



LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2002 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x).$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Rozwiązanie

Na mocy danych w treści zadania równości, otrzymujemy dla dowolnej liczby rzeczywistej x :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2x) = f(1-2x) = \\ &= f\left(\frac{1}{2}(1-2x)\right) = f\left(\frac{1}{2}-x\right) = f\left(1-\left(\frac{1}{2}-x\right)\right) = f\left(x+\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

co dowodzi, że funkcja f jest okresowa o okresie $\frac{1}{2}$.

Zadanie 2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle ADB = 2\sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BDC = 2\sphericalangle BAC.$$

Udowodnić, że $AD = CD$.

Rozwiązanie

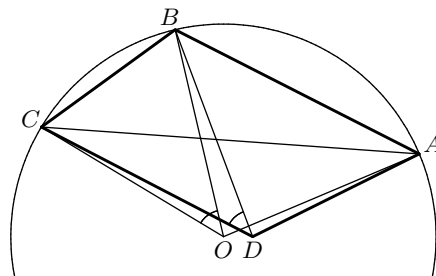
Z danych w zadaniu równości kątów oraz z nierówności $\sphericalangle ADC < 180^\circ$ wynika, że

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC) = \frac{1}{2}\sphericalangle ADC < 90^\circ.$$

Kąty ACB i BAC są więc ostre, co oznacza, że środek O okręgu opisanego na trójkącie ABC leży wewnątrz kąta ABC (rys. 1). Stąd w szczególności wynika, że punkty O i D leżą po tej samej stronie prostej BC . Ponadto

$$\sphericalangle BDC = 2\sphericalangle BAC = \sphericalangle BOC.$$

Zatem punkty B, C, O, D leżą na jednym okręgu o_1 .



rys. 1

Analogicznie dowodzimy, że punkty A, B, O, D leżą na jednym okręgu o_2 . Okręgi o_1 i o_2 są różne — w przeciwnym razie okrąg opisany na trójkącie ABC przechodziłby przez punkt O , czyli swój środek. Okręgi o_1 i o_2 mają jednak trzy punkty wspólne: B, D i O . Ponieważ $B \neq D$, więc musi być $O = D$, czyli $AD = CD$.

Zadanie 3. W n -osobowym stowarzyszeniu działa sześć komisji. W skład każdej z nich wchodzi nie mniej niż $n/4$ osób. Dowieść, że istnieją dwie komisje oraz grupa licząca nie mniej niż $n/30$ osób, należących do obu tych komisji.

Rozwiązanie

Ponumerujemy komisje liczbami $1, 2, \dots, 6$ i oznaczymy przez K_i liczbę tych członków i -tej komisji, którzy **nie są** członkami żadnej komisji o numerze mniejszym od i .

K_1 to liczba wszystkich członków komisji nr 1, co daje $K_1 \geq n/4$.

Przypuśćmy, że część wspólna dowolnych dwóch komisji liczy mniej niż $n/30$ osób.

Ponieważ w skład komisji nr 2 wchodzi co najmniej $n/4$ osób, więc liczba tych członków komisji nr 2, którzy nie są w komisji nr 1 musi być większa od $n/4 - n/30$. Stąd

$$K_2 > \frac{n}{4} - \frac{n}{30}.$$

Analogicznie stwierdzamy, że

$$K_i > \frac{n}{4} - (i-1) \frac{n}{30} \quad \text{dla } i = 3, 4, 5, 6.$$

Dodając stronami powyższe nierówności uzyskujemy

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 > \frac{6n}{4} - (1+2+3+4+5) \frac{n}{30} = n.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż wielkość $K_1 + K_2 + \dots + K_6$ jest nie większa od liczby wszystkich członków stowarzyszenia, czyli n . Zatem do części wspólnej pewnych dwóch komisji należy co najmniej $n/30$ osób.

(wp, jwr)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/



LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2002 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb pierwszych $p \leq q \leq r$, że liczby $pq+r$, $pq+r^2$, $qr+p$, $qr+p^2$, $rp+q$, $rp+q^2$ są pierwsze.

