?

Rozwiązanie

Niech k będzie szukaną liczbą ruchów. W jednym ruchu skoczek szachowy przechodzi z pola białego na pole czarne lub z pola czarnego na pole białe. Na początku oraz na końcu swej wędrówki skoczek stoi na polu tego samego koloru. To oznacza, że k musi być liczbą parzystą.

W każdym ruchu skoczek pokonuje trzy pola: dwa w kierunku pionowym, jedno w kierunku poziomym lub odwrotnie: dwa w kierunku poziomym, jedno w kierunku pionowym. Aby dostać się do przeciwległego rogu, skoczek musi łącznie przebyć co najmniej $n-1$ pól w kierunku pionowym, jak również co najmniej $n-1$ pól w kierunku poziomym. To oznacza, że

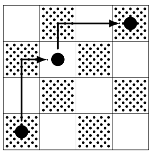
$$3k \geqslant 2(n-1), \qquad \text{skąd} \qquad \frac{k}{2} \geqslant \frac{n-1}{3} > \frac{n-2}{3}.$$

Ponieważ liczba $k/2$ jest całkowita, więc

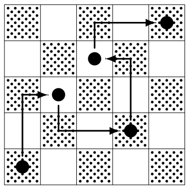
$$\frac{k}{2} \geqslant \left[\frac{n-2}{3}\right] + 1 = \left[\frac{n+1}{3}\right], \qquad \text{czyli} \qquad k \geqslant 2\left[\frac{n+1}{3}\right].$$

Wykażemy indukcyjnie, że skoczek szachowy może odbyć swą podróż przy użyciu dokładnie $2[(n+1)/3]$ ruchów.

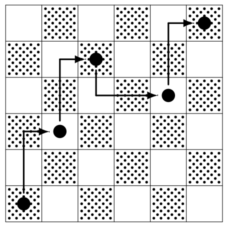
Dla $n=4$, $n=5$ oraz $n=6$ powyższe zdanie jest prawdziwe — dowodzą tego poniższe rysunki.



$n=4$; 2 ruchy



$n=5$; 4 ruchy



$n=6$; 4 ruchy

Załóżmy teraz, że skoczek szachowy może odbyć swą podróż po szachownicy $n \times n$ używając dokładnie $2[(n+1)/3]$ ruchów.

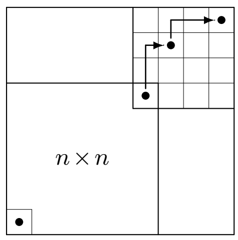
Kontynuując swą podróż tak jak rysunku 80, skoczek szachowy może przejść z jednego rogu szachownicy $(n+3) \times (n+3)$ do rogu przeciwległego używając

$$2\left[\frac{n+1}{3}\right] + 2 = 2\left[\frac{n+4}{3}\right]$$

skoków. To kończy dowód indukcyjny.

Zatem szukaną najmniejszą liczbą ruchów jest

$$2\left[\frac{n+1}{3}\right].$$



rys. 80

Uwaga

W dowodzie indukcyjnym sprawdziliśmy prawdziwość dowodzonego zdania dla trzech kolejnych, początkowych wartości n oraz udowodniliśmy, że z prawdziwości dla n wynika prawdziwość dla $n+3$. Uogólnienie tego schematu dowodu jest następujące:

Jeżeli prawdziwe są zdania $T(l)$, $T(l+1)$, …, $T(l+k-1)$ oraz dla każdego $n \geqslant l$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+k)$, to dla dowolnego $n \geqslant l$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Zadanie **7.** Dwa różne pola szachownicy 8×8 nazwiemy *sąsiadującymi*, jeżeli mają wspólny bok lub wspólny wierzchołek. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, aby król szachowy zaczynając od pewnego pola szachownicy 8×8 odwiedził wszystkie pola dokładnie raz według następującej reguły: W każdym etapie podróży (licząc od trzeciego odwiedzonego pola) król stoi na polu sąsiadującym z parzystą liczbą pól, które już odwiedził.

Rozwiązanie

Odp.: Wędrówki według reguł opisanych w treści zadania nie da się przeprowadzić.

Przypuśćmy, że udało się królowi szachowemu odbyć wędrówkę według reguł z treści zadania. Niech S będzie zbiorem wszystkich par (nieuporządkowanych) pól sąsiadujących danej szachownicy. Powiemy, że król szachowy *odwiedził parę* ze zbioru S, gdy odwiedził oba pola tej pary. Niech S_k będzie zbiorem tych elementów zbioru S, które odwiedził król szachowy będąc w k-tym etapie swej wędrówki (tzn. stojąc na k-tym polu). Wówczas $|S_1|=0$ oraz $|S_2|=1$, gdzie $|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X.

Z równości $|S_2|=1$ oraz z faktu, że w każdym następnym etapie swej wędrówki król znajduje się na polu sąsiadującym z parzystą liczbą pól, które już odwiedził, wynika, że liczba $|S_k|$ jest nieparzysta dla wszystkich $k\geqslant 2$. W szczególności liczba $|S_{64}|$, a więc liczba elementów zbioru S, jest nieparzysta.

Tymczasem liczba elementów zbioru S jest parzysta, co można wyjaśnić następująco: Rozważmy odwzorowanie $f\colon S\to S$ będące symetrią środkową względem środka szachownicy. Funkcja f ma dokładnie dwa punkty stałe. Pozostałe elementy zbioru S można połączyć w pary $(s,f(s))$. To dowodzi, że zbiór S zawiera parzystą liczbę elementów.

Otrzymaliśmy sprzeczność.

Uwaga 1.

Powyższe rozumowanie działa dla dowolnej szachownicy o bokach jednakowej parzystości; w przypadku boków nieparzystych f nie ma punktów stałych.

Uwaga 2.

Zbiór S ma 220 elementów w przypadku szachownicy 8×8 oraz

$$m(n-1)+n(m-1)+2(m-1)(n-1)=4mn-3m-3n+2$$

elementów w przypadku szachownicy $m\times n$.

Zadanie **8.** Mamy do dyspozycji 1999 monet, z których każde dwie mają różny ciężar. Dysponujemy urządzeniem, które pozwala spośród dowolnych trzech monet wskazać tę, której ciężar zawiera się pomiędzy ciężarami dwóch pozostałych. Dowieść, że moneta tysięczna pod względem ciężaru może być wyznaczona przez nasze urządzenie stosowane nie więcej niż 1 000 000 razy. Udowodnić, że za pomocą tego urządzenia miejsce w ciągu ciężarów można wyznaczyć tylko dla tej monety.

Rozwiązanie

Wskażemy, jak przy pomocy mniej niż 1 000 000 ważeń odnaleźć monetę tysięczną pod względem ciężaru. W tym celu wyjaśnimy najpierw, jak spośród danych monet $M_1,M_2,\dots,M_k$ wyłonić monetę najcięższą i najlżejszą wykonując $k-2$ ważenia.

