XLIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (okres od 11 września do 10 października 1997 r.)

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} |x-y| - \dfrac{|x|}{x} = -1 \\ |2x-y| + |x+y-1| + |x-y| + y - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Proste zawierające wysokości trójkąta ABC, wpisanego w okrąg o środku O, przecinają się w punkcie H, przy czym $AO = AH$. Obliczyć miarę kąta CAB.

3. Ciągi (a_n), (b_n), (c_n) są określone przez warunki: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n(a_n - 1)$, $2^{b_n} = a_n$, $2^{n-c_n} = b_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że ciąg (c_n) jest ograniczony.

4. Dana jest liczba dodatnia a. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c mające następującą własność: dla każdej pary liczb dodatnich x, y spełniona jest nierówność

$$(c-1)x^{a+1} \leqslant (cy - x)y^a.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 października 1997 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

II seria (okres od 11 października do 10 listopada 1997 r.)

5. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Rozwiązać równanie

$$|\operatorname{tg}^n x - \operatorname{ctg}^n x| = 2n|\operatorname{ctg} 2x|.$$

6. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC, punkt E leży na boku AC. Punkty P i Q są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B i E na prostą AD. Udowodnić, że $BE = AE + AC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AD = PQ$.

7. Dane są liczby naturalne $m, n \geqslant 1$. Niech $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon A \to A$ przyjmujących dokładnie m wartości oraz spełniających warunek

$$\text{jeżeli } \ k, \ell \in A, \ k \leqslant \ell, \ \text{ to } \ f(f(k)) = f(k) \leqslant f(\ell).$$

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielościan wypukły mający k krawędzi oraz płaszczyzna nie przechodząca przez żaden z jego wierzchołków i przecinająca r krawędzi, przy czym $3r > 2k$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 listopada 1997 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

III seria (okres od 11 listopada do 10 grudnia 1997 r.)

9. Niech $a_0 = 0{,}91$ oraz $a_k = 0{,}\underbrace{99\ldots9}_{2^k}\underbrace{00\ldots0}_{2^k-1}1$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0 a_1 \ldots a_n)$.

10. Środkowe AD, BE, CF, trójkąta ABC przecinają się w punkcie G. Na czworokątach $AFGE$ i $BDGF$ można opisać okręgi. Wykazać, że trójkąt ABC jest równoboczny.

11. W turnieju tenisowym uczestniczyło n graczy. Każdy rozegrał z każdym innym jeden mecz; nie było remisów. Udowodnić, że istnieje taki gracz A, który każdego innego gracza B pokonał bezpośrednio lub pośrednio, tzn. A wygrał z B lub A pokonał pewnego zawodnika C, który wygrał z B.

12. Niech $g(k)$ będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby całkowitej k, gdy $|k| \geqslant 2$, oraz niech $g(-1) = g(0) = g(1) = 1$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian W stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych, dla którego zbiór liczb postaci $g\big(W(x)\big)$ (x — całkowite) jest skończony.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 grudnia 1997 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.