XLIX OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Do Pani/Pana Dyrektora Szkoły
Do Pani/Pana Profesora Matematyki

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej uprzejmie prosi o zapoznanie uczniów i nauczycieli zainteresowanych zadaniami Olimpiady z podanymi tu szkicami rozwiązań zadań konkursowych stopnia pierwszego XLIX Olimpiady Matematycznej.

W dalszej części niniejszego druku podajemy teksty zadań z zawodów międzynarodowych: XXXVIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej i XX Austriacko–Polskich Zawodów Matematycznych, a także z VIII Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (*Baltic Way* '97).

Zawody pierwszego stopnia XLIX Olimpiady Matematycznej są zakończone. Zawody stopnia drugiego odbędą się w dniach 27 i 28 lutego 1998 r.

Zawiadomienia o dokładnym terminie i miejscu zawodów stopnia drugiego wyślą komitety okręgowe zakwalifikowanym zawodnikom w terminie do dnia 10 lutego 1998 r.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Szkice rozwiązań zadań konkursowych zawodów pierwszego stopnia XLIX Olimpiady Matematycznej

1. Przypuśćmy, że liczby x,y spełniają podany układ równań. Z pierwszego równania wynika, że $x \neq 0$ oraz że iloraz $|x|:x$ nie może być równy -1; jest więc równy 1, co oznacza, że x jest liczbą dodatnią. Pierwsze równanie mówi zatem, że $|x-y|=0$. Podstawiając $y=x$ do drugiego równania (i pamiętając, że $x>0$) otrzymujemy zależność $2x-1+|2x-1|=0$, równoważną temu, że $2x-1 \leqslant 0$. Tak więc każde rozwiązanie (x,y) danego układu równań ma postać $0<x=y\leqslant 1/2$. Na odwrót, każda para (x,y) takiej postaci spełnia oba równania układu.

2. Oznaczmy przez M środek boku BC. Rozwiązanie zadania będzie oparte na równości $AH=2\cdot OM$ (która zachodzi w każdym trójkącie, niezależnie od założenia, że $AO=AH$). Oto jej dowód:

Można przyjąć, że $AB > AC$; kąt ABC jest więc ostry. Gdy kąt CAB jest prosty, wówczas $AH=OM=0$. Gdy kąt CAB jest ostry lub rozwarty, prowadzimy średnicę okręgu opisanego na trójkącie ABC. Odcinek OM łączy środki boków CX i CB trójkąta prostokątnego CBX, a zatem $2\cdot OM=BX$. Proste AX i HB są równoległe (każda z nich jest prostopadła do AC); także proste BX i HA są równoległe (jako prostopadłe do BC). Wobec tego czworokąt $AHBX$ jest równoległobokiem i $AH=BX=2\cdot OM$.

Jeśli teraz, zgodnie z treścią zadania, długość odcinka AH jest równa promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABC, to punkt M jest środkiem promienia prostopadłego do BC. Stąd wynika, że $\sphericalangle BOC=120^\circ$. Wniosek: kąt CAB, jako kąt wpisany oparty albo na krótszym albo na dłuższym łuku BC, ma miarę 60° lub 120°.

3. Wykażemy przez indukcję, że

$$2^{2^{n-1}}+1<a_n\leqslant 2^{2^n}. \tag{1}$$

Dla $n=1$ nierówności $3<a_1\leqslant 4$ są spełnione. Zakładając, że oszacowania (1) zachodzą dla pewnej liczby naturalnej n, otrzymujemy dla $n+1$ analogiczne oszacowania:

$$a_{n+1}=a_n(a_n-1)\begin{cases} < a_n^2 \leqslant \left(2^{2^n}\right)^2=2^{2^{n+1}} \\ > \left(2^{2^{n-1}}+1\right)\cdot 2^{2^{n-1}}=2^{2^n}+2^{2^{n-1}}>2^{2^n}+1. \end{cases}$$

Na podstawie zasady indukcji wnosimy o prawdziwości związków (1) dla wszystkich liczb naturalnych $n > 1$. Ze związków tych wynika oczywiście, że $2^{2^{n-1}}<a_n\leqslant 2^{2^n}$. Zastępując a_n przez 2^{b_n}, a następnie b_n przez 2^{n-c_n}, dostajemy kolejno nierówności: $2^{n-1}<b_n\leqslant 2^n$; następnie: $n-1<n-c_n\leqslant n$; i wreszcie: $0\leqslant c_n<1$. Ciąg (c_n) jest więc ograniczony.