Na początku ważymy monety M_1, M_2, M_3, po czym odkładamy na bok tę, której ciężar zawiera się pomiędzy ciężarami dwóch pozostałych monet. Do dwóch pozostałych monet dołączamy monetę M_4. Z tak otrzymanej trójki wyłaniamy i odkładamy na bok tę monetę, której ciężar zawiera się pomiędzy ciężarami dwóch pozostałych monet. Postępowanie kontynuujemy $k-2$ razy. Za $k-2$ razem otrzymamy dwie monety, z których jedna jest najcięższa, a druga najlżejsza spośród monet $M_1,M_2,\dots,M_k$ (każda moneta była ważona, a tylko tych dwóch nie można było odłożyć na bok).

Aby odnaleźć monetę tysięczną pod względem ciężaru postępujemy następująco: spośród danych 1999 monet, odrzucamy monetę najcięższą i najlżejszą; z otrzymanymi 1997 monetami postępujemy analogicznie: odrzucamy spośród nich monetę najcięższą i najlżejszą. Kontynuując otrzymamy w efekcie trzy monety, z których środkowa pod względem ciężaru jest szukaną monetą. Łącznie wykonaliśmy $1997+1995+\ldots+3+1=999\cdot 999<1\,000\,000$ ważeń.

Oznaczmy przez m_i masę monety M_i ($i=1,2,\dots,1999$). Przypuśćmy, że mamy wskazać i-tą pod względem ciężaru monetę dysponując dodatkową informacją: ciąg $m_1,m_2,\dots,m_{1999}$ jest monotoniczny (tzn. albo rosnący albo malejący). Wówczas, bez konieczności używania maszyny, umiemy wśród dowolnych trzech monet wskazać monetę środkową pod względem ciężaru. W tej konkretnej sytuacji nie jesteśmy więc w stanie rozstrzygnąć, czy moneta M_i zajmuje i-te, czy $(2000-i)$-te miejsce w ciągu ciężarów.

Zadanie **9.** Sześcian o krawędzi 3 podzielono na 27 sześcianów jednostkowych, które ponumerowano w sposób dowolny liczbami $1,2,\dots,27$. Tworzymy 27 możliwych sum w poszczególnych rzędach (jest dziewięć takich sum w każdym z trzech kierunków równoległych do krawędzi sześcianu, każda suma o trzech składnikach). Co najwyżej ile spośród tych 27 sum może być liczbą nieparzystą?

Rozwiązanie

Odp.: 24.

Rozbijmy dany sześcian na 9 kolumn $K_1, K_2, \ldots, K_9$, każda składająca się z trzech sześcianów jednostkowych. Niech s_i oznacza sumę liczb w kolumnie K_i. Ponieważ $s_1 + s_2 + \ldots + s_9 = 1 + 2 + \ldots + 27 = 27 \cdot 14$ jest liczbą parzystą, więc co najwyżej osiem liczb spośród $s_1, s_2, \ldots, s_9$ jest nieparzystych.

Rozumując analogiczne dla każdego z pozostałych dwóch kierunków wnioskujemy, że wśród 27 danych sum co najwyżej 24 mogą być liczbami nieparzystymi.

N	N	N
N	N	N
N	N	N

górna warstwa

P	P	N
P	N	P
N	P	P

środkowa warstwa

P	P	P
P	N	P
N	P	P

dolna warstwa

Wartość 24 można otrzymać numerując dane sześciany jednostkowe jak na powyższym rysunku.

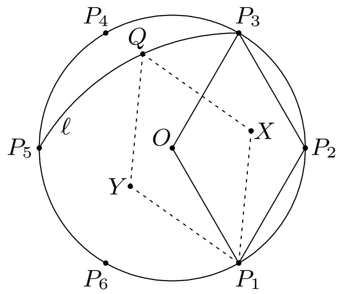
Sześciany oznaczone literą N numerujemy dowolnie liczbami $1, 3, 5, \ldots, 27$; sześciany oznaczone literą P numerujemy liczbami $2, 4, 6, \ldots, 26$. W tak otrzymanym sześcianie dokładnie 24 spośród 27 rozważanych sum są liczbami nieparzystymi.

Zadanie **10.** Czy można koło o promieniu 1 (łącznie z brzegiem) rozdzielić na trzy takie podzbiory, że żaden z nich nie zawiera dwóch punktów odległych o 1?

Rozwiązanie

Odp.: Nie można.

Przypuśćmy, że udało nam się rozdzielić dane koło na trzy podzbiory $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ tak, jak opisano w treści zadania. Oznaczmy przez O środek rozważanego koła. Niech $P_1P_2\ldots P_6$ będzie sześciokątem foremnym wpisanym w dane koło (rys. 81). Bez straty ogólności przyjmijmy, że $O \in \mathcal{A}$ oraz $P_1 \in \mathcal{B}$. Ponieważ długość boku sześciokąta $P_1P_2\ldots P_6$ jest równa 1, więc $P_2, P_4, P_6 \in \mathcal{C}$, zaś $P_3, P_5 \in \mathcal{B}$.



rys. 81

Oznaczmy przez ℓ łuk okręgu o środku P_1 i promieniu P_1P_3 zawarty w danym kole. Ponieważ $P_3P_5=\sqrt{3}>1$, więc na łuku ℓ znajduje się punkt Q należący do jednego ze zbiorów $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{C}$.

Niech P_1XQY będzie obrazem rombu $P_1P_2P_3O$ przy takim obrocie o środku P_1, który przeprowadza punkt P_3 na punkt Q. Ponieważ punkty P_1 i Q należą do różnych zbiorów, więc punkty X, Y muszą należeć do tego samego zbioru. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż oba punkty X, Y należą do koła i $XY=1$.

Zadanie **11.** Na płaszczyźnie dane są cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnić, że istnieje taki okrąg przechodzący przez trzy z tych punktów, że czwarty punkt leży na okręgu lub w jego wnętrzu.

Rozwiązanie

Istnieją dwa możliwe położenia danych czterech punktów:

(a) jeden z punktów leży wewnątrz trójkąta T, którego wierzchołkami są pozostałe trzy punkty;

(b) dane punkty są wierzchołkami czworokąta wypukłego $ABCD$.

W przypadku (a), okrąg opisany na trójkącie T spełnia warunki zadania.

Rozważmy przypadek (b).

Jeśli $\sphericalangle A+\sphericalangle C\leqslant 180°$, to okrąg opisany na trójkącie ABC spełnia warunki zadania. Jeśli zaś $\sphericalangle A+\sphericalangle C>180°$, to $\sphericalangle B+\sphericalangle D<180°$, skąd wynika, że okrąg opisany na trójkącie BCD zawiera punkt A w swoim wnętrzu.

