LI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2000 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Rozstrzygnąć, czy każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w postaci

$$\frac{a^2+b^3}{c^5+d^7}\,,$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich p, q zachodzą następujące równości:

$$\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{p^5q^4+p^{14}q^6}{p^5q^4+p^{14}q^6}=\frac{p^6q^4+p^{15}q^6}{p^5q^5+p^{14}q^7}=\frac{(p^3q^2)^2+(p^5q^2)^3}{(pq)^5+(p^2q)^7}\,.$$

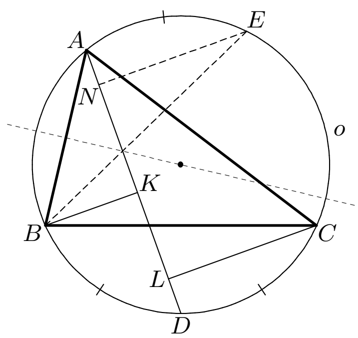
Zatem każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w żądanej postaci.

Zadanie **2.** Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D różnym od A. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na prostą AD. Dowieść, że

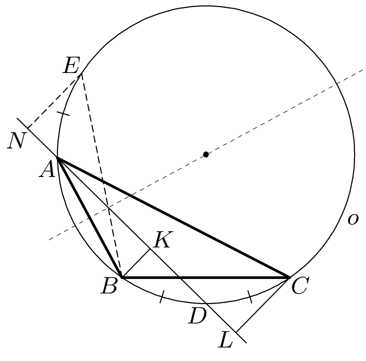
$$AD \geqslant BK+CL.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez o okrąg opisany na trójkącie ABC. Z równości kątów BAD i DAC wynika, że długości łuków BD i DC okręgu o są równe (długość łuku XY jest mierzona od punktu X do punktu Y w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).



rys. 1



rys. 2

Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu D względem symetralnej boku AB, zaś niech N będzie rzutem prostokątnym punktu E na prostą

AD (rys. 1 i 2). Wówczas $AD = BE$. Ponadto długości łuków DC i EA są równe, co oznacza, że $EN = CL$.

Punkty B i E leżą po dwóch różnych stronach prostej AD. Zatem długość odcinka BE jest nie mniejsza niż suma odległości punktów B i E od prostej AD. Innymi słowy $BE \geqslant BK + EN$, czyli $AD \geqslant BK + CL$.

Zadanie **3.** Na polach szachownicy $n \times n$ rozmieszczono n^2 różnych liczb całkowitych, po jednej na każdym polu. W każdej kolumnie pole z największą liczbą pomalowano na czerwono. Zbiór n pól szachownicy nazwiemy *dopuszczalnym*, jeżeli żadne dwa z tych pól nie znajdują się w tym samym wierszu, ani w tej samej kolumnie. Spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych wybrano zbiór, dla którego suma liczb umieszczonych na jego polach jest największa.
Wykazać, że w tak wybranym zbiorze jest czerwone pole.

Rozwiązanie

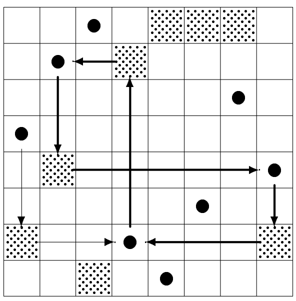
Przeprowadzimy dowód nie wprost.

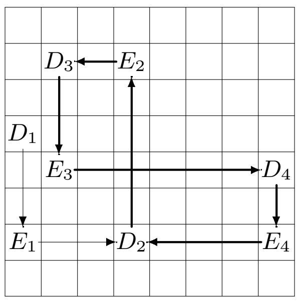
Załóżmy, że w wybranym zbiorze dopuszczalnym (oznaczmy go przez A) nie ma czerwonego pola.

Zdefiniujemy ciąg pól $D_1, E_1, D_2, E_2, \ldots$ danej szachownicy według niżej opisanej reguły. (Dla $n = 8$ proces wyboru pól $D_1, E_1, D_2, E_2, \ldots$ jest przedstawiony na rysunkach 1 i 2. Pola czerwone są zacieniowane, zaś pola ze zbioru A są oznaczone kółkiem.)

