

S. Peszat, J. Zabczyk

STOCHASTYCZNE RÓWNANIA EWOLUCYJNE

6 maja 2009

Przedmowa

Na prezentowany tekst składają się wykłady, które prowadziliśmy w roku akademickim 2001/2002. Celem wykładów było wprowadzenie słuchaczy w teorię stochastycznych równań ewolucyjnych. Początki tej teorii sięgają lat sześćdziesiątych zeszłego stulecia. Pierwsze wyniki motywowane były wewnętrznym rozwojem matematyki, w szczególności analizy i teorii procesów stochastycznych jak również koniecznością opisywania losowych zjawisk badanych w fizyce, chemii, biologii i automatyce. Podstawowe pytania dotyczące istnienia

i jedności rozwiązań zostały postawione w latach siedemdziesiątych i ich rozwiązania, przy różnego rodzaju założeniach, pojawiają się do dnia dzisiejszego. Większość równań różniczkowych z pochodnymi cząstkowymi, liniowych i nieliniowych, ma swoje stochastyczne odpowiedniki a ich własności są przedmiotem intensywnych badań.

Wykłady zostały podzielone na dwie części. Część pierwsza zawiera materiał z semestru wiosennego i poświęcona jest równaniom postaci

$$dX = (AX + F(X)) dt + BdW, \quad (0.1)$$

z tak zwanym szumem addytywnym, to znaczy niezależnym od rozwiązania. W równaniu (0.1) symbol A oznacza operator liniowy, najczęściej różniczkowy, F jest operatorem nieliniowym, B liniowym, ograniczonym a W to proces Wienera. Ta część wykładów zawiera dużo materiału wprowadzającego i motywacyjnego i jest bardziej elementarna niż część druga. Zaczyna się rozdziałem, który wyjaśnia związki zachodzące pomiędzy układami dynamicznymi stochastycznymi a równaniami stochastycznymi. W rozdziale drugim omówione zostały własności miar gaussowskich i procesu Wienera na przestrzeniach Hilberta. Podstawowe własności całki stochastycznej, gdy całkuje się funkcje operatorowe deterministyczne, są przedmiotem rozdziału następnego. Udowodniono w nim istnienie rozwiązania równania (0.1) i to, że rozwiązanie ma własność Markowa. Pojęcie miary niezmienniczej zostało wprowadzone w rozdziale 4 wraz z dostatecznymi warunkami na jej istnienie. W obszernym rozdziale 5 wprowadzono pojęcie miary Gibbsa dla układu spinowego na kracie i w oparciu o wyniki poprzednich rozdziałów naszkicowano dowód istnienia miary Gibbsa dla szerokiej klasy układów. Rozdział ostatni poświęcony został teorii pólgrup liniowych operatorów i słabym rozwiązaniom równań liniowych. Pojęcia te odgrywać będą zasadniczą rolę w części drugiej.

Drugi semestr i jednocześnie druga część wykładów poświęcone zostały równaniom, które można zapisać w postaci

$$dX = (AX + F(X)) dt + B(X)dW. \quad (0.2)$$

W równaniach tego typu szum zależy od rozwiązania. Badanie (0.2) wymaga ogólnej definicji całki stochastycznej Itô o wartościach w przestrzeni Hilberta oraz poznania jej podstawowych własności, to jest nieskończenie wymiarowych odpowiedników klasycznego wzoru Itô i nierówności Burkholdera–Davis–Gundy’ego. Tym zagadnieniom poświęcone są rozdziały 8 i 9. Rozdział 7

poświęcony jest pojęciu całki Bochnera, nieskończenie wymiarowym martyn-
gałom i warunkowej wartości oczekiwanej elementu losowego o wartościach w
przestrzeni Banacha. Podstawowym rezultatem przedstawionym w rozdziale
10 jest metatwierdzenie, które mówi, że klasy rozwiązań całkowych (mild solu-
tions) i słabych są identyczne. Przypomnijmy, że proces X jest rozwiązaniem
całkowym (0.2) gdy spełnia