Zadanie **12.** W trójkącie ABC zachodzi równość $2AB=AC+BC$. Udowodnić, że następujące cztery punkty: środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, środek okręgu opisanego oraz środki boków AC i BC, leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

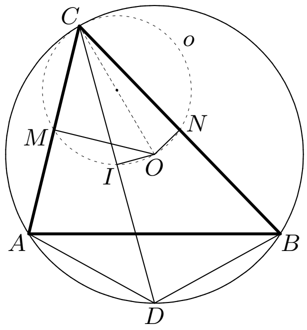
Niech M, N będą odpowiednio środkami boków AC i BC. Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 82).

Z równości $\sphericalangle CMO=\sphericalangle CNO=90°$ wynika, że okrąg o opisany na trójkącie MNO przechodzi przez punkt C. Średnicą tego okręgu jest odcinek CO. Należy wykazać, że punkt I (środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC) leży na okręgu o. W tym celu wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle CIO=90°$.

Niech D będzie punktem przecięcia prostej CI z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że punkt I jest środkiem cięciwy CD. Korzystając kolejno z twierdzenia Ptolemeusza (zob. *Dodatek*, str. 112), lematu ze strony 113 oraz z danej w treści zadania równości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} AB\cdot CD&=AC\cdot BD+BC\cdot AD=\\ &=AC\cdot DI+BC\cdot DI=(AC+BC)\cdot DI=2AB\cdot DI, \end{aligned}$$

skąd $CD = 2DI$. Równość ta oznacza właśnie, że punkt I jest środkiem odcinka CD, co kończy rozwiązanie zadania.

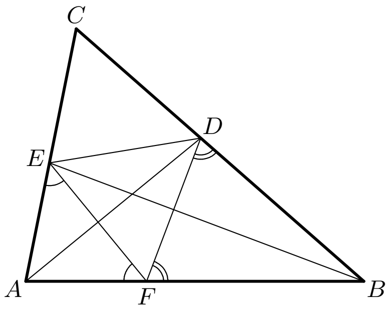


rys. 82

Zadanie **13.** W trójkącie ABC dwusieczne kątów A i B przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Ponadto $AE + BD = AB$. Wyznaczyć miarę kąta C.

Rozwiązanie

Niech F będzie takim punktem leżącym na boku AB, że $AF = AE$. Wtedy $BF = BD$ (rys. 83).



rys. 83

Prosta AD jest dwusieczną kąta $\sphericalangle A$ w trójkącie równoramiennym AEF. Stąd wynika, że AD jest symetralną odcinka EF, a więc $DE = DF$. Analogicznie dowodzimy, że $DE = EF$. Zatem trójkąt DEF jest równoboczny, co oznacza, że $\sphericalangle DEF = \sphericalangle EFD = \sphericalangle FDE = 60^\circ$. Stąd

$$\sphericalangle AFE + \sphericalangle BFD = 120^\circ, \qquad \text{a więc} \qquad \sphericalangle AEF + \sphericalangle BDF = 120^\circ.$$

Otrzymujemy zatem $\sphericalangle CED + \sphericalangle CDE = 120^\circ$, co daje $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Zadanie **14.** W trójkącie równoramiennym ABC równe są boki AB i AC. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC. Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do AC przecina prostą DE w punkcie F. Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{AD}{AE}, \tag{1}$$

gdzie $[PQRS]$ oznacza pole czworokąta $PQRS$.

Rozwiązanie

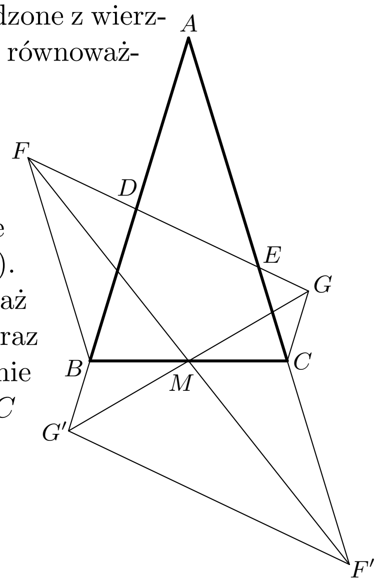
Ponieważ wysokości trójkąta ABC poprowadzone z wierzchołków B i C są równe, więc zależność (1) jest równoważna równości

$$\frac{BD+CG}{CE+BF} = \frac{AD}{AE}. \tag{2}$$

Niech M będzie środkiem boku BC. Oznaczmy przez F' i G' odpowiednio punkty symetryczne do punktów F i G względem punktu M (rys. 84). Wtedy $FGF'G'$ jest równoległobokiem. Ponieważ $AB \parallel GC$, więc punkt G' leży na prostej AB oraz spełniona jest równość $BG' = CG$. Analogicznie wnioskujemy, że punkt F' leży na prostej AC oraz $CF' = BF$. Zatem dowodzoną równość (2) możemy przepisać w postaci

$$\frac{DG'}{EF'} = \frac{AD}{AE},$$

co jest prawdą, gdyż $DE \parallel G'F'$.



rys. 84

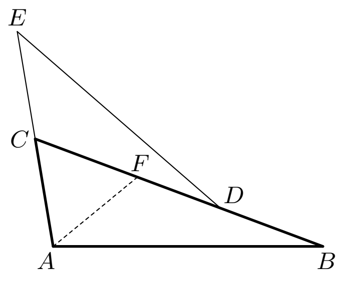
Zadanie **15.** W trójkącie ABC zachodzi $\sphericalangle C = 60°$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC i spełnia $BD = AC$. Bok AC przedłużono do punktu E tak, aby $AC = CE$. Udowodnić, że $AB = DE$.

Rozwiązanie

Niech F będzie takim punktem leżącym na boku BC, że $CF = BD$. Ponieważ $\sphericalangle ACF = 60°$, więc trójkąt ACF jest równoboczny. Zatem

$$AF = CE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle AFB = 120° = \sphericalangle ECD.$$

Ponadto $BF = CD$. Powyższe równości dowodzą, że trójkąty AFB i ECD są przystające (cecha *bok-kąt-bok*). Stąd $AB = DE$.



Zadanie **16.** Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, którą można przedstawić w postaci $k = 19^n - 5^m$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n.

Rozwiązanie

Odp.: 14.

Dla $m=n=1$ otrzymujemy $19^1-5^1=14$.

Ostatnia cyfra liczby 19^n-5^m jest równa 4 (w przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą) lub 6 (gdy n jest liczbą parzystą). Należy zatem wykazać, że nie istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n, dla których $19^n-5^m \in \{4,6\}$.

(a) Przypuśćmy, że $19^n-5^m=4$, czyli $19^n-4=5^m$. Lewa strona ostatniej równości jest podzielna przez 3 (dla dowolnej liczby naturalnej n), zaś prawa nie. Otrzymaliśmy sprzeczność.

