XLVIII Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów trzeciego stopnia

1. Oznaczmy: $a = x_1 + x_2$, $b = x_3$, $c = x_2 + x_3$. Wówczas $x_2 = c - b$, $x_1 = a - x_2 = a + b - c$. Są to z założenia liczby dodatnie. Tak więc

$$(1) \qquad 0 < b < c < a + b\,.$$

Dalej, $x_4 = ab$, $x_5 = abc$, $x_6 = abc(ab + b) = a(a + 1)b^2c$. Z nierówności (1) wynika, że $a > 1$. Jedynymi dzielnikami liczby 144 mającymi postać $a(a + 1)$ (gdzie $a > 1$) są liczby 6, 12, 72, odpowiadające wartościom $a = 2$, $a = 3$, $a = 8$. Iloczyn b^2c powinien mieć — odpowiednio — wartość: 24, 12, 2. Pierwsza możliwość prowadzi do sprzeczności z warunkiem (1). Druga i trzecia możliwość daje (w połączeniu z warunkiem (1)) rozwiązania $(a, b, c) = (3, 2, 3)$ oraz $(a, b, c) = (8, 1, 2)$. W każdym przypadku $x_7 = x_6(x_5 + x_4) = 144\,ab(c + 1) = 144 \cdot 24 = 3456$.

* * * * *

2. Przypuśćmy, że liczby x, y, z spełniają dany układ; z drugiego równania wynika, że

$$(1) \qquad xyz(x + y + z) \geqslant 0\,.$$

Dalej mamy

$$(2) \qquad 0 \leqslant (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2\,,$$

co na mocy pierwszego równania układu daje:

$$(3) \qquad (x + y + z)^2 \leqslant 1\,.$$

Zachodzi też nierówność

$$\begin{aligned} 0 \;\leqslant\; & (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 = \\ & = \; 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z)\,, \end{aligned}$$

czyli

$$(4) \qquad xyz(x + y + z) \leqslant x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\,.$$

Dzięki własności (1) możemy pomnożyć nierówności (3) i (4) stronami:

$$(5) \qquad xyz(x + y + z)^3 \leqslant x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\,.$$

Zgodnie z drugim równaniem układu, nierówność (5) ma być równością. To znaczy, że albo obie mnożone nierówności (3) i (4) są równościami, albo wyrażenia po obu stronach (4) są równe zeru. W pierwszym przypadku znak równości w związkach (2) i (3) prowadzi do wniosku, że $x = y = z = \pm 1/3$. W drugim przypadku iloczyny xy, yz, zx są równe zeru, czyli pewne dwie spośród liczb x, y, z są równe zeru; trzecia musi być równa $\pm 1/\sqrt{3}$, zgodnie z pierwszym równaniem układu. Daje to osiem trójek (x, y, z) spełniających dany układ równań:

$$(\varepsilon \cdot \tfrac{1}{3}, \varepsilon \cdot \tfrac{1}{3}, \varepsilon \cdot \tfrac{1}{3}), \quad (\varepsilon \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0), \quad (0, \varepsilon \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0), \quad (0, 0, \varepsilon \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}),$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$.

* * * * *

3. Udowodnimy nierówność

$$\text{(1)} \qquad \text{pole}\,(ABD) < \text{pole}\,(BCD) + \text{pole}\,(CAD)$$

(pozostałe dwie nierówności dostaniemy analogicznie). Oznaczmy przez K, L, M odpowiednio środki krawędzi BC, CA, AB. Odcinki DK, DL, DM tworzą równe kąty odpowiednio z krawędziami BC, CA, AB; oznaczmy ten wspólny kąt przez α. Niech DH będzie wysokością trójkąta ABD. Mamy:

$$\text{(2)} \quad \text{pole}\,(ABD) = \tfrac{1}{2} AB \cdot DH = \tfrac{1}{2} AB \cdot DM \cdot \sin\alpha = KL \cdot DM \cdot \sin\alpha\,.$$