4. Ustalmy liczbę rzeczywistą c. Podstawiając w podanej nierówności $y=tx$ i dzieląc stronami przez x^{a+1} otrzymujemy warunek równoważny

$$(1) \qquad ct^{a+1}-t^a \text{ ¿ } c-1 \quad \text{dla } t>0.$$

Mówiąc wyraźniej: rozważana w zadaniu nierówność zachodzi dla każdej pary liczb dodatnich x,y wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność (1) zachodzi dla każdej liczby dodatniej t.

Oznaczając lewą stronę (1) przez $f(t)$ stwierdzamy, że $f(1)=c-1$ oraz $f'(t)=c(a+1)t^a-at^{a-1}$. Jeżeli warunek (1) jest spełniony, to funkcja f ma w punkcie $t=1$ minimum, a więc $f'(1)=c(a+1)-a=0$, skąd $c=a/(a+1)$. Na odwrót, jeśli $c=a/(a+1)$, to

$$f'(t)=at^a-at^{a-1}=at^{a-1}(t-1)\begin{cases}>0 & \text{dla } t>1,\\ <0 & \text{dla } t<1;\end{cases}$$

a zatem najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $(0;\infty)$ jest $f(1)=c-1$, czyli spełniony jest warunek (1).

Wniosek: dla danej liczby dodatniej a jedynie liczba $c=a/(a+1)$ ma postulowaną własność.

5. Ponieważ $2\operatorname{ctg}2x=2\cdot\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x$, dane równanie jest równoważne następującemu:

$$(1) \qquad |\operatorname{tg}^n x-\operatorname{ctg}^n x| = n|\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x|.$$

Gdy $n=1$, równanie (1) jest spełnione tożsamościowo w zbiorze liczb, które nie są całkowitymi wielokrotnościami $\pi/2$.

Dalej rozważamy przypadek, gdy n ¿ 2. Równanie (1) jest oczywiście spełnione, gdy $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$, czyli dla liczb postaci $x=m\pi/4$, gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą nieparzystą. Wykażemy, że dla n ¿ 2 równanie (1) nie ma innych rozwiązań.

Przypuśćmy więc, że istnieje liczba x spełniająca równanie (1) i taka, że liczby $a=\operatorname{tg}x$, $b=\operatorname{ctg}x$ nie są równe; warunek $a\neq b$ jest równoważny temu, że $|a|\neq 1$. Dzieląc (1) stronami przez $|a-b|$ dostajemy związek

$$|a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}|=n.$$

Wszystkie składniki są jednocześnie dodatnie lub ujemne; moduł sumy jest więc równy sumie modułów. Uwzględniając zależność $b=1/a$ otrzymujemy:

$$(2) \qquad |a|^{n-1}+|a|^{n-3}+\ldots+|a|^{-n+3}+|a|^{-n+1}=n.$$

Dla każdej liczby dodatniej $t\neq 1$ prawdziwa jest nierówność $t+t^{-1}>2$ (równoważna, po prostym przekształceniu, nierówności $(t-1)^2>0$). Zatem dla każdej liczby całkowitej k mamy

$$|a|^k+|a|^{-k}\begin{cases}>2 & \text{gdy } k\neq 0,\\ =2 & \text{gdy } k=0.\end{cases}$$

Podstawiając za k kolejno liczby $n-1$, $n-3$, $\ldots$, $-n+3$, $-n+1$ i dodając stronami otrzymane n nierówności stwierdzamy, że podwojona wartość sumy napisanej po lewej stronie związku (2) jest większa od $2n$. (W tym miejscu ma znaczenie warunek, że $n > 2$.) Zatem równość (2) nie jest w rozważanym przypadku możliwa, co oznacza, że równanie (1) nie ma innych rozwiązań niż te, które zostały znalezione na początku.