(b) Przypuśćmy z kolei, że $19^n-5^m=6$. Wówczas n jest liczbą parzystą. Gdyby liczba m była nieparzysta, to mielibyśmy

$$6=19^n-5^m \equiv 1-2=-1 \pmod 3,$$

sprzeczność. Zatem m jest liczbą parzystą. Stąd uzyskujemy rozkład

$$6=(19^{n/2}-5^{m/2})(19^{n/2}+5^{m/2}),$$

który nie jest możliwy, gdyż $19^{n/2}+5^{m/2} \geqslant 24>6$.

Zadanie **17.** Czy istnieje taki skończony ciąg liczb całkowitych $c_1,c_2,\ldots,c_n$, że każda z liczb $a+c_1$, $a+c_2$, ..., $a+c_n$ jest pierwsza dla więcej niż jednej, ale tylko dla skończenie wielu różnych liczb całkowitych a?

Rozwiązanie

Odp.: Taki ciąg istnieje.

Niech $n=5$ oraz $c_1=0$, $c_2=2$, $c_3=8$, $c_4=14$, $c_5=26$. Wówczas dla $a=3$ oraz $a=5$ liczby $a+c_1$, $a+c_2$, ..., $a+c_5$ są pierwsze.

Liczby $c_1,c_2,\ldots,c_5$ dają różne reszty z dzielenia przez 5, co oznacza, że dla dowolnej liczby całkowitej a liczby $a+c_1$, $a+c_2$, ..., $a+c_5$ też dają różne reszty z dzielenia przez 5. Zatem dla wszystkich liczb całkowitych a nie leżących w przedziale $\langle -21,5\rangle$ któraś z liczb $a+c_1$, $a+c_2$, ..., $a+c_5$ jest podzielna przez 5 i różna od 5, czyli złożona.

Uwaga

Dla $n=17$ oraz

$$\begin{array}{lllll} c_1=0, & c_2=6, & c_3=12, & c_4=36, & c_5=42 \\ c_6=96, & c_7=162, & c_8=222, & c_9=252, & c_{10}=582, \\ c_{11}=636, & c_{12}=642, & c_{13}=1086, & c_{14}=1176, & c_{15}=1212, \\ c_{16}=5382, & c_{17}=5796 & & & \end{array}$$

tezę zadania spełniają **trzy** liczby: $a=5$, $a=11$ oraz $a=17$.

Zadanie **18.** Liczba całkowita dodatnia m daje z dzielenia przez 4 resztę 2. Dowieść, że istnieje co najwyżej jeden rozkład $m=ab$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi

$$0<a-b<\sqrt{5+4\sqrt{4m+1}}.$$

Rozwiązanie

Niech $m = ab$ będzie dowolnym rozkładem spełniającym warunki zadania. Przekształcając równoważnie drugą spośród danych w treści zadania nierówności otrzymujemy kolejno:

$$a^2 - 2ab + b^2 < 5 + 4\sqrt{4m+1},$$
$$a^2 + 2ab + b^2 < 4m + 1 + 4\sqrt{4m+1} + 4,$$
$$a + b < \sqrt{4m+1} + 2.$$

Ponieważ liczba m daje z dzielenia przez 4 resztę 2, więc jeden z czynników a, b jest parzysty, drugi zaś nieparzysty. W szczególności $a \neq b$, co daje

$$(a+b)^2 > 4ab = 4m, \qquad \text{skąd} \qquad a + b \geqslant \sqrt{4m+1}.$$

Powyższe nierówności dowodzą, że

$$a + b \in \langle \sqrt{4m+1}, \sqrt{4m+1} + 2).$$

W zbiorze $\langle \sqrt{4m+1}, \sqrt{4m+1} + 2)$ znajdują się dokładnie dwie liczby naturalne, z których jedna jest parzysta, a druga nieparzysta — oznaczmy ją przez k. Ponieważ liczba $a+b$ jest nieparzysta, więc $a + b = k$.

Z nierówności $a > b$ uzyskujemy $a - b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{k^2 - 4m}$. Stąd wynika, że czynniki a, b spełniają układ równań

$$\begin{cases} a + b = k \\ a - b = \sqrt{k^2 - 4m}, \end{cases}$$

który ma co najwyżej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych a, b. Zatem istnieje co najwyżej jeden rozkład $m = ab$ spełniający warunki zadania.

Zadanie **19.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich parzystych k, że dla każdej liczby pierwszej p liczba $p^2 + k$ jest złożona.

Rozwiązanie

Przykładem nieskończonego zbioru liczb k spełniających warunki zadania są liczby postaci $k = 66l + 2$, gdzie $l \geqslant 1$ jest liczbą naturalną.

Należy więc wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $l \geqslant 1$ oraz liczby pierwszej p liczba $p^2 + 66l + 2$ jest złożona.

Jeśli $p = 3$, to liczba $p^2 + 66l + 2 = 11 \cdot (6l + 1)$ jest złożona.

Jeśli p jest liczbą pierwszą różną od 3, to liczba p^2 daje z dzielenia przez 3 resztę 1. Stąd

$$p^2 + 66l + 2 \equiv 66l + 3 \equiv 0 \pmod 3.$$

Zatem również i w tym przypadku liczba $p^2 + 66l + 2$ jest złożona.

Uwaga

Rozwiązanie można oprzeć także na wielu innych ciągach, np. $k = 30l + 26$, $k = 42l + 26$, $k = 78l + 56$ itp.

Zadanie **20.** Liczby a, b, c, d są pierwsze oraz spełniają warunki $a > 3b > 6c > 12d$, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażenia

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Rozwiązanie

Ponieważ suma $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ jest liczbą nieparzystą, więc któryś ze składników tej sumy jest liczbą parzystą. Liczby a, b, c, d są pierwsze, a d jest najmniejszą z nich. Zatem $d = 2$.

Mamy: $1749 = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 > 9b^2 - b^2 + 4d^2 - d^2 = 8b^2 + 12$, skąd dostajemy nierówności $b^2 < 1737/8 < 15^2$, czyli $b \leqslant 13$. Zatem $4 = 2d < c < \frac{1}{2}b < 7$, co wymusza $c = 5$. Ten wynik w połączeniu z ostatnimi dwiema nierównościami daje $b = 11$ lub $b = 13$.

Jeśli $b = 11$, to $a^2 = 1749 + d^2 - c^2 + b^2 = 1849 = 43^2$, czyli $a = 43$. Dla $b = 13$ otrzymujemy $a^2 = 1897$, co nie jest możliwe.

Zatem czwórka liczb $a = 43$, $b = 11$, $c = 5$, $d = 2$ jest jedyną spełniającą warunki zadania. Stąd obliczamy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \mathbf{1999}$.

