WYBRANE OSIĄGNIĘCIA NAUKOWE

Uogólniona Hipoteza Jakobianowa

The Jacobian Conjecture fails for pseudo-planes (with A. Dubouloz),
Adv. Math. 339 (2018), 248-284

Uogólniona Hipoteza Jakobianowa dla rozmaitości X mówi, że każdy endomorfizm X, który jest lokalnie nakryciem, jest (globalnym) nakryciem. Wiadomo, że dla przytłaczającej większości powierzchni ta hipoteza jest spełniona, a trudności rosną tym bardziej, im bardziej powierzchnia jest podobna do płaszczyzny. Dla płaszczyzny jest to słynny problem otwarty atakowany bez powodzenia przez dziesiątki matematyków. Dla powierzchni Q-acyklicznych hipoteza była rozstrzygnięta przy założeniu, że grupa podstawowa jest nieskończona. W przypadku skończonej grupy podstawowej długo oczekiwano, że hipoteza zachodzi. Tymczasem używając wielomianów Belyi-Shabata skonstruowaliśmy dowolnie wysokowymiarowe rodziny kontrprzykładów ustalonego stopnia, w tym niektóre C*-niezmienniczne dla nietrywialnych działań C*. Jako wniosek podaliśmy konstrukcję pierwszych wymiernych i jednospójnych kontrprzykładów na Uogólnioną Hipotezę Jakobianową. Co więcej, kontrprzykłady mają ujemny logarytmiczny wymiar Kodairy, tak jak płaszczyzna.

Hipoteza Coolidge'a-Nagaty

The Coolidge-Nagata conjecture, part I,
Adv. Math. 267 (2014), 1-43
The Coolidge-Nagata conjecture (with M. Koras),
Duke Math. J. 166 (2017), No. 16, 3085-3145

Hipoteza Coolidge'a-Nagaty z lat 50. przewiduje, że każda krzywa płaska rzutowa o topologii linii jest Cremona-równoważna z linią. Zaproponowałem metodę dowodu i wykazałem hipotezę w przypadku, gdy krzywa ma więcej niż dwa punkty osobliwe. Pozostałe, trudne przypadki rozwiązaliśmy razem z M. Korasem. Dowód jest niekonstruktywny (dotąd nie ma klasyfikacji) i zajmuje ponad 100 stron. Wymaga zaawansowanych kombinacji technik geometrii afinicznej i biwymiernej. Prace zostały nagrodzone nagrodą im. W. Sierpińskiego przez Wydział Nauk Ścisłych i Nauk o Ziemi PAN.

Teoria modeli niemal minimalnych i jej zastosowania

Classification of planar rational cuspidal curves. I. C**-fibrations (with T. Pełka),
Proc. Lond. Math. Soc. 115 (2017), No. 3, 638-692
Cuspidal curves, minimal models and Zaidenberg's finiteness conjecture
J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal) 747 (2019), 147-174
Classification of planar rational cuspidal curves. II. Log del Pezzo models (with T. Pełka),
Proc. Lond. Math. Soc. 120 (2019), No. 5, 642-703
Complex planar curves homeomorphic to a line have at most four singular points (with M. Koras),
J. Math. Pures Appl. 158 (2022), 144-182

Miyanishi, Tsunoda, Fujita i Sakai stworzyli dla otwartych powierzchni algebraicznych w latach 80. efektywną modyfikację teorii modeli minimalnych – tzw. teorię modeli niemal minimalnych, która pozwala omijać osobliwości w procesie minimalizacji. Uogólniłem tę teorię na przypadek współczynników pół-całkowitych. Technika okazała się bardzo skutecznym narzędziem badania otwartych powierzchni wymiernych, szczególnie tych log ogólnego typu, dla których nie ma twierdzeń strukturalnych. Jako wniosek udowodniłem Hipotezę Zaidenberga o skończoności z roku 1994 dotyczącą krzywych płaskich homeomorficznych z linią rzutową. Sformułowałem też Hipotezę o Ujemności i razem z T. Pełką w pełni opisaliśmy takie krzywe przy założeniu, że hipoteza zachodzi. Liczne egzotyczne konstrukcje z literatury uzyskały w tych pracach wspólne geometryczne wyjaśnienie. Znaleźliśmy też przykłady nieznane wcześniej. W najnowszej pracy z

M. Korasem udowodniliśmy optymalne ograniczenie na liczbę osobliwości.

Egzotyczne uzupełnienia przestrzeni afinicznych

Completions of affine spaces into Mori fiber spaces with non-rational fibers (with A. Dubouloz and T. Kishimoto), J. Lond. Math. Soc. (2022, to appear), 34 pp.

