LI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2000 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$.
Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ układu równań

$$\begin{cases} x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ x_4 + x_3^2 = 4x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \\ x_1 + x_n^2 = 4x_n \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

Rozwiązanie

Odpowiedź: 2^n.

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$x_1(x_1 - 4) = x_1^2 - 4x_1 = -x_2 \leqslant 0,$$

skąd wynika, że $x_1 \leqslant 4$. Istnieje więc dokładnie jedna liczba $\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, spełniająca zależność $x_1 = 4\sin^2\alpha$.

Wówczas $x_2 = x_1(4 - x_1) = 4\sin^2\alpha \cdot 4\cos^2\alpha = 4\sin^2 2\alpha$. Rozumując analogicznie dostajemy

$$x_k = 4\sin^2(2^{k-1}\alpha) \qquad (k = 3, 4, \ldots, n)$$

oraz $x_1 = 4\sin^2(2^n\alpha)$.

Liczba rozwiązań danego układu równań w liczbach nieujemnych jest więc równa liczbie rozwiązań równania

$$\sin^2\alpha = \sin^2(2^n\alpha)$$

w liczbach rzeczywistych $\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. Ponieważ równość $\sin\beta = \pm\sin\gamma$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy któraś z liczb $\beta + \gamma$, $\beta - \gamma$ jest całkowitą wielokrotnością π, więc jedna z liczb $(2^n+1)\alpha$, $(2^n-1)\alpha$ musi być całkowitą wielokrotnością π. Stąd wynika, że α jest jedną z liczb:

$$0, \quad \frac{k\pi}{2^n+1}, \quad \frac{\ell\pi}{2^n-1}, \quad \text{gdzie } k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}, \ \ \ell \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}-1\}.$$

Ponieważ największy wspólny dzielnik liczb $2^n + 1$ i $2^n - 1$ jest równy 1, więc wyżej wypisane możliwe wartości α są różne. Zatem istnieje dokładnie 2^n ciągów liczb nieujemnych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spełniających dany układ równań.

Zadanie **2.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że

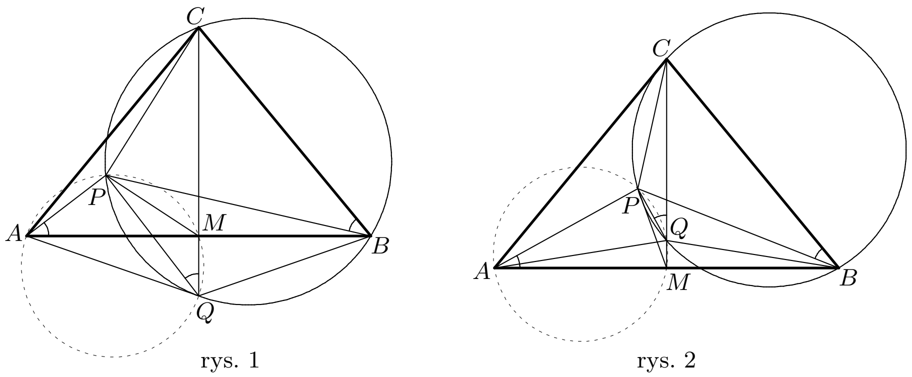
$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ.$$

Rozwiązanie

Załóżmy najpierw, że punkt P leży wewnątrz trójkąta AMC lub na odcinku MC.

Niech $Q \neq C$ będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie BCP z prostą CM (rys. 1 i 2). Ponieważ $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PQC$, więc punkty A, P, M, Q leżą na jednym okręgu. Ponadto

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC = \sphericalangle AQC. \tag{1}$$



rys. 1 rys. 2

Jeżeli punkt Q znajduje się na zewnątrz trójkąta ABC (rys. 1) lub na odcinku AB, to na mocy zależności (1) otrzymujemy

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle APM + \sphericalangle AQC = 180^\circ.$$

Jeżeli natomiast punkt Q znajduje się wewnątrz trójkąta ABC (rys. 2), to korzystając raz jeszcze z równości (1) uzyskujemy

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle AQM + \sphericalangle AQC = 180^\circ.$$