DODATEK [2]

A. Małe twierdzenie Fermata

Twierdzenie (Małe twierdzenie Fermata)
Wersja 1.
Dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby całkowitej a zachodzi podzielność

$$p \mid a^p - a.$$

Wersja 2.
Dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby całkowitej a względnie pierwszej z p zachodzi podzielność

$$p \mid a^{p-1} - 1.$$

Nietrudny dowód równoważności powyższych wersji pozostawiamy Czytelnikowi. Przedstawimy kilka dowodów małego twierdzenia Fermata.

Dowód I
Dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant p-1$ liczba $\binom{p}{i}$ dzieli się przez p, gdyż w ułamku

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i! \cdot (p-i)!}$$

czynnik p występuje w liczniku, a nie występuje w mianowniku. Zatem dla dowolnych liczb całkowitych b i c mamy

$$(b+c)^p = b^p + c^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} b^i c^{p-i} \equiv b^p + c^p \pmod{p} .$$

Ponieważ $1^p \equiv 1 \pmod{p}$ oraz, dla każdego całkowitego a, jeśli

$$a^p \equiv a \pmod{p}\,, \tag{1}$$

to spełniona jest kongruencja

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \equiv a+1 \pmod{p}\,,$$

więc na mocy indukcji otrzymujemy zależność (1) dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich a. Dla $a=0$ wzór (1) jest oczywisty, natomiast dla a ujemnych biorąc $b=-a>0$ dostajemy

$$a^p = (-b)^p \equiv -b^p \equiv -b = a \pmod{p}\,.$$

Należy zwrócić uwagę, że $(-1)^p = -1^p$, gdy p jest liczbą nieparzystą, natomiast dla $p=2$ mamy $(-1)^2 \equiv -1^2 \pmod{2}$.

[2]Opracowali *Waldemar Pompe* i *Jarosław Wróblewski.*

Dowód II

Niech a będzie liczbą niepodzielną przez p.

Rozważmy liczby $a, 2a, 3a, 4a, \ldots, (p-1)a$. Dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant (p-1)$ mamy $ja - ia = (j-i)a$. Liczba p jest pierwsza, zatem iloczyn liczb niepodzielnych przez p nie dzieli się przez p. Stąd $p \nmid (j-i)a$, co oznacza, że liczby $a, 2a, 3a, 4a, \ldots, (p-1)a$ dają przy dzieleniu przez p różne niezerowe reszty. Ponieważ niezerowych reszt jest $p-1$, tyle co rozważanych liczb, istnieje taka permutacja $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$ zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$, że

$$ia \equiv r_i \pmod{p} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, p-1\,.$$

Zatem

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \ldots \cdot (p-1)a \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_{p-1} = (p-1)! \pmod{p}\,,$$

czyli

$$(p-1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}\,, \quad \text{skąd} \quad p \,|\, (p-1)!\left(a^{p-1} - 1\right).$$

Ponieważ liczba $(p-1)!$ nie dzieli się przez p, otrzymujemy podzielność

$$p \,|\, a^{p-1} - 1\,,$$

która kończy dowód twierdzenia.

Uwaga 1.

Kluczową obserwacją w powyższym dowodzie był fakt, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby k względnie pierwszej z p, liczby

$$k,\, 2k,\, 3k,\, 4k,\, \ldots,\, (p-1)k$$

dają różne, niezerowe reszty z dzielenia przez p. Stąd w szczególności wynika, że dla pewnej liczby $l \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ mamy

$$l \cdot k \equiv 1 \pmod{p}.$$

Fakt ten wykorzystamy w następnym dowodzie.

Dowód III (kombinatoryczny)

Niech a będzie liczbą dodatnią. Zastanówmy się, na ile sposobów można pokolorować p punktów leżących na okręgu i będących wierzchołkami p-kąta foremnego, mając do dyspozycji a kolorów.

Z jednej strony otrzymujemy natychmiastową odpowiedź na tak postawione pytanie: na a^p sposobów.

Z drugiej zaś strony możemy analizować szczególne sposoby kolorowania. Istnieje dokładnie a kolorowań, w których wszystkie punkty pomalowane są tym samym kolorem. Pozostałe kolorowania, tzn. kolorowania, w których użyto co najmniej dwóch kolorów (nazwiemy je *wielobarwnymi*), można podzielić na klasy równoważnosci. Dwa kolorowania nazwiemy równoważnymi, jeśli są identyczne lub jedno powstaje z drugiego przez obrót wokół środka p-kąta o kąt $k\cdot\frac{2\pi}{p}$, gdzie $k\in\{1,2,3,\ldots,p-1\}$. Wykażemy, że każde pokolorowanie wielobarwne w rozważanym obrocie przechodzi na **inne** pokolorowanie.

Przypuśćmy, że pewne kolorowanie po obrocie o k/p kąta pełnego prowadzi do identycznego kolorowania ($k=1,2,\ldots,p-1$). Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc $l\cdot k\equiv 1 \pmod p$ dla pewnego $l>0$ (zob. uwaga wyżej). Zatem obracając kolorowanie l-krotnie o k/p kąta pełnego otrzymamy pokolorowanie wyjściowe, a przy tym efektywnie wykonamy obrót o $1/p$ kąta pełnego. Skoro kolorowanie nie zmienia się przy obrocie o $1/p$ kąta pełnego, każdy punkt pomalowany jest tym samym kolorem co następny, a więc kolorowanie jest jednobarwne.

Podsumowując: wśród a^p kolorowań jest a jednobarwnych, a pozostałe kolorowania, których jest a^p-a, można podzielić na p-elementowe klasy równoważności. Stąd wynika, że liczba a^p-a jest podzielna przez p. To kończy dowód twierdzenia dla liczb dodatnich a.

Dla liczb ujemnych a należy powtórzyć końcówkę dowodu I.

Uwaga 2.

Dla niektórych wartości p małe twierdzenie Fermata może być udowodnione niezwykle elementarnie w oparciu o odpowiednie tożsamości.

$p=2$.

Wówczas liczba $a^2-a=(a-1)a$ jest podzielna przez 2 jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych.

$p=3$.

Liczba $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. Jedna z tych liczb jest podzielna przez 3, więc iloczyn dzieli się przez 3.

$p=5$.

Chciałoby się zapisać liczbę a^5-a w postaci iloczynu pięciu kolejnych liczb całkowitych i stwierdzić, że jeden z czynników musi dzielić się przez 5. Nie jest to możliwe, możemy jednak skorzystać z tożsamości

$$\begin{aligned}a^5-a&=(a^2-1)a(a^2+1)=(a-1)a(a+1)(a^2-4+5)=\\&=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1)\end{aligned}$$

zauważając, że w ostatniej sumie oba składniki są podzielne przez 5.