6. Oznaczmy przez X punkt przecięcia odcinków BE i AD, a przez F punkt symetryczny do C względem A; prosta FB jest równoległa do AD. Przyjmijmy oznaczenia kątów:

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle EFB = \varphi, \qquad \sphericalangle DXB = \sphericalangle EBF = \psi.$$

Przy założeniu, że $AB > AC$ (podanym w poprawionej wersji zadania, rozesłanej w *Erratach*) punkt D leży między punktami A i P, i mamy oszacowanie: $\psi = \sphericalangle BXP < \sphericalangle BDP < 90^\circ$; wynika z niego, że $PQ = BE \cdot \cos\psi$.

Odcinek AD łączy środki boków trójkąta FCB; tak więc $BF = 2 \cdot AD$. Stąd oraz z twierdzenia sinusów dla trójkąta EFB otrzymujemy zależności:

$$\frac{AD}{PQ} = \frac{2\cdot AD}{2\cdot BE}\cdot\frac{BE}{PQ} = \frac{BF}{2\cdot BE}\cdot\frac{1}{\cos\psi} = \frac{\sin\sphericalangle BEF}{\sin\sphericalangle BFE}\cdot\frac{1}{2\cos\psi} =$$
$$= \frac{\sin(\varphi+\psi)}{2\sin\varphi\cos\psi} = \frac{1+\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{tg}\psi}{2}.$$

Zatem równość $AD = PQ$ jest równoważna temu, że $\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi$, czyli $\varphi = \psi$. Ta ostatnia równość jest zaś równoważna temu, że trójkąt BEF jest równoramienny: $BE = EF$. A skoro $EF = AE + AC$, dostajemy tezę zadania.

7. Funkcję f spełniającą podane warunki będziemy nazywać *dobrą*. Przypuśćmy, że liczby $k_1 < \ldots < k_m$ są wszystkimi wartościami przyjmowanymi przez dobrą funkcję f. Niech

$$l_i = \max\{j \in A\colon\ f(j) = k_i\} \quad \text{dla } i = 1,\ldots,m; \tag{1}$$

oczywiście $l_m = n$. Z określenia (1) oraz z warunków definiujących funkcje dobre wynika, że $f(k_i) = f(f(l_i)) = f(l_i) = k_i$ dla $i = 1,\ldots,m$, i wobec tego

$$0 < k_1 \leqslant l_1 < k_2 \leqslant l_2 < \ldots < k_{m-1} \leqslant l_{m-1} < k_m \leqslant n. \tag{2}$$

Na odwrót, jeżeli $(k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m)$ jest dowolnym ciągiem liczb naturalnych spełniającym warunki (2), to wzór

$$f(j) = \begin{cases} k_1 & \text{gdy } \quad 0 < j \leqslant l_1 \\ k_2 & \text{gdy } \quad l_1 < j \leqslant l_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ k_m & \text{gdy } \quad l_{m-1} < j \leqslant n \end{cases}$$

określa dobrą funkcję $f\colon A \to A$, której wartościami są liczby k_i, a warunek (1) wyznacza zadane liczby l_i (trzeba tylko przyjąć $l_m = n$). Dobrych funkcji f jest więc tyle, ile ciągów typu (2).

Każdemu ciągowi liczb naturalnych spełniającemu warunki (2) przyporządkujemy ciąg $(a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_{m-1},b_{m-1},a_m)$ o wyrazach

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_i &= k_i+i-1 && \text{dla } i=1,\ldots,m,\\ b_i &= l_i+i && \text{dla } i=1,\ldots,m-1. \end{aligned}$$

Z układu nierówności (2) wynika, że wówczas

$$(4)\qquad 0<a_1<b_1<a_2<b_2<\ldots<a_{m-1}<b_{m-1}<a_m<n+m.$$

Na odwrót, mając dany dowolny ciąg spełniający warunki (4) możemy odtworzyć ciąg $(k_1,l_1,k_2,l_2,\ldots,k_{m-1},l_{m-1},k_m)$ przyjmując

$$(5)\qquad \begin{aligned} k_i &= a_i-i+1 && \text{dla } i=1,\ldots,m,\\ l_i &= b_i-i && \text{dla } i=1,\ldots,m-1; \end{aligned}$$

nierówności (2) będą spełnione. Wzajemnie odwrotne układy równań (3) i (5) ustalają wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między ciągami typu (2) i ciągami typu (4).