Załóżmy teraz, że punkt P znajduje się wewnątrz trójkąta BCM. Ponieważ $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PAC$, więc przeprowadzając rozumowanie analogiczne do powyższego otrzymujemy równość $\sphericalangle BPM + \sphericalangle APC = 180^\circ$. Stąd

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **3.** Ciąg liczb naturalnych (p_n) spełnia następujące warunki:

1° p_1 i p_2 są liczbami pierwszymi,

2° dla $n \geqslant 3$ liczba p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby
$$p_{n-1}+p_{n-2}+2000\ .$$

Udowodnić, że ciąg (p_n) jest ograniczony.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że dla dowolnego $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność

$$p_n \leqslant \max(p_{n-2},p_{n-1})+2002\ . \tag{1}$$

Istotnie, jeśli jedna z liczb p_{n-2}, p_{n-1} jest równa 2, to na mocy definicji, liczba p_n jest dzielnikiem pierwszym liczby $\max(p_{n-2},p_{n-1})+2002$. Nierówność (1) jest wtedy udowodniona. Jeśli natomiast obydwie liczby p_{n-2}, p_{n-1} są nieparzyste, to liczba p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby parzystej $p_{n-2}+p_{n-1}+2000$, a więc jest także dzielnikiem pierwszym liczby

$$\frac{p_{n-2}+p_{n-1}+2000}{2}=\frac{p_{n-2}+p_{n-1}}{2}+1000 \leqslant \max(p_{n-2},p_{n-1})+1000.$$

Zatem nierówność (1) jest spełniona również w tym przypadku.

Niech $M=\max(p_1,p_2)\cdot 2003!+2$. Wykażemy indukcyjnie, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność $p_n<M$.

Oczywiście $p_1<M$ oraz $p_2<M$.

Załóżmy, że dla liczby naturalnej $n \geqslant 3$ zachodzą nierówności $p_{n-2}<M$, $p_{n-1}<M$. Wówczas na mocy zależności (1) otrzymujemy $p_n<M+2002$. Ponieważ liczby M, $M+1$, $M+2$, …, $M+2001$ są złożone, więc w rezultacie uzyskujemy silniejsze oszacowanie: $p_n<M$.

To kończy dowód indukcyjny oraz rozwiązanie zadania.

(*wp, jwr*)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`

LI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2000 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2...A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $60°$. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2,B_3,\ldots,B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach A_2S, $A_3S,\ldots,A_nS$, że

$$A_1B_2+B_2B_3+B_3B_4+\ldots+B_{n-1}B_n+B_nA_1<2A_1S.$$

Rozwiązanie

Takie punkty istnieją dla dowolnego $n \geqslant 3$.

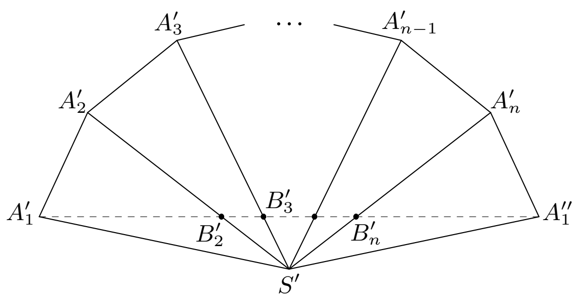
Niech O będzie spodkiem wysokości ostrosłupa, zaś α miarą kąta ściany bocznej przy wierzchołku S. Z równości $A_1S=2A_1O$ otrzymujemy

$$\sin\tfrac{\alpha}{2}=\frac{A_1A_2}{2A_1S}=\frac{1}{2}\cdot\frac{A_1A_2}{2A_1O}=\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{180°}{n}=\sin\tfrac{90°}{n}\cos\tfrac{90°}{n}<\sin\tfrac{90°}{n},$$

skąd

$$n\alpha<180°. \tag{1}$$

Rozetnijmy powierzchnię boczną ostrosłupa wzdłuż krawędzi A_1S i rozłóżmy ją na płaszczyźnie. Otrzymamy wtedy wielokąt $S'A_1'A_2'\ldots A_n'A_1''$ (rys. 1). Na mocy nierówności (1), $\sphericalangle A_1'S'A_1''=n\alpha<180°$.