Przestrzenie afiniczne wymiaru wyższego niż dwa mogę mieć dziwne uzupełnienia. Razem z A. Duboulozem i T. Kishimoto skonstruowaliśmy Q-faktorialne terminalne uzupełnienia, które mają strukturę log rozwłóknienia Mori nad prostą (a więc są bliskie uzupełnieniom gładkim i są minimalne w naturalnym geometrycznym sensie), a jednocześnie geometria ich włókien jest bardzo różna od geometrii spodziewanych włókien wymiernych. Włókna są mianowicie nie tylko niewymierne, ale w części przykładów stabilnie niewymierne lub wręcz biwymiernie sztywne.

Geometria powierzchni Q-acyklicznych

Classification of singular Q-homology planes I. Structure and singularities,
Israel J. Math. 195 (2013), 37-69
Singular Q-homology planes of negative Kodaira dimension have smooth locus of non-general type (with M. Koras), Osaka J. Math. 50 (2013), 61-114
Classification of singular Q-homology planes II. C^1- and C*-rulings,
Pacific J. Math. 282-2 (2012), 421-457
Exceptional singular Q-homology planes,
Ann. Inst. Fourier, 61 (2011), no. 2, 745-774

Rozszerzając wyniki Gujrara, Miyanishiego, Fujity, Tsunody, Sakai i in. z przypadku gładkiego na osobliwy otrzymałem liczne rezultaty opisujące strukturę powierzchni Q-acyklicznych, w tym uzyskałem pełne zrozumienie geometrii typów innych niż log ogólny oraz (razem z M. Korasem) istotne twierdzenie strukturalne w przypadku typu log ogólnego. Te ostatnie wyniki uogólniają poprzednie wyniki Korasa-Russella, które były kluczem do analizy ilorazu w dowodzie hipotezy o linearyzacji działań C* na C^3.

Zanurzenia C* w płaszczyznę afiniczną

The geometry of sporadic C*-embeddings into C2 (with M. Koras and P. Russell),
J. Algebra, 456 (2016), 207-249

Znane twierdzenia Abhyankara-Moha i Suzuki oraz Lina-Zaidenberga mówią, że każda płaska krzywa homeomorficzna z linią afiniczną jest izomorficzna albo z {x=0} albo $\{x^p=y^q\}$ dla względnie pierwszych liczb całkowitych p>q>1. Ze względu na niegeneryczny logarytmiczny wymiar Kodairy, obok linii drugą ważną krzywą jest nakłuta linia $C^*=C^1\setminus\{0\}$. Opis jej domkniętych zanurzeń w płaszczyznę afiniczną jest znacznie bardziej skomplikowanym problemem. Program klasyfikacji podejmowali m.in. Borodzik-Żołądek, Kaliman oraz Cassou-Nogues-Koras-Russell. Powyższa praca z M. Korasem i P. Russellem jest przedostatnią z serii i ustanawia nowe silne ograniczenia geometrii zanurzeń sporadycznych, które są najtrudniejsze do zrozumienia. Kluczem jest analiza osobliwości w nieskończoności, do której wykorzystuje się mieszankę technik geometrycznych i algebraicznych, w tym logarytmiczną nierówność Bogomolova-Miyaoki-Yau, chirurgie i rozwiązywanie równań dla par Hamburger-Noether opisujących osobliwości krzywej w nieskończoności.

Inne zastosowania teorii modeli niemal minimalnych

A new proof of the theorems of Lin-Zaidenberg and Abhyankar-Moh-Suzuki,
J. Algebra Appl. 14 (2015), No. 9, 1540012 (15 p.)

Używając teorii modeli niemal minimalnych podałem nowe krótkie dowody twierdzeń Abhyankara-Moha i Suzuki oraz Lina-Zaidenberga.