Wniosek: dobrych funkcji $f\colon A\to A$ jest tyle, ile $(2m-1)$-wyrazowych ciągów liczb naturalnych spełniających warunki (4) — czyli tyle, ile $(2m-1)$-elementowych podzbiorów ma zbiór $\{1,2,\ldots,n+m-1\}$. Ta szukana liczba jest równa $\binom{n+m-1}{2m-1}$.

8. Niech k będzie liczbą krawędzi, a s — liczbą ścian wielościanu wypukłego W. Brzeg każdej ściany zawiera co najmniej trzy krawędzie, a każda krawędź jest wspólnym bokiem dokładnie dwóch ścian. Zatem $2k$ ¿ $3s$. Jeśli płaszczyzna nie przechodząca przez żaden wierzchołek przecina r krawędzi, to przekrój wielościanu tą płaszczyzną jest wielokątem wypukłym mającym r wierzchołków, a więc także r boków. Każdy jego bok jest zawarty w pewnej ścianie wielościanu W, i to każdy w innej. Wobec tego s ¿ r, i w konsekwencji $2k$ ¿ $3r$. Nie istnieje więc wielościan o rozważanej w zadaniu własności.

9. W myśl podanego określenia,

$$a_k = 1-\left(\tfrac{1}{10}\right)^{2^k}+\left(\tfrac{1}{10}\right)^{2^{k+1}} \qquad \text{dla } k=0,1,2,\ldots.$$

Oznaczmy liczbę $\frac{1}{10}$ przez β oraz przyjmijmy $\alpha=1+\beta+\beta^2=1{,}11$. Zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha\cdot a_0 &= (1+\beta^1+\beta^2)(1-\beta^1+\beta^2)=1+\beta^2+\beta^4,\\ \alpha\cdot a_0a_1 &= (1+\beta^2+\beta^4)(1-\beta^2+\beta^4)=1+\beta^4+\beta^8,\\ \alpha\cdot a_0a_1a_2 &= (1+\beta^4+\beta^8)(1-\beta^4+\beta^8)=1+\beta^8+\beta^{16}, \end{aligned}$$

i ogólnie (indukcja)

$$\alpha\cdot a_0a_1\ldots a_n = 1+\beta^{2^{n+1}}+\beta^{2^{n+2}} \qquad \text{dla } n=0,1,2,\ldots.$$

Gdy n dąży do nieskończoności, wartość otrzymanego wyrażenia dąży do 1. Zatem

$$\lim_{n\to\infty}(a_0 a_1 \ldots a_n) = \frac{1}{\alpha} = \frac{100}{111}.$$

10. Oznaczmy miary kątów CAB, ABC, BCA przez α, β, γ, a miary kątów FGE, DGF, EGD odpowiednio przez α', β', γ'. Na czworokątach $AFGE$ i $BDGF$ można opisać okręgi, więc $\alpha+\alpha'=180^\circ$ oraz $\beta+\beta'=180^\circ$. Zatem także $\gamma+\gamma'=180^\circ$ (bowiem $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $\alpha'+\beta'+\gamma'=360^\circ$); a to oznacza, że również na czworokącie $CEGD$ można opisać okrąg.

Z istnienia pierwszej wymienionej pary okręgów opisanych wynika ponadto, że $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AGE = \sphericalangle DGB = \sphericalangle DFB$. Odcinki FE i DF są odpowiednio równoległe do BC i CA; wobec tego $\sphericalangle AFE = \beta$, $\sphericalangle DFB = \alpha$, i otrzymujemy równość $\alpha = \beta$.

Wykorzystując istnienie okręgu opisanego na czworokącie $CEGD$ dowodzimy analogicznie, że $\beta = \gamma$. Trójkąt ABC jest więc równoboczny.

11. Niech A będzie tym uczestnikiem turnieju, który pokonał największą liczbę przeciwników. (Jeśli kilku zawodników odniosło jednakową maksymalną liczbę zwycięstw, wybieramy któregokolwiek z nich.) Twierdzimy, że wybrany w ten sposób gracz A pokonał bezpośrednio lub pośrednio wszystkich innych zawodników.