$$\begin{aligned} X(t) = S(t)X(0) + \int_0^t S(t-s)F(X(s))ds \\ + \int_0^t S(t-s)B(X(s))dW(s), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (0.3)$$

gdzie S jest półgrupą generowaną przez A . Słabe rozwiązanie (0.2) rozumiane
jest w sensie równań deterministycznych. Tak więc proces X jest rozwiązaniem
słabym (0.2) gdy dla każdego ψ z dziedziny operatora A^* ,

$$\begin{aligned} \langle X(t), \psi \rangle = \langle X(0), \psi \rangle + \int_0^t (\langle X(s), A^*\psi \rangle + \langle F(X(s)), \psi \rangle) ds \\ + \int_0^t \langle B(X(s))dW(s), \psi \rangle \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Całka stochastyczna Itô, o ile jest dobrze określona, ma ciągłą modyfikację.
Z drugiej strony w postaci całkowej (0.3) równania (0.2) występuje stocha-
styczny spłot

$$\int_0^t S(t-s)B(X(s))dW(s), \quad t \geq 0,$$

który nie musi być ciągły po t . W rozdziale 11, używając metody faktoryzacji
formułujemy dość ogólne warunki na istnienie ciągłej modyfikacji stochastycz-
nego spłotu. Rozdział 12 zawiera formalną definicję rozwiązania stochastycz-
nego równania ewolucyjnego i warunki regularności współczynników A, F, B
równania, które, jak pokazane zostało w następnym rozdziale, gwarantują ist-
nienie i jedność rozwiązania (0.2). Rozważania z rozdziałów 12 i 13 są ilustro-
wane następującymi przykładami: równanie ciepła z jednorodnymi warunkami
brzegowymi Dirichleta lub Neumanna, równanie z opóźnieniem. Rozdział 14
poświęcony jest stochastycznemu równaniu falowemu na skończonym prze-
dziale. Rozdział 15 dotyczy równań z szumem na brzegu. Ostatnie rozdziały
poświęcone są równaniom ciepła i falowemu na całej przestrzeni, z szumem je-
dnorodnym, to jest stacjonarnym po zmiennej przestrzennej. W drugiej części
korzystamy z podstawowych faktów teorii operatorów nuklearnych i Hilberta–
Schmidta. Fakty te zostały zebrane w dodatku.

Pierwsza część wykładów została przepisana komputerowo przez Pana
magistra Adama Wąsowskiego, a ujednolicenia całości dokonali Pani ma-
gister Franciszka Matthaeus oraz Pan magister Adam Górecki. Serdecznie
dziękujemy im za pomoc.

Szymon Peszat i Jerzy Zabczyk.

Spis treści

Część I Równania z szumem addytywnym

1	Stochastyczne układy dynamiczne a równania różniczkowe	3
1.1	Układy dynamiczne w czasie dyskretnym	3
1.1.1	Konstrukcja stochastycznego układu dynamicznego	4
1.2	Deterministyczne układy w czasie ciągłym	7
1.3	Stochastyczne układy w czasie ciągłym	8
1.4	Równania stochastyczne	11
2	Miary gaussowskie i proces Wienera	13
2.1	Miary gaussowskie na $\mathbb{R}^d$	13
2.2	Rozkłady gaussowskie na przestrzeniach Hilberta	17
2.3	Miary gaussowskie na $L^2(\Theta)$	21
2.4	Proces Wienera	26
2.4.1	Generowanie operatorów kowariancji	28
2.4.2	Rozwinięcia procesów Wienera	29
2.4.3	Pochodna dystrybucyjna procesu Wienera	29
3	Równania stochastyczne z szumem addytywnym	31
3.1	Całka Paley’a–Wienera–Zygmunda	31
3.2	Równania stochastyczne w $\mathbb{R}^d$	36
3.2.1	Liniowe równania stochastyczne	37
3.3	Własność Markowa i równanie Kolmogorowa	40
4	Miary niezmiennicze	47
4.1	Miary niezmiennicze dla układów gradientowych	47
4.2	Miary niezmiennicze dla układów dyssypatywnych	50

