XLVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria.

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x \cdot |x| + y \cdot |y| = 1 \\ [x] + [y] = 1 \end{cases}$$

Uwaga. $[t]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od t.

2. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$. Wykazać, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \geqslant 1$, $c \geqslant 0$ oraz dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność $(ab+c)^n - c \leqslant ((b+c)^n - c)a^n$.

4. Udowodnić, że liczba naturalna $n \geqslant 2$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $a, b, x, y \geqslant 1$ spełniające warunki: $a + b = n$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

II seria.

5. Dwusieczne kątów wewnętrznych A, B, C trójkąta ABC przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach D, E, F, a okrąg opisany na trójkącie ABC — odpowiednio w punktach K, L, M. Dowieść, że

$$\frac{AD}{DK} + \frac{BE}{EL} + \frac{CF}{FM} \geqslant 9.$$

6. Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunek

$$P(k) = \frac{1}{k} \qquad \text{dla} \qquad k = 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n.$$

Obliczyć $P(0)$.

7. Obliczyć kres górny objętości czworościanów zawartych w kuli o danym promieniu R, których jedną z krawędzi jest średnica tej kuli.

8. Niech a_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 6n\}$, których suma elementów daje przy dzieleniu przez 6 resztę 5 oraz niech b_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 7n\}$, których iloczyn elementów daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5. Obliczyć iloraz a_n/b_n.

III seria.

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \langle 1; \infty) \to \langle 1; \infty)$ spełniające następujące warunki:

(i) $f(x+1) = \dfrac{(f(x))^2 - 1}{x}$ dla $x \geqslant 1$;

(ii) funkcja $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ jest ograniczona.

10. Punkty P, Q leżą wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ$ oraz $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BAQ$. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Dowieść, że kąt DEF jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy punkt Q jest punktem przecięcia wysokości trójkąta BDF.

11. Dana jest liczba naturalna $m \geqslant 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x) + 5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.

12. Grupa złożona z n osób stwierdziła, że codziennie przez pewien okres czasu trzy z nich mogą wspólnie zjeść obiad w restauracji, przy czym każde dwie z nich spotkają się na dokładnie jednym obiedzie. Dowieść, że liczba n przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 lub 3.