Niech B będzie dowolnym graczem, który wygrał z A. Należy wykazać, że wśród wszystkich graczy $C_1, \ldots, C_m$ pokonanych przez A istnieje taki, który wygrał z B. Gdyby to nie było prawdą, wynikałoby stąd, że zawodnik B pokonał graczy $C_1, \ldots, C_m$ oraz jeszcze gracza A — miałby więc na swoim koncie więcej zwycięstw niż zawodnik A, wbrew wyborowi tego ostatniego. Sprzeczność kończy dowód.

12. Niech $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7, \ldots$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych i niech W będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Ustalmy liczbę całkowitą a, dla której $W(a) \neq 0$, oraz ustalmy liczbę naturalną n.

Weźmy pod uwagę liczbę $c = W(a) \cdot p_1 p_2 \ldots p_n$. Znajdujemy liczbę naturalną m ¿ 2, dla której $W(a+mc) \neq W(a)$; liczba taka istnieje, bo wartość $W(a)$ jest przez wielomian W przyjmowana tylko w skończenie wielu punktach.

Dla danej liczby całkowitej $b \neq a$ różnica $W(b) - W(a)$ dzieli się przez $b - a$ (jeśli bowiem $W(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_l x^l$, to $W(b) - W(a)$ jest sumą składników $\alpha_j(b^j - a^j)$ dla $j = 1, \ldots, l$, a każdy z nich dzieli się przez $b - a$). W szczególności różnica $W(a+mc) - W(a)$ dzieli się przez mc. Zatem dla pewnej liczby całkowitej $q \neq 0$ zachodzi równość

$$W(a+mc) = W(a) + qmc = W(a)(1 + qmp_1p_2 \ldots p_n).$$

Skoro m ¿ 2, liczba w nawiasie ma moduł większy od 1. Liczba ta nie dzieli się przez $p_1, p_2, \ldots, p_n$; ma więc co najmniej jeden dzielnik pierwszy większy od p_n. Jest on także dzielnikiem liczby $W(a+mc)$ (która również ma moduł większy od 1). To znaczy, że $g(W(a+mc)) > p_n$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n zbiór liczb postaci $g(W(x))$ zawiera liczbę większą od p_n. Nie istnieje więc wielomian, dla którego zbiór ten byłby skończony.

(*mek*)

Zadania z XXXVIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

Mar del Plata (Argentyna), 24 – 25 lipca 1997 r.

1. Na płaszczyźnie punkty o współrzędnych całkowitych są wierzchołkami kwadratów jednostkowych. Kwadraty te pomalowano na przemian na czarno i biało (tak, jak na szachownicy).

Dla każdej pary liczb całkowitych dodatnich m i n rozważamy trójkąt prostokątny, którego wierzchołki mają współrzędne całkowite, a przyprostokątne długości m i n leżą na liniach wyznaczonych przez boki kwadratów. Niech S_1 będzie polem czarnej części trójkąta, a S_2 — polem części białej oraz niech $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

(a) Obliczyć $f(m,n)$ dla wszystkich liczb całkowitych m i n, które są albo obie parzyste, albo obie nieparzyste.

(b) Udowodnić, że $f(m,n)\, 6\, \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ dla wszystkich m i n.

(c) Wykazać, że nie istnieje taka stała C, że $f(m,n) < C$ dla wszystkich m i n.

2. Kąt A jest najmniejszym kątem trójkąta ABC. Punkty B i C dzielą okrąg opisany na trójkącie na dwa łuki. Niech U będzie punktem wewnętrznym tego łuku o końcach B i C, który nie zawiera punktu A. Symetralne odcinków AB i AC przecinają prostą AU odpowiednio w punktach V i W. Proste BV i CW przecinają się w punkcie T. Udowodnić, że $AU = TB + TC$.

3. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunki:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1 \quad \text{oraz} \quad |x_i|\, 6\, \frac{n+1}{2} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dowieść, że istnieje permutacja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dla której

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n|\, 6\, \frac{n+1}{2}.$$

4. Macierz $n \times n$ (tablicę kwadratową mającą n wierszy i n kolumn) o wyrazach ze zbioru $S = \{1,2,\ldots,2n-1\}$ będziemy nazywać macierzą *srebrzystą*, jeżeli dla każdego $i = 1,2,\ldots,n$ wiersz i-ty oraz i-ta kolumna zawierają łącznie wszystkie elementy zbioru S. Dowieść, że

(a) nie istnieje macierz srebrzysta dla $n = 1997$;

(b) istnieją macierze srebrzyste dla nieskończenie wielu wartości n.