Analogicznie:

$$\text{(3)} \quad \text{pole}\,(BCD) = LM \cdot DK \cdot \sin\alpha \quad \text{oraz} \quad \text{pole}\,(CAD) = MK \cdot DL \cdot \sin\alpha\,.$$

Ponieważ $\sin\alpha \neq 0$, więc wykorzystując równości (2) i (3) możemy zapisać nierówność (1) w następującej równoważnej postaci:

$$\text{(4)} \qquad KL \cdot DM < LM \cdot DK + MK \cdot DL\,.$$

Rozważmy czworościan $KLMD$. Niech N będzie takim punktem płaszczyzny KLM, że $KN = KD$, $LN = LD$ oraz punkty M i N leżą po przeciwnych stronach prostej KL. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostej KL z odcinkiem MN. Ponieważ trójkąty KLD i KLN są przystające, więc $DP = NP$. Dla czworokąta $MKNL$ zachodzi nierówność Ptolemeusza:

$$KL \cdot NM \leqslant LM \cdot NK + MK \cdot NL\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} KL \cdot DM \; &< \; KL \cdot (DP + PM) = KL \cdot (NP + PM) = KL \cdot NM \leqslant \\ &\leqslant LM \cdot NK + MK \cdot NL = LM \cdot DK + MK \cdot DL\,, \end{aligned}$$

czyli nierówność (4), która jest równoważna nierówności (1).

(*mek, wp*)

XLVIII Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów trzeciego stopnia

4. Każdej liczbie całkowitej $n \geqslant 1$ przyporządkowujemy skończony ciąg symboli dwóch rodzajów: kropek i przecinków. Zapisujemy liczbę n w systemie dwójkowym. Pomiędzy każde dwie kolejne cyfry wstawiamy kropkę, gdy te cyfry są jednakowe, a przecinek, gdy są różne. Jeżeli n spełnia nierówność $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, czyli jest (w systemie dwójkowym) liczbą $(k+1)$-cyfrową, to wstawione w opisany sposób kropki i przecinki tworzą ciąg k-wyrazowy. Będziemy go nazywali *kodem„* liczby n. Każdy taki ciąg kropek i przecinków jest kodem dokładnie jednej liczby n: na początku ma ona jedynkę, a dalsze cyfry są wyznaczone przez kolejne symbole kodu. Kod k-wyrazowy wyznacza liczbę $(k+1)$-cyfrową.

Oznaczmy przez b_n liczbę kropek, a przez c_n liczbę przecinków w kodzie liczby n i przyjmijmy $d_n = b_n - c_n$.

Niech n będzie dowolną liczbą $(k+1)$-cyfrową $(k \geqslant 1)$. Skreślając jej ostatnią cyfrę otrzymujemy zapis dwójkowy liczby $[n/2]$. Jeśli ostatnie dwie cyfry liczby n są równe, to $b_n = b_{[n/2]} + 1$, $c_n = c_{[n/2]}$. Jeśli ostatnie dwie cyfry liczby n są różne, to $b_n = b_{[n/2]}$, $c_n = c_{[n/2]} + 1$. Pierwsza z tych sytuacji ma miejsce, gdy $n \equiv 0$ lub $n \equiv 3 \pmod 4$, druga — gdy $n \equiv 1$ lub $n \equiv 2 \pmod 4$. Różnica $d_n - d_{[n/2]}$ wynosi 1 w pierwszym przypadku, zaś -1 w drugim przypadku.

Dokładnie takie same wartości przybiera różnica $a_n - a_{[n/2]}$. Dla $n = 1$ mamy $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$. Stąd wniosek, że $a_n = d_n$, czyli $a_n = b_n - c_n$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zatem dla $(k+1)$-cyfrowej liczby n równość $a_n = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w jej k-wyrazowym kodzie jest tyle samo symboli każdego rodzaju. Liczba takich k-wyrazowych ciągów wynosi $\binom{k}{k/2}$, gdy k jest liczbą parzystą, oraz 0, gdy k jest liczbą nieparzystą. Tyle jest więc numerów n spełniających zadane warunki.

