LI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

Stalowa Wola, 3–4 kwietnia 2000

1. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ układu równań

$$\begin{cases} x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ x_4 + x_3^2 = 4x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \\ x_1 + x_n^2 = 4x_n \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ.$$

3. Ciąg liczb naturalnych (p_n) spełnia następujące warunki:
1° p_1 i p_2 są liczbami pierwszymi,
2° dla $n \geqslant 3$ liczba p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby

$$p_{n-1} + p_{n-2} + 2000\ .$$

Udowodnić, że ciąg (p_n) jest ograniczony.

4. W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2...A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3, \ldots, B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach $A_2S, A_3S, \ldots, A_nS$, że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

5. Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą liczbę k o następującej własności. Z dowolnego k-elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$, można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta.

6. Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x

$$P(x^2 - 1) = (P(x))^2 - 1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x) = x.$$