rys. 1

Niech $B_2',B_3',\ldots,B_n'$ będą punktami przecięcia odcinka $A_1'A_1''$ odpowiednio z odcinkami $A_2'S',A_3'S',\ldots,A_n'S'$. Na mocy nierówności trójkąta,

$$A_1'B_2'+B_2'B_3'+B_3'B_4'+\ldots+B_{n-1}'B_n'+B_n'A_1''<2A_1'S'\ .$$

Punkty $B_2',B_3',\ldots,B_n'$ wyznaczają więc punkty $B_2,B_3,\ldots,B_n$ na krawędziach ostrosłupa spełniające warunki zadania.

Zadanie **5.** Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą liczbę k o następującej własności. Z dowolnego k-elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$, można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta.

Rozwiązanie

Udowodnimy następujące dwa zdania:

1. Z dowolnego zbioru złożonego z $m+n$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$ $(m,n \geqslant 2)$ można wybrać niepusty podzbiór mający w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy parzystą liczbę pól.

2. Istnieje zbiór $m+n-1$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$, z którego nie da się wybrać niepustego podzbioru mającego w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy parzystą liczbę pól.

Z powyższych zdań zastosowanych dla $m = n$ wnioskujemy, że najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest $\boldsymbol{k = 2n}$.

Dowód zdania 1.

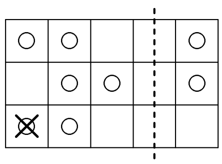
Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem $m+n$. Dla $m = 2$, $n = 2$ teza zdania 1 jest prawdziwa.

Ustalmy dwie liczby naturalne m, n o sumie większej niż 4 i załóżmy, że zdanie 1 jest prawdziwe dla dowolnej szachownicy o sumie wymiarów mniejszej niż $m+n$. Rozważmy dowolny zbiór A złożony z $m+n$ pól szachownicy S o wymiarach $m \times n$. Możliwe są następujące trzy przypadki:

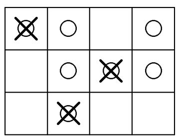
(a) istnieje wiersz lub kolumna szachownicy S nie zawierająca żadnego pola ze zbioru A;

(b) istnieje wiersz lub kolumna szachownicy S, w której znajduje się dokładnie jedno pole ze zbioru A;

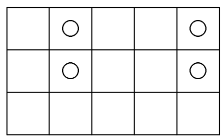
(c) w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się co najmniej dwa pola ze zbioru A.



rys. 1



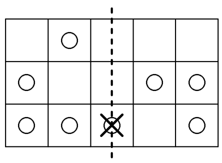
rys. 2

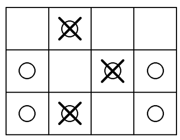


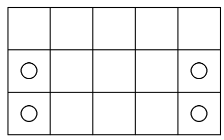
rys. 3

W przypadku (a) usuwamy z szachownicy S tę kolumnę (lub wiersz), która nie zawiera żadnego pola ze zbioru A. Następnie usuwamy ze zbioru A dowolne pole (na rysunku 1 pola zbioru A oznaczone są kółeczkami). W ten sposób otrzymujemy nową szachownicę, która zawiera pewien zbiór A' złożony z $m+n-1$ pól i której suma wymiarów jest równa $m+n-1$ (rys. 2). Stąd wynika, że każdy z wymiarów uzyskanej szachownicy jest nie mniejszy niż 2. Zatem na mocy założenia indukcyjnego można wybrać ze zbioru A' niepusty podzbiór mający w każdym wierszu i w każdej kolumnie parzystą liczbę pól. Wklejając z powrotem usuniętą kolumnę lub usunięty wiersz na swoje miejsce (rys. 3) otrzymujemy żądany podzbiór zbioru A.