Przypadek $p=7$ nastręcza już więcej trudności. Pozostawiamy Czytelnikowi przeprowadzenie dowodu w oparciu o tożsamość

$$a^7-a=\Big[(a-2)(a+3)+7\Big](a-1)a(a+1)\Big[(a+2)(a-3)+7\Big].$$

Uwaga 3.

Nie każda liczba p spełniająca tezę małego twierdzenia Fermata jest pierwsza. Liczby złożone spełniające małe twierdzenie Fermata nazywane są *liczbami Carmichaela* (czyt. karmajkla) i jest ich nieskończenie wiele. Najmniejszą z nich jest $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.

Wniosek

Dla dowolnej liczby pierwszej p, liczby całkowitej dodatniej k oraz liczby całkowitej a, zachodzi podzielność

$$p \mid a^{(p-1)k+1} - a\,.$$

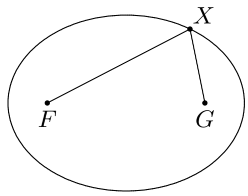
Dowód wniosku

Dla $k = 1$ teza wniosku jest równoważna tezie małego twierdzenia Fermata (wersja 1). Z kolei kongruencja

$$a^{(p-1)(k+1)+1} = a^{(p-1)k} \cdot a^p \equiv a^{(p-1)k} \cdot a = a^{(p-1)k+1} \equiv a \pmod{p}$$

pokazuje, jak wykonać krok indukcyjny.

B. Elipsa

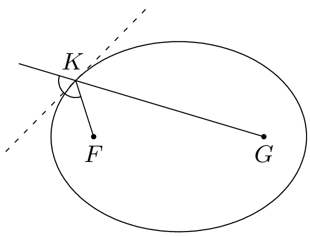


Dane są dwa różne punkty F i G oraz liczba rzeczywista $a > FG$. Zbiór punktów X płaszczyzny, dla których $FX + GX = a$, nazywamy *elipsą*. Punkty F i G nazywamy *ogniskami elipsy*. Wielkość a jest długością większej osi elipsy, jak również średnicą elipsy.

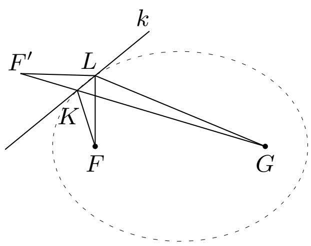
Podstawą do dalszych rozważań jest następujący fakt, opisujący konstrukcję stycznej do elipsy.

Twierdzenie 1.
Niech e będzie elipsą o ogniskach F i G oraz niech $K \in e$ (rys. 85). Wówczas dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku K w trójkącie FKG jest styczna do elipsy e w punkcie K.

Dowód
Należy udowodnić, że dwusieczna k kąta zewnętrznego przy wierzchołku K w trójkącie FKG ma z elipsą e dokładnie jeden punkt wspólny. Przypuśćmy, wbrew tezie, że prosta k przecina elipsę e w dwóch różnych punktach: K i L (rys. 86).



rys. 85



rys. 86

Niech F' będzie punktem symetrycznym do punktu F względem prostej k. Wówczas punkty G, K i F' są współliniowe. Oznaczając przez a długość większej osi elipsy e otrzymujemy

$$a = FK + GK = F'G < F'L + GL = FL + GL = a,$$

stąd sprzeczność.

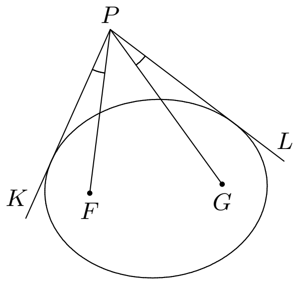
Bezpośrednio z powyższego twierdzenia wynika następujący, użyteczny

Wniosek
Dana jest elipsa o ogniskach F i G oraz średnicy a. Niech k będzie dowolną styczną do tej elipsy w punkcie K. Punkt F' jest punktem symetrycznym do punktu F względem prostej k. Wówczas punkty F', K, G są współliniowe oraz $F'G = a$.

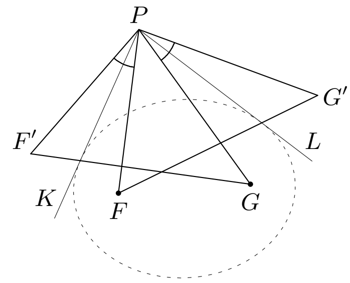
Elipsa posiada szereg ciekawych i użytecznych własności, z których część teraz omówimy.

Twierdzenie 2.

Elipsa o ogniskach F i G leży wewnątrz kąta wypukłego KPL i jest styczna do ramion tego kąta (rys. 87). Wówczas $\sphericalangle KPF = \sphericalangle LPG$.



rys. 87



rys. 88

Dowód

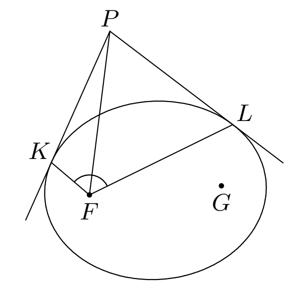
Niech F' będzie punktem symetrycznym do punktu F względem prostej PK, zaś przez G' oznaczmy punkt symetryczny do punktu G względem prostej PL (rys. 88). Na mocy wniosku, $F'G = G'F$. Ponadto $F'P = FP$ oraz $GP = G'P$. Z trzech powyższych równości wnioskujemy, że trójkąty $F'GP$ oraz FPG' są przystające. Stąd $\sphericalangle F'PG = \sphericalangle FPG'$, czyli $\sphericalangle F'PF = \sphericalangle GPG'$. Dzieląc ostatnią zależność przez 2 otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 3.

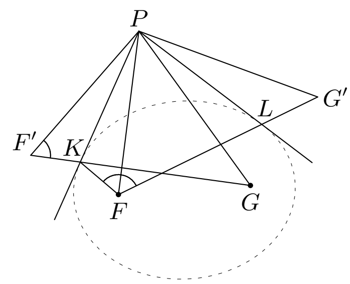
Proste PK i PL są styczne do elipsy o ogniskach F i G odpowiednio w punktach K i L (rys. 89). Wówczas $\sphericalangle PFK = \sphericalangle PFL$.

Dowód

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 2, niech F' będzie punktem symetrycznym do punktu F względem prostej PK, zaś przez G' oznaczmy punkt symetryczny do punktu G względem prostej PL (rys. 90).



rys. 89



rys. 90

Wówczas trójkąty $F'GP$ oraz FPG' są przystające. Na mocy wniosku, punkty F', K, G są współliniowe. Tę samą własność posiadają punkty G', L, F. Zatem

$$\sphericalangle PFL = \sphericalangle PF'G = \sphericalangle PFK.$$

Twierdzenie 4.