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych a ¿ 1, b ¿ 1, które spełniają równanie $a^{b^2} = b^a$.

6. Dla liczby całkowitej dodatniej n niech $f(n)$ oznacza liczbę sposobów przedstawienia n w postaci sumy potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych nieujemnch. Nie rozróżniamy takich przedstawień, które różnią się jedynie porządkiem składników. Na przykład $f(4) = 4$, gdyż liczbę 4 można przedstawić na cztery sposoby: 4; 2+2; 2+1+1; 1+1+1+1. Udowodnić, że

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$$

dla każdej liczby całkowitej n ¿ 3.

Zadania z XX Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych

Salzburg (Austria), 25 – 27 czerwca 1997 r.

1. Proste l_1 i l_2 przecinają się w punkcie P. Okręgi S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie P i prosta l_1 jest ich wspólną styczną w tym punkcie. Podobnie, okręgi T_1 i T_2 są styczne zewnętrznie w punkcie P i prosta l_2 jest ich wspólną styczną w tym punkcie. Okręgi S_1 i T_1 przecinają się w punktach P i A. Podobnie, okręgi S_1 i T_2 przecinają się w punktach P i B, okręgi S_2 i T_2 w punktach P i C oraz okręgi S_2 i T_1 w punktach P i D. Udowodnić, że punkty A, B, C i D leżą na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy proste l_1 i l_2 są prostopadłe.

2. Dana jest szachownica mająca m kolumn i n wierszy. Każde pole ma współrzędne (x,y), gdzie x jest numerem kolumny (1 6 x 6 m), a y jest numerem wiersza (1 6 y 6 n). Niech p i q będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Pionek stojący na polu (x,y) może poruszyć się na pole (x',y') wtedy i tylko wtedy, gdy $|x - x'| = p$ i $|y - y'| = q$.

Na każdym polu stoi jeden pionek. Chcemy jednocześnie wykonać ruch wszystkimi pionkami tak, by znów na każdym polu stał tylko jeden pionek. Na ile sposobów można to zrobić?

3. Na tablicy napisano 97 liczb: 48, 24, 16, ..., 48/97, tzn. liczby wymierne $48/k$ dla $k=1,2,3,\ldots,97$. W każdym kroku wybieramy dowolnie dwie liczby a i b napisane na tablicy, usuwamy je i wpisujemy liczbę $2ab-a-b+1$. Po 96 krokach na tablicy pozostanie dokładnie jedna liczba. Wyznaczyć zbiór liczb, które mogą pozostać na tablicy.

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ boki AB i CD są równoległe. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkt F jest punktem przecięcia wysokości trójkąta EBC, a punkt G jest punktem przecięcia wysokości trójkąta EAD. Udowodnić, że środek odcinka GF leży na prostej przechodzącej przez punkt E i prostopadłej do AB.

5. Niech p_1, p_2, p_3, p_4 będą czterema różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnić, że nie istnieje wielomian trzeciego stopnia $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ o współczynnikach całkowitych taki, że

$$|Q(p_1)|=|Q(p_2)|=|Q(p_3)|=|Q(p_4)|=3.$$

6. Udowodnić, że nie istnieje funkcja $f\colon \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ spełniająca równanie $f(x+f(y))=f(x)-y$ dla wszystkich liczb całkowitych x, y.

Uwaga. **Z** jest zbiorem liczb całkowitych.

7. (a) Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych p, q zachodzi nierówność: $p^2+q^2+1>p(q+1)$.

(b) Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą b taką, że dla wszystkich liczb rzeczywistych p, q zachodzi nierówność: p^2+q^2+1 ¿ $bp(q+1)$.

(c) Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą c taką, że dla wszystkich liczb całkowitych p, q zachodzi nierówność: p^2+q^2+1 ¿ $cp(q+1)$.