Podobnie postępujemy w przypadku (b): znajdujemy najpierw kolumnę (lub wiersz), w której znajduje się dokładnie jedno pole ze zbioru A, a następnie usuwamy tę kolumnę z szachownicy S (rys. 4). W rezultacie otrzymujemy nową szachownicę, która zawiera pewien zbiór A' złożony z $m+n-1$ pól i której suma wymiarów jest równa $m+n-1$ (rys. 5). Tak jak wyżej, stosujemy założenie indukcyjne, po czym wklejamy z powrotem usuniętą kolumnę lub usunięty wiersz (rys. 6).


rys. 4


rys. 5


rys. 6

Rozpatrzmy przypadek (c). Niech $k_1,k_2,\ldots,k_n$, $w_1,w_2,\ldots,w_m$ oznaczają odpowiednio liczby pól zbioru A w poszczególnych kolumnach i wierszach. Wówczas

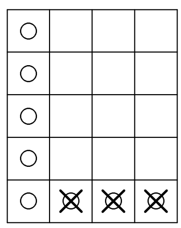
$$(k_1+k_2+\ldots+k_n)+(w_1+w_2+\ldots+w_m)=2(m+n).$$

Ponadto $k_i,w_j \geqslant 2$ dla wszystkich i, j. Stąd wynika, że $k_i=w_j=2$. Zatem zbiór A ma w każdej kolumnie i w każdym wierszu dokładnie dwa pola. To oznacza, że liczba pól zbioru A w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest parzysta.

Dowód indukcyjny, a tym samym dowód zdania 1, został zakończony.

Dowód zdania 2.

Rozważmy zbiór A złożony ze wszystkich $m+n-1$ pól szachownicy o wymiarach $m\times n$ znajdujących się w dolnym wierszu i pierwszej kolumnie (rys. 7). Aby otrzymać parzystą liczbę pól w kolumnach od drugiej do ostatniej musimy usunąć ze zbioru A pola, które się w tych kolumnach znajdują. Po ich usunięciu widzimy, że z tego samego powodu musimy usunąć pozostałe pola zbioru A. To kończy dowód zdania 2.


rys. 7

Zadanie **6.** Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x

$$P(x^2-1) = \big(P(x)\big)^2 - 1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x) = x.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwe są zależności

$$(P(-x))^2 = P(x^2-1)+1 = (P(x))^2.$$

Stąd wynika, że dla każdego x zachodzi jedna z równości: $P(-x)=P(x)$ lub $P(-x)=-P(x)$.

Przypuśćmy, że dla nieskończenie wielu x zachodzi równość $P(-x)=P(x)$. Wówczas równość ta musi być prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x, co przeczy założeniu, że stopień wielomianu P jest liczbą nieparzystą.

Zatem dla nieskończenie wielu x zachodzi równość $P(-x)=-P(x)$, skąd wynika, że równość ta jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

Dowolną liczbę rzeczywistą $x \geqslant -1$ możemy zapisać w postaci $x = y^2-1$, dla pewnej liczby rzeczywistej y. Stąd

(1) $$P(x) = P(y^2-1) = (P(y))^2 - 1 \geqslant -1\,.$$

Określamy rekurencyjnie ciąg (x_n) wzorami:

$$x_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad x_n = \sqrt{x_{n-1}+1} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2\,.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że

(2) $$P(x_n) = x_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z zależności $P(-x)=-P(x)$ otrzymujemy $P(0)=0$. Kładąc $x=0$ do danej w treści zadania tożsamości otrzymujemy $P(-1)=-1$, skąd $P(1)=1$. To dowodzi równości (2) dla $n=1$.

Ze związku $P(x_{n-1}) = x_{n-1}$ wynika, że

$$(P(x_n))^2 = P(x_n^2-1)+1 = P(x_{n-1})+1 = x_{n-1}+1 = x_n^2\,.$$

Ponieważ $x_n > 1$ dla $n \geqslant 2$, więc nierówność (1) wyklucza prawdziwość równości $P(x_n) = -x_n$. Zatem $P(x_n)=x_n$, co kończy dowód zależności (2).

Ciąg (x_n) jest rosnący, więc równość $P(x)=x$ zachodzi dla nieskończenie wielu x. Z tego zaś wynika, że $P(x)=x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$.

(*wp, jwr*)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`