Rozwiązanie

Gdyby wszystkie trzy liczby pierwsze p , q , r były większe od 2, to liczba $pq+r$ jako liczba parzysta większa od 2 byłaby złożona. Zatem co najmniej jedna z liczb p , q , r jest równa 2, co na mocy nierówności $p \leq q \leq r$ daje $p=2$.

Ponadto $q > 2$, gdyż przy $q=2$ mielibyśmy $qr+p=2(r+1)$, co jest liczbą złożoną.

Gdyby obie liczby pierwsze q , r były większe od 3, to liczba qr byłaby niepodzielna przez 3, a zatem jedna z liczb $qr+2$, $qr+4$ byłaby podzielna przez 3 i większa od 3, czyli złożona. Stąd wynika, że jedna z liczb q , r jest równa 3, co na mocy nierówności $2 < q \leq r$ daje $q=3$.

Pozostało wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze $r \geq 3$, aby liczby

$$(1) \quad 6+r, \quad 6+r^2, \quad 3r+2, \quad 3r+4, \quad 2r+3, \quad 2r+9$$

były pierwsze.

Gdyby liczba pierwsza r była różna od 5, to przez 5 dzieliłaby się jedna z liczb $r+1$, $r+2$, $r+3$, $r+4$, a co za tym idzie, również jedna z liczb

$$\begin{aligned} 6+r &= (r+1)+5, & 2r+9 &= 2(r+2)+5, \\ 3r+4 &= 3(r+3)-5, & 2r+3 &= 2(r+4)-5. \end{aligned}$$

Zatem musi być $r=5$. Wtedy liczby (1) przyjmują odpowiednio wartości 11, 31, 17, 19, 13, 19 i wszystkie one są pierwsze.

Odp.: Warunki zadania spełnia jedna trójka $(p, q, r) = (2, 3, 5)$.

Zadanie 5. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle A = 90^\circ$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości

$$AD = BD \quad \text{oraz} \quad AB = CD.$$

Udowodnić, że $\sphericalangle ACD \geq 30^\circ$.

Rozwiązanie

Trójkąt BAC uzupełniamy do prostokąta $BACE$. Wówczas z równości $AD = BD$ wynika, że $CD = ED$. To w połączeniu z $AB = CD$ dowodzi, że trójkąt CDE jest równoboczny. Zatem

$$\sphericalangle ACD \geq \sphericalangle ACE - \sphericalangle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n , że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ zachodzi nierówność

$$(1) \quad x_1 x_2 \dots x_n + y_1 y_2 \dots y_n \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot \dots \cdot \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

Rozwiązanie

Dla $n = 1$ dana nierówność przybiera postać

$$x_1 + y_1 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

co nie dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, y_1 jest prawdą — wystarczy przyjąć $x_1 = y_1 = 1$.

Wykażemy, że nierówność (1) jest prawdziwa, jeśli $n \geq 2$.

Jeśli któryś z czynników stojących po prawej stronie nierówności (1), np.

$$\sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

jest równy 0, to obie liczby x_k i y_k muszą być zerami. Wtedy nierówność (1) jest spełniona.

Przyjmijmy więc, że liczba stojąca po prawej stronie nierówności (1) jest różna od 0, a zatem dodatnia. Wówczas dowodzoną nierówność możemy sprowadzić do postaci

$$(2) \quad \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} + \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \dots \cdot \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \leq 1.$$

Podstawmy:

$$a_k = \frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2}, \quad b_k = \frac{y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ należą do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ oraz $a_k + b_k = 1$. Stąd oraz z nierówności pomiędzy średnią geometryczną a średnią arytmetyczną uzyskujemy

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt{b_1 b_2 \dots b_n} &\leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \leq \\ &\leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 1, \end{aligned}$$

czyli

$$(3) \quad \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \dots \cdot \frac{|x_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} + \frac{|y_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \dots \cdot \frac{|y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \leq 1.$$

Lewa strona nierówności (2) jest nie większa niż lewa strona nierówności (3). To oznacza, że udowodniona właśnie nierówność (3) pociąga za sobą nierówność (2), a tym samym dowodzi nierówności (1).

(wp, jwr)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/