8. Niech n będzie liczbą naturalną i niech M będzie zbiorem n-elementowym. Wyznaczyć największą liczbę naturalną k o następującej własności:

Istnieje k-elementowa rodzina $\mathcal{K}$ trójelementowych podzbiorów zbioru M taka, że każde dwa zbiory należące do $\mathcal{K}$ mają niepuste przecięcie.

9. Dany jest równoległościan P. Niech V_P będzie jego objętością, S_P polem jego powierzchni i L_P sumą długości jego krawędzi. Dla liczby rzeczywistej t ¿ 0 niech P_t będzie bryłą złożoną ze wszystkich punktów X, których odległość od P jest nie większa niż t. Udowodnić, że objętość bryły P_t wyraża się wzorem:

$$V(P_t)=V_P+S_P\cdot t+(\pi/4)\cdot L_P\cdot t^2+(4/3)\cdot\pi\cdot t^3.$$

Wyjaśnienie: Odległość punktu X od równoległościanu P jest nie większa niż t, jeśli istnieje punkt Y należący do równoległościanu P taki, że $|XY|$ 6 t.

Zadania z VIII Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich
Baltic Way '97

Kopenhaga (Dania), 9 listopada 1997 r.

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje f ze zbioru liczb rzeczywistych do zbioru liczb rzeczywistych, różne od funkcji zerowej i takie, że $f(x)f(y)=f(x-y)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y.

2. Dany jest ciąg $a_1,a_2,a_3,\ldots$ liczb całkowitych dodatnich, w którym każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie raz. Dowieść, że istnieją liczby całkowite ℓ i m, $1<\ell<m$, takie, że $a_1+a_m=2a_\ell$.

3. Niech $x_1=1$ oraz $x_{n+1}=x_n+\left[\frac{x_n}{n}\right]+2$ dla $n=1,2,3,\ldots$ ($[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x). Wyznaczyć x_{1997}.

4. Niech a będzie średnią arytmetyczną liczb $x_1,\ldots,x_n$. Udowodnić nierówność

$$(x_1-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2\ 6\ \tfrac{1}{2}(|x_1-a|+\ldots+|x_n-a|)^2.$$

5. Dany jest ciąg $u_0,u_1,\ldots$ liczb całkowitych dodatnich o dowolnym wyrazie początkowym u_0. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n:

$$u_{n+1}=\begin{cases} u_n/2 & \text{gdy liczba } u_n \text{ jest parzysta,}\\ a+u_n & \text{gdy liczba } u_n \text{ jest nieparzysta;}\end{cases}$$

a jest ustaloną dodatnią liczbą całkowitą nieparzystą. Dowieść, że ciąg ten od pewnego miejsca jest okresowy.

6. Znaleźć wszystkie trójki (a,b,c) liczb całkowitych nieujemnych takie, że a ¿ b ¿ c oraz $1\cdot a^3+9\cdot b^2+9\cdot c+7=1997$.

7. Niech P i Q będą wielomianami o współczynnikach całkowitych. Przypuśćmy, że liczby całkowite a i $a+1997$ są pierwiastkami wielomianu P oraz że $Q(1998)=2000$. Dowieść, że równanie $Q(P(x))=1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

8. Gdy dodajemy liczby 1996 i 1997, to najpierw dodajemy cyfry jedności 6 i 7. Otrzymujemy 13, zapisujemy 3 i „przenosimy” 1 do następnej kolumny. W ten sposób wykonujemy *przeniesienie*. Kontynuując, wykonamy łącznie trzy przeniesienia:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 1996 \\ +\,1997 \\ \hline 3993 \end{array}$$

Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia k, że przy dodawaniu $1996\cdot k$ do $1997\cdot k$ nie będzie ani jednego przeniesienia?

9. Na Sferze Światów światy są ponumerowane 1,2,3,... i połączone tak, że dla każdej liczby naturalnej n ¿ 1 czarodziej Gandalf może poruszać się w obu kierunkach pomiędzy światami o numerach n, $2n$ i $3n+1$. Czy zaczynając od dowolnego świata Gandalf może dotrzeć do każdego innego świata?

10. Dowieść, że w dowolnym ciągu 79 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, zapisanych w systemie dziesiętnym, istnieje liczba całkowita dodatnia, której suma cyfr jest podzielna przez 13.