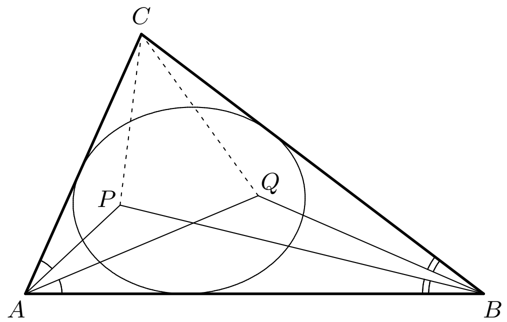
Niech P i Q będą punktami leżącymi wewnątrz trójkąta ABC spełniającymi równości

(1) $$\sphericalangle PAC = \sphericalangle QAB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle PBC = \sphericalangle QBA.$$

Wówczas istnieje elipsa o ogniskach P i Q wpisana w trójkąt ABC.

Dowód

Dobierzmy tak średnicę elipsy e o ogniskach P i Q, aby elipsa ta była styczna do prostej AB. Stosując twierdzenie 2 dla kątów wypukłych BAC oraz ABC wnioskujemy, że elipsa e jest styczna odpowiednio do boków AC i BC, a więc wpisana w trójkąt ABC.



rys. 91

Uwaga

Jeśli punkty P i Q leżące wewnątrz trójkąta ABC spełniają warunki (1), to $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$. Dla dowodu wystarczy wykorzystać twierdzenie 4 wpisując w trójkąt ABC elipsę o ogniskach P i Q, a następnie skorzystać z twierdzenia 2 dla kąta wypukłego ACB.

Inne zastosowanie powyższych własności znajduje się na stronie 64 w rozwiązaniu zadania 2 z zawodów stopnia trzeciego.

Przedstawimy jeszcze trzy interesujące własności elipsy. Ponieważ nie korzystaliśmy z nich w niniejszej broszurze, pozostawiamy je bez dowodu, jako ćwiczenie dla Czytelników pragnących nabrać wprawy w posługiwaniu się omawianymi pojęciami.

Twierdzenie 5.

Niech e będzie elipsą o ogniskach F, G oraz niech k będzie styczną do tej elipsy. Punkt X jest rzutem prostokątnym punktu F na prostą k. Wówczas zbiór punktów X, przy ustalonej elipsie e oraz zmieniającej się stycznej k, jest okręgiem.

Oczywiście analogiczne twierdzenie zachodzi dla ogniska G.

Twierdzenie 6.

Niech e będzie ustaloną elipsą o ogniskach F, G oraz niech k będzie zmieniającą położenie styczną do tej elipsy. Punkty X, Y są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów F i G na prostą k. Wówczas wartość iloczynu $FX \cdot GY$ nie zależy od wyboru stycznej k.

Twierdzenie 7.

Z punktu P leżącego na zewnątrz ustalonej elipsy poprowadzono dwie styczne PK i PL do tej elipsy. Wówczas zbiór takich punktów P, dla których kąt KPL jest prosty, jest okręgiem.

Innymi słowy: *Zbiór tych punktów, z których daną elipsę widać pod kątem prostym, jest okręgiem.*

C. Parabola

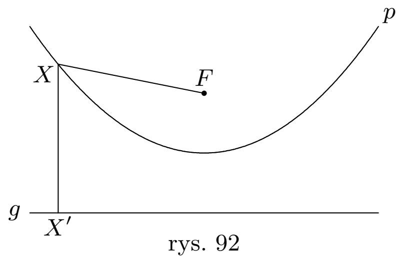
Dana jest prosta g oraz punkt F nie leżący na tej prostej. Zbiór punktów równo oddalonych od punktu F i od prostej g nazywamy *parabolą* (rys. 92). Punkt F nazywamy *ogniskiem*, zaś prostą g *kierownicą* paraboli.

Analogicznie jak w przypadku elipsy, podstawą do dalszych rozważań jest następujący fakt, opisujący konstrukcję stycznej do paraboli.

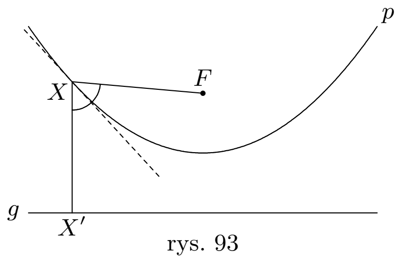
Twierdzenie 1.

Niech p będzie parabolą o ognisku F i kierownicy g oraz niech $X \in p$. Oznaczmy przez X' rzut prostokątny punktu X na prostą g. Wówczas dwusieczna kąta $X'XF$ jest styczna do paraboli p w punkcie X (rys. 93).

Dowód jest analogiczny do dowodu w przypadku elipsy, pozostawiamy go Czytelnikowi.



rys. 92



rys. 93

Bezpośrednio z powyższego twierdzenia wynika następujący, użyteczny

Wniosek

Prosta k jest styczna do paraboli p o ognisku F i kierownicy g. Niech F' będzie punktem symetrycznym do punktu F względem prostej k. Wówczas punkt F' leży na kierownicy g.

Parabola, podobnie jak elipsa, posiada wiele ciekawych własności. Niżej zacytujemy część z nich, pozostawiając odnalezienie dowodu Czytelnikom pragnącym nabrać wprawy w posługiwaniu się omawianymi pojęciami.

Twierdzenie 2.

Prosta k jest styczna do paraboli p o ognisku F i kierownicy g. Niech F' będzie rzutem prostokątnym punktu F na prostej k. Wówczas punkt F' leży na prostej stycznej do paraboli p i równoległej do kierownicy g.

Twierdzenie 3.

Trzy proste styczne do paraboli p o ognisku F wyznaczają trójkąt ABC. Wówczas punkty A, B, C, F leżą na jednym okręgu.

Twierdzenie 4.

Proste k i l są styczne do paraboli p o ognisku F odpowiednio w punktach K i L. Niech P będzie punktem przecięcia prostych k i l. Wówczas

$$\sphericalangle KFP = \sphericalangle LFP.$$

Twierdzenie 5.

Proste k i l są styczne do paraboli p o ognisku F i kierownicy g. Niech P będzie punktem przecięcia prostych k i l. Prosta m przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do kierownicy g. Wówczas kąt utworzony przez proste k i m jest równy kątowi utworzonemu przez proste l i PF.

Twierdzenie 6.

Proste k i l są styczne do paraboli p o ognisku F i kierownicy g odpowiednio w punktach K i L. Niech P będzie punktem przecięcia prostych k i l. Wówczas prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do kierownicy g połowi odcinek KL.

Twierdzenie 7.

Z punktu leżącego na kierownicy g danej paraboli p poprowadzono dwie różne styczne k i l do paraboli p. Wówczas proste k i l są prostopadłe.

Jeszcze jedna ciekawa własność paraboli jest ukryta w zadaniu 8 z Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych (str. 86).

