XLIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

Zadania na dzień 27 lutego 1998 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Niech $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Rozstrzygnąć, czy dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ istnieją funkcje $f\colon A_n \to A_n$, $g\colon A_n \to A_n$, spełniające warunki:
$f(f(k)) = g(g(k)) = k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$;
$g(f(k)) = k + 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n{-}1$.

2. W trójkącie ABC kąt BCA jest rozwarty oraz $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC$. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do BC przecina prostą AC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMD$.

3. (a) Liczby nieujemne a, b, c, d, e, f, których suma jest równa 1, spełniają zależność

$$ace + bdf \geq \frac{1}{108}\,.$$

Udowodnić, że

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab \leq \frac{1}{36}\,.$$

(b) Rozstrzygnąć, czy istnieje sześć różnych liczb dodatnich a, b, c, d, e, f o sumie równej 1, dla których obie napisane wyżej nierówności stają się równościami.

Zadania na dzień 28 lutego 1998 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych x, y spełniające równanie
$x^2 + 3y^2 = 1998x$.

5. Liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots, a_7$, $b_1, b_2, \ldots, b_7$ spełniają warunek

$$a_i + b_i \leq 2 \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, 7.$$

Wykazać, że dla pewnych dwóch różnych liczb $k, m \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ zachodzi nierówność $|a_k - a_m| + |b_k - b_m| \leq 1$.

6. Dany jest czworościan $ABCD$. Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w przestrzeni taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.