XLIX Olimpiada Matematyczna
Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

Zadania na dzień 24 kwietnia 1998 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Znaleźć wszystkie układy liczb całkowitych (a, b, c, x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + b + c = xyz \\ x + y + z = abc \end{cases}$$

oraz warunki $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 1$, $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$.

2. Ciąg Fibonacciego (F_n) jest dany wzorami:

$$F_0 = F_1 = 1\,, \qquad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Wyznaczyć wszystkie pary (k, m) liczb całkowitych $m > k \geqslant 0$, dla których w ciągu (x_n) określonym wzorami

$$x_0 = \frac{F_k}{F_m}\,, \qquad x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{2x_n - 1}{1 - x_n} & \text{gdy } x_n \neq 1, \\ 1 & \text{gdy } x_n = 1 \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

występuje liczba 1.

3. Pięciokąt wypukły $ABCDE$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDES$. Płaszczyzna przecina krawędzie SA, SB, SC, SD, SE odpowiednio w punktach A', B', C', D', E' (różnych od wierzchołków ostrosłupa). Udowodnić, że punkty przecięcia przekątnych czworokątów $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EAA'E'$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Zadania na dzień 25 kwietnia 1998 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Dowieść, że w ciągu (a_n) określonym wzorami

$$a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{[n/2]} \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 7.
Uwaga: $[n/2]$ jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $n/2$.

5. Punkty D i E leżą na boku AB trójkąta ABC i spełniają warunek

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2 .$$

Udowodnić, że $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$.

6. Rozważamy na płaszczyźnie kwadraty jednostkowe, których wierzchołki mają obie współrzędne całkowite. Niech S będzie szachownicą, której polami są wszystkie kwadraty jednostkowe zawarte w kole określonym nierównością $x^2 + y^2 \leqslant 1998^2$. Na wszystkich polach szachownicy piszemy liczbę $+1$. Wykonujemy ciąg operacji. Każda z nich polega na wybraniu dowolnego rzędu poziomego, pionowego lub ukośnego i zmianie znaków wszystkich liczb napisanych na polach wybranego rzędu. (Rząd ukośny tworzą wszystkie pola szachownicy S, których środki leżą na pewnej prostej przecinającej osie układu współrzędnych pod kątem 45°.)

Rozstrzygnąć, czy w ten sposób można doprowadzić do sytuacji, w której na jednym polu będzie napisana liczba -1, a na pozostałych $+1$.