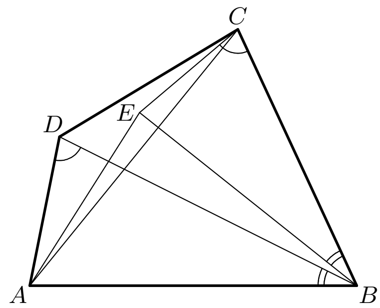
D. Twierdzenie Ptolemeusza

Twierdzenie

W dowolnym czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi nierówność

$$BA\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD, \tag{1}$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.



rys. 94

Dowód

Niech E będzie punktem leżącym wewnątrz kąta wypukłego ABC, wyznaczonym przez następujące warunki (rys. 94):

$$\sphericalangle EBC=\sphericalangle ABD \quad \text{oraz} \quad \frac{EB}{CB}=\frac{AB}{DB}. \tag{2}$$

Z powyższych równości wynika, że trójkąty EBC i ABD są podobne. Stąd

$$\frac{EC}{AD}=\frac{BC}{BD}. \tag{3}$$

Z pierwszej równości (2) wnioskujemy, że $\sphericalangle EBA=\sphericalangle CBD$, co w połączeniu z drugą równością (2) dowodzi, że trójkąty EBA i CBD są podobne. Zatem

$$\frac{EA}{CD}=\frac{BA}{BD}. \tag{4}$$

Wykorzystując równości (3) i (4) możemy przepisać nierówność (1) w postaci $EA+EC\geqslant AC$. Ostatnia zależność jest prawdziwa na mocy nierówności trójkąta ACE.

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt E leży na odcinku AC. Tak się stanie jedynie wtedy, gdy $\sphericalangle ADB=\sphericalangle ACB$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Uwaga 1.

Przyglądając się uważnie zaprezentowanemu dowodowi wnioskujemy, że nierówność (1) jest prawdziwa dla *dowolnych* czterech punktów A, B, C, D, niekoniecznie wierzchołków czworokąta wypukłego. Punkty te nie muszą nawet leżeć w jednej płaszczyźnie.

Uwaga 2.

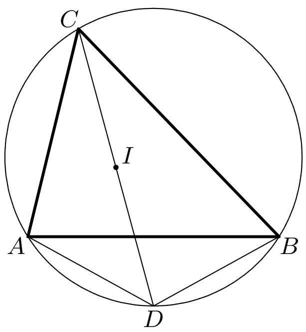
W przypadku, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, powyższe twierdzenie jest nazywane *twierdzeniem Ptolemeusza*. W niniejszej broszurze korzystaliśmy z niego dwukrotnie: w rozwiązaniu zadania 2 z zawodów stopnia drugiego (str. 53) oraz w rozwiązaniu zadania 12 z Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (str. 96).

E. Środek okręgu wpisanego

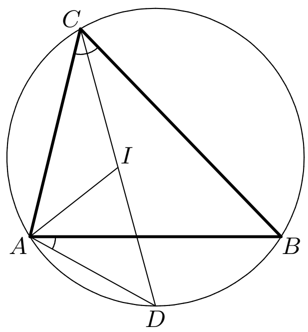
Poniższy lemat to prosta, jednak w wielu zadaniach bardzo użyteczna charakteryzacja środka okręgu wpisanego w dany trójkąt. Z własności tej korzystaliśmy w zadaniu 12 z X Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (str. 96).

Lemat

W trójkącie ABC dwusieczna kąta C przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie $D \neq C$ (rys. 95). Wówczas punkt I, leżący na cięciwie CD, jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $AD = DI$.



rys. 95



rys. 96

Dowód

Punkt I leżący na cięciwie CD jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC wtedy i tylko wtedy gdy (rys. 96)

$$\sphericalangle CAI = \sphericalangle IAB \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle CAI + \sphericalangle ACI = \sphericalangle IAB + \sphericalangle BAD \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \sphericalangle AID = \sphericalangle IAD \quad \Leftrightarrow \quad AD = DI.$$

SPIS TREŚCI

LI Olimpiada Matematyczna 1999/2000
Sprawozdanie Komitetu Głównego

Uwaga. O wszelkich zauważonych błędach, niejasnościach i nieścisłościach prosimy poinformować Komitet Główny Olimpiady Matematycznej.

Wydawnictwa Szkolne
i Pedagogiczne S.A.
Pl. Dąbrowskiego 8
00-950 Warszawa
tel: (0-22) 826-54-51

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE
00-048 Warszawa, Mazowiecka 2/4
tel./fax (0-22) 826-82-93

MATEMATYKA

Bryant V.: *Aspekty kombinatoryki*	25,00 zł
Conway J. H., Guy R. K.: *Księga liczb*	35,00 zł
Gajek L., Kałuszka M.: *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody*	32,00 zł
Grabowski M.: *Analiza matematyczna. Powtórzenie, ćwiczenia i zbiór zadań*	19,50 zł
Kaczorek T.: *Wektory i macierze w automatyce i elektronice*	30,00 zł
Kącki E.: *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*	12,50 zł
Klukowski J., Nabiałek J.: *Algebra dla studentów*	36,00 zł
Krzyśko M.: *Wykłady z teorii prawdopodobieństwa*	29,50 zł
Leitner R.: *Zarys matematyki wyższej dla studentów.* Cz. I	33,00 zł
Leitner R.: *Zarys matematyki wyższej dla studentów.* Cz. II	21,00 zł
Leitner R.: *Zarys matematyki wyższej dla studentów.* Cz. III	16,00 zł
Leitner R., Matuszewski W., Rojek Z.: *Zadania z matematyki wyższej*	
Część I	29,00 zł
Część II	29,50 zł
Mawhin J.: *Metody wariacyjne dla nieliniowych problemów Dirichleta*	6,00 zł
Morrison F.: *Sztuka modelowania układów dynamicznych deterministycznych, chaotycznych, stochastycznych*	26,00 zł
Ott E.: *Chaos w układach dynamicznych*	33,50 zł
Palczewski A.: *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych*	35,00 zł
Palka Z., Ruciński A.: *Niekonstruktywne metody matematyki dyskretnej*	7,25 zł
Palka Z., Ruciński A.: *Wykłady z kombinatoryki.* Część 1	19,50 zł
Piskorek A.: *Równania całkowe. Elementy teorii i zastosowania*	29,00 zł
Plucińska A., Pluciński E.: *Probabilistyka*	48,00 zł
Przybyło S., Szlachtowski A.: *Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach*	12,80 zł
Ribenboim P.: *Mała księga wielkich liczb pierwszych*	20,50 zł
Small D. B., Hosack J. M.: *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniem obliczeń symbolicznych*	14,00 zł
Sobczyk K.: *Stochastyczne równania różniczkowe. Teoria i zastosowania*	28,00 zł
Sobczyk K., Spencer B. F.: *Stochastyczne modele zmęczenia materiałów*	20,00 zł