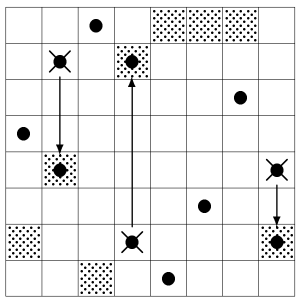
Pole D_1 jest dowolnym polem ze zbioru A. Niech E_1 będzie polem czerwonym leżącym w tej samej kolumnie, co D_1.

Następnie rozważamy to pole D_2 ze zbioru A, które leży w tym samym wierszu, co E_1. Przez E_2 oznaczamy pole czerwone leżące w tej samej kolumnie, co D_2. Postępowanie to kontynuujemy. (Ogólnie: pole czerwone E_i leży w tej samej kolumnie, co D_i, natomiast pole D_{i+1} jest polem ze zbioru A leżącym w tym samym wierszu, co E_i.)


rys. 1



rys. 2


rys. 3

W ten sposób otrzymujemy ciąg pól $D_1, E_1, D_2, E_2, D_3, \ldots$, w którym każde pole jednoznacznie wyznacza pole następne. Ponieważ pól czerwonych jest skończenie wiele, więc znajdziemy takie liczby całkowite dodatnie i, t, dla których $E_i = E_{i+t}$ oraz $E_i \neq E_{i+s}$ dla $s=1,2,\ldots,t-1$. (W naszym przykładzie przedstawionym na rysunkach 1 i 2, $E_2 = E_5$, a więc $i=2$, $t=3$.)

Usuwamy ze zbioru A pola $D_{i+1}, D_{i+2}, \ldots, D_{i+t}$ zastępując je odpowiednio polami $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_{i+t}$ (rys. 3). Otrzymany w ten sposób zbiór oznaczmy przez B.

Z określenia ciągu $D_1, E_1, D_2, E_2, D_3, \ldots$ wynika, że pola

$$D_{i+1},\ D_{i+2},\ \ldots,\ D_{i+t}$$

znajdują się odpowiednio w tych samych kolumnach, co pola

$$E_{i+1},\ E_{i+2},\ \ldots,\ E_{i+t}$$

oraz odpowiednio w tych samych wierszach, co pola

$$E_i = E_{i+t},\ E_{i+1},\ E_{i+2},\ \ldots,\ E_{i+t-1}\ .$$

Zatem zbiór B jest dopuszczalny. Ponadto liczby, które zostały napisane na polach $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_{i+t}$ są *większe* odpowiednio od liczb napisanych na polach $D_{i+1}, D_{i+2}, \ldots, D_{i+t}$. Wynika stąd, że suma liczb napisanych na polach zbioru B jest większa od sumy liczb napisanych na polach zbioru A. To jednak przeczy założeniu, że A ma największą sumę liczb spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych.

(*wp, jwr*)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`

LI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

26 lutego 2000 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Proste BI i CI przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E. Wyznaczyć wszystkie miary kąta BAC, dla których może zachodzić równość $DI = EI$.

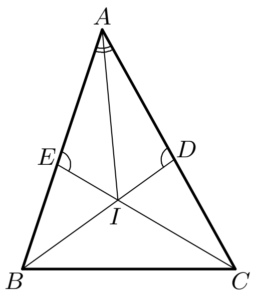
Rozwiązanie

Wykażemy, że jedyną wartością przyjmowaną przez kąt BAC jest 60°.

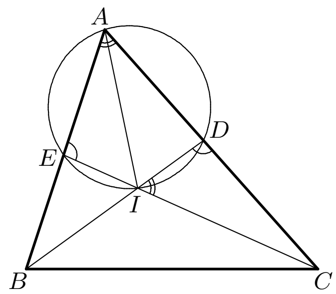
Na mocy twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów ADI i AEI otrzymujemy $\sin\sphericalangle AEI = \sin\sphericalangle ADI$. Stąd

$$\sphericalangle AEI = \sphericalangle ADI \qquad \text{lub} \qquad \sphericalangle AEI + \sphericalangle ADI = 180^\circ.$$

