LIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2002 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x)=f(2x)=f(1-x)\,.$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości

$$\measuredangle ADB=2\measuredangle ACB \quad \text{oraz} \quad \measuredangle BDC=2\measuredangle BAC.$$

Udowodnić, że $AD=CD$.

3. W n-osobowym stowarzyszeniu działa sześć komisji. W skład każdej z nich wchodzi nie mniej niż $n/4$ osób. Dowieść, że istnieją dwie komisje oraz grupa licząca nie mniej niż $n/30$ osób, należących do obu tych komisji.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2002 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb pierwszych $p \leqslant q \leqslant r$, że liczby

$$pq+r, \quad pq+r^2, \quad qr+p, \quad qr+p^2, \quad rp+q, \quad rp+q^2$$

są pierwsze.

5. Trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości

$$AD = BD \quad \text{oraz} \quad AB = CD.$$

Udowodnić, że $\sphericalangle ACD \geqslant 30^\circ$.

6. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zachodzi nierówność

$$x_1x_2\ldots x_n + y_1y_2\ldots y_n \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{x_n^2+y_n^2}\,.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.