* * * * *

5. Na przedłużeniu odcinka BC odkładamy odcinek $CP = AE$. Z warunków zadania wynika, że trójkąty prostokątne PCD i AED są przystające. Stąd $AD = DP$ oraz

$$\sphericalangle ADP = \sphericalangle PDC + \sphericalangle ADC = \sphericalangle ADE + \sphericalangle ADC = \sphericalangle EDC\,.$$

Ponieważ również $ED = DC$, więc trójkąty ADP i EDC są podobne. Oznaczając przez Q punkt przecięcia prostych AP i EC dostajemy równość

$$\sphericalangle DEQ = \sphericalangle DEC = \sphericalangle DAP = \sphericalangle DAQ\,,$$

która dowodzi, że punkty A, Q, D, E leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle AQE\,. \tag{1}$$

Ze związków

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{BC} = \frac{PC}{BC}$$

wynika, że proste AP i FC są równoległe. Stąd $\sphericalangle AQE = \sphericalangle FCE$, co w połączeniu ze wzorem (1) daje pierwszą równość tezy. Druga jest analogiczna.

*   *   *   *   *

6. Odcinek o końcach w rozważanym zbiorze będziemy nazywać *długim*, jeśli jego długość jest większa niż $\sqrt{2}$, a *krótkim* w przeciwnym przypadku. Tak więc q jest liczbą długich odcinków. W dany okrąg wpisujemy kwadrat $ABCD$ tak, by żaden z danych n punktów nie był jego wierzchołkiem. Przyjmijmy, że na łukach AB, BC, CD, DA leży odpowiednio a punktów, b punktów, c punktów, d punktów. Weźmy pod uwagę zbiór wszystkich czworokątów mających wierzchołki w danych punktach, po jednym na każdym z czterech łuków. Jest $abcd$ takich czworokątów. Każdy czworokąt wpisany w dany okrąg ma co najmniej jeden bok krótki.

Przyporządkujmy każdemu czworokątowi (z rozważanego zbioru) jeden z jego krótkich boków i pomalujmy ten wybrany bok na zielono. Ustalony zielony odcinek mający końce na łukach AB i BC mógł zostać przyporządkowany co najwyżej $c \cdot d$ czworokątom, a więc co najwyżej m czworokątom, gdzie m jest największą z liczb ab, bc, cd, da. Tak samo da się oszacować liczbę czworokątów, którym został przyporządkowany dowolnie ustalony zielony odcinek (o końcach w którychkolwiek dwóch sąsiednich łukach). Stąd wniosek, że łączna liczba zielonych odcinków jest nie mniejsza niż $(abcd)/m$.

Wszystkie zielone odcinki są krótkie. Oczywiście takie wszystkie odcinki mające oba końce w jednym łuku są krótkie. Zatem liczba krótkich odcinków, równa $\binom{n}{2} - q$, spełnia oszacowanie:

$$\binom{n}{2} - q \geqslant \tfrac{abcd}{m} + \binom{a}{2} + \binom{b}{2} + \binom{c}{2} + \binom{d}{2}\,.$$

Można przyjąć (przesuwając w razie potrzeby oznaczenia), że $m = ab$. Otrzymana nierówność przybiera po przekształceniu postać:

$$\begin{aligned} q &\leqslant \tfrac{1}{2}(n(n-1) - a(a-1) - b(b-1) - c(c-1) - d(d-1)) - cd = \\ &= \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) - cd \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy z tego, że $a+b+c+d = n$). A zatem

$$\begin{aligned} n^2 - 3q &\geqslant -\tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) + 3cd = \\ &= (\tfrac{1}{2}(a+b) - (c+d))^2 + \tfrac{3}{4}(a-b)^2 \geqslant 0\,. \end{aligned}$$

(*mek, wp*)