Przypuśćmy najpierw, że zachodzi równość $\sphericalangle AEI = \sphericalangle ADI$ (rys. 1). Wtedy również $\sphericalangle AIE = \sphericalangle AID$, co oznacza, że trójkąty AEI oraz ADI są przystające (cecha *kąt-bok-kąt*). Zatem $AD = AE$. To dowodzi, że przystające są także trójkąty ADB i AEC (cecha *kąt-bok-kąt*). Stąd uzyskujemy równość $AB = AC$, co przeczy założeniom poczynionym w treści zadania.



rys. 1



rys. 2

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym $\sphericalangle AEI + \sphericalangle ADI = 180^\circ$ (rys. 2). Wtedy punkty A, E, I, D leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DIC = \sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC + \tfrac{1}{2}\sphericalangle BCA.$$

Stąd otrzymujemy

$$180^\circ = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC + 2\sphericalangle BAC = 3\sphericalangle BAC,$$

czyli $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

Do zakończenia rozwiązania pozostało wykazać, że istnieje trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ oraz $DI = EI$. Wykażemy więcej: w każdym trójkącie ABC o kącie BAC równym 60° zachodzi równość $DI = EI$.

Jeżeli $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, to

$$\sphericalangle DIC = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC + \tfrac{1}{2}\sphericalangle BCA = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC = 60^\circ = \sphericalangle BAC.$$

Na czworokącie $AEID$ można więc opisać okrąg. Ponieważ AI jest dwusieczną kąta EAD, więc $DI = EI$.

Zadanie **5.** Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(f(n)) = 2n$.

Rozwiązanie

Taka funkcja istnieje. Oto przykład.

Niech A będzie zbiorem tych liczb całkowitych dodatnich, w których rozkładzie na czynniki pierwsze „trójka” występuje nieparzystą liczbę razy. Funkcję f definiujemy wzorem:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n & \text{dla} \quad n \in A, \\ 6n & \text{dla} \quad n \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

Wówczas, jeśli $n \in A$, to $f(n) \in \mathbb{N} \setminus A$, skąd

$$f(f(n)) = f(\tfrac{1}{3}n) = 2n \qquad \text{dla} \quad n \in A.$$

Podobnie, jeżeli $n \in \mathbb{N} \setminus A$, to $f(n) \in A$, co daje

$$f(f(n)) = f(6n) = 2n \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N} \setminus A.$$

Zadanie **6.** Wielomian $w(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla całkowitych x wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Dowieść, że wielomian $w(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

Rozwiązanie

Niech $w(x) = ax^2 + bx + c$. Wprowadźmy oznacznie: $k_n = \sqrt{w(n)}$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n. Wówczas k_n może być zerem dla co najwyzej dwóch wartości n. Dla pozostałych n mamy

$$k_{n+1} - k_n = \frac{k_{n+1}^2 - k_n^2}{k_{n+1} + k_n} = \frac{(2n+1)a + b}{\sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} + \sqrt{an^2 + bn + c}} \ .$$

Dzieląc licznik i mianownik otrzymanego ułamka przez n i przechodząc z n do nieskończoności widzimy, że ciąg $(k_{n+1} - k_n)$ jest zbieżny i jego granica wynosi $\sqrt{a}$. Ponieważ wyrazy ciągu $(k_{n+1} - k_n)$ są całkowite, więc granica tego ciągu, liczba $\sqrt{a}$, jest też całkowita. Ponadto istnieje taka liczba naturalna m, że

$$(1) \qquad k_{n+1} - k_n = \sqrt{a} \qquad \text{dla} \quad n \geqslant m.$$

Niech $d = k_m - m\sqrt{a}$. Ze związku (1) wynika, że

$$(2) \qquad k_n = n\sqrt{a} + d \qquad \text{dla} \quad n \geqslant m.$$

Przyjmijmy: $p(x) = (x\sqrt{a} + d)^2$. Na mocy definicji liczb k_n oraz równości (2) uzyskujemy równość $p(n) = w(n)$ dla $n \geqslant m$. To oznacza, że $p(x) = w(x)$, skąd

$$w(x) = \left(x\sqrt{a} + d\right)^2 \ .$$

(*wp, jwr*)