11. Na dwóch równoległych prostych wybrano odpowiednio różne punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots$ oraz $B_1, B_2, B_3, \ldots$ w taki sposób, że $|A_iA_{i+1}|=1$ oraz $|B_iB_{i+1}|=2$ dla $i=1,2,3,\ldots$, przy czym wektory $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ i $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ są jednakowo skierowane. Wiedząc, że $\sphericalangle A_1A_2B_1=\alpha$, obliczyć wartość nieskończonej sumy

$$\sphericalangle A_1B_1A_2+\sphericalangle A_2B_2A_3+\sphericalangle A_3B_3A_4+\ldots.$$

12. Dwa okręgi $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ przecinają się w punktach P i Q. Prosta przechodząca przez P przecina ponownie $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ odpowiednio w punktach A i B. Punkt X jest środkiem odcinka AB. Prosta przechodząca przez Q i X przecina ponownie $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ odpowiednio w punktach Y i Z. Udowodnić, że X jest środkiem odcinka YZ.

13. Pięć różnych punktów A, B, C, D i E leży na prostej, przy czym $|AB|=|BC|=|CD|=|DE|$. Punkt F nie leży na tej prostej. Punkt G jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADF, zaś H jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BEF. Dowieść, że proste GH i FC są prostopadłe.

14. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC|^2$ jest średnią arytmetyczną liczb $|BC|^2$ i $|AB|^2$. Udowodnić, że $\mathrm{ctg}^2 B$ ¿ $\mathrm{ctg}\, A \cdot \mathrm{ctg}\, C$.

15. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczne kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ przecinają okrąg opisany odpowiednio w punktach A_1, B_1 i C_1. Niech M będzie punktem przecięcia prostych AB i B_1C_1, a N punktem przecięcia prostych BC i A_1B_1. Dowieść, że MN przechodzi przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

16. Dwaj gracze grają na szachownicy 5×5 w następującą grę. Pierwszy gracz stawia skoczka na wybranym polu. Następnie gracze na przemian (zaczynając od gracza drugiego) przesuwają skoczka według reguł szachowych. Nie wolno przesunąć skoczka na pole, na którym już był. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Który z dwóch graczy ma strategię wygrywającą?

17. Prostokąt można podzielić na n równych kwadratów. Ten sam prostokąt można również podzielić na $n+76$ równych kwadratów. Wyznaczyć n.

18. (a) Udowodnić, że istnieją dwa nieskończone zbiory liczb całkowitych nieujemnych A i B (niekoniecznie rozłączne) takie, że każdą liczbę całkowitą nieujemną n można jednoznacznie przedstawić w postaci $n=a+b$, gdzie $a \in A$, $b \in B$.

(a) Udowodnić, że dla każdej takiej pary (A,B) zbiór A lub zbiór B zawiera tylko wielokrotności pewnej liczby całkowitej $k>1$.

19. W puszczy każde z n zwierząt (n ¿ 3) mieszka w swojej grocie. Przed wyborami Króla Puszczy niektóre zwierzęta organizują kampanię wyborczą. Każde zwierzę organizujące kampanię odwiedza każdą z pozostałych grot dokładnie raz. Porusza się tylko po ścieżkach prowadzących od groty do groty; nie przechodzi przy tym z jednej ścieżki na inną pomiędzy grotami i wraca do swojej własnej groty na końcu kampanii. Przez żadną ścieżkę łączącą dwie groty nie przechodzi więcej niż jedno zwierzę organizujące kampanię.

(a) Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej n maksymalna możliwa liczba zwierząt organizujących kampanię równa się $(n-1)/2$.

(b) Wyznaczyć maksymalną liczbę zwierząt organizujących kampanię dla $n=9$.

20. W rzędzie leży dwanaście kart. Karty są trzech rodzajów: mają obie strony białe, obie strony czarne lub jedną stronę białą i jedną czarną. Początkowo dziewięć z tych kart leży czarną stroną do góry. Następnie odwracamy karty $1-6$, po czym cztery karty leżą czarną stroną do góry. Potem odwracamy karty $4-9$, w rezultacie czego sześć kart leży czarną stroną do góry. W końcu odwracamy karty $1-3$ i $10-12$, po czym pięć kart leży czarną stroną do góry. Ile jest kart każdego rodzaju?