5	Układy spinowe	55
5.1	Miary Gibbsa	55
5.2	Układy z ciągłym spinem	57
5.3	Elementy dowodu istnienia miary Gibbsa	59
5.3.1	Proces Wienera W	59
5.3.2	Ograniczoność operatora A	61
5.3.3	Dyssypatywność operatora lokalnych oddziaływań	63
6	Półgrupy operatorów i równania semiliniowe	67
6.1	Zagadnienie Cauchy'ego	67
6.2	Półgrupy operatorów liniowych	68
6.3	Półgrupy uogólnionych kontrakcji	75
6.4	Słabe rozwiązania równań semiliniowych	79
6.4.1	Słabe rozwiązania równań stochastycznych	83
	Literatura	87

Część II Równania z szumem ogólnym

7	Całki w przestrzeniach Banacha	91
7.1	Całka Bochnera	91
7.2	Warunkowa wartość oczekiwana	92
7.3	Martyngały	93
7.4	Własności martyngałów	94
8	Całka stochastyczna w wymiarze skończonym	97
8.1	Całka stochastyczna względem rzeczywistego procesu Wienera	97
8.2	d -Wymiarowy proces Wienera	98
9	Całka stochastyczna w przestrzeni Hilberta	101
9.1	Całka jako izometria	103
9.2	Wzór Itô	104
10	Słabe i całkowe rozwiązania stochastycznych równań ewolucyjnych	109
11	Elementy faktoryzacji	113
11.1	Wymiar skończony	113
11.2	Wymiar nieskończony	115
12	Postać abstrakcyjna stochastycznego równania ewolucyjnego	119
12.1	Równanie abstrakcyjne	119
12.2	Przykłady	121

13 Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności	125
13.1 Uwagi bibliograficzne	130
14 Stochastyczne równanie falowe	131
14.1 Twierdzenie Lumer–Phillipsa	131
14.2 Przykłady	132
14.3 Uwagi bibliograficzne	137
15 Równania z szumem na brzegu	139
15.1 Abstrakcyjne sformułowanie	139
15.2 Przykłady	142
15.3 Uwagi bibliograficzne	145
16 Procesy Wienera w przestrzeni dystrybucji	147
16.1 Podstawowe oznaczenia	147
16.2 Proces Wienera o wartościach dystrybucyjnych	148
16.3 Jednorodny proces Wienera	150
16.4 Jądro reprodukcyjne procesu Wienera	154
16.5 Jądro jednorodnego procesu	159
16.6 Uwagi bibliograficzne	161
17 Stochastyczne równania ewolucyjne na $\mathbb{R}^d$	163
17.1 Równania w przestrzeniach L^2 z wagą	164
17.2 Stochastyczne równania ciepła	168
17.3 Uwagi bibliograficzne	173
18 Stochastyczne równanie falowe na $\mathbb{R}^d$	175
18.1 Istnienie i jedyność rozwiązań	177
18.2 Uwagi bibliograficzne	179
19 Dodatek - Operatory Hilberta–Schmidta i nuklearne	181
19.1 Operatory Hilberta–Schmidta	181
19.2 Operatory nuklearne	182
Literatura	187

Równania z szumem addytywnym

Stochastyczne układy dynamiczne a równania różniczkowe

Stochastyczne równania ewolucyjne można traktować jako pewną formę opisu stochastycznych układów dynamicznych nieskończenie wymiarowych. Pierwszy rozdział poświęcony jest omówieniu ogólnych powiązań pomiędzy równaniami różniczkowymi a układami dynamicznymi.

1.1 Układy dynamiczne w czasie dyskretnym

Przez *układ dynamiczny* rozumie się często przestrzeń mierzalną $(E, \mathcal{E})$, nazywaną *przestrzenią stanów* i odwzorowanie mierzalne $F : E \rightarrow E$. Przedmiotem badań teorii układów są iteracje F^t , $t = 0, 1, \dots$ odwzorowania F i trajektorie, czyli ciągi $(x, F(x), \dots, F^t(x), \dots)$. Często przestrzeń fazowa E jest wyposażona w miarę probabilistyczną μ , niezmienniczą ze względu na F , czyli taką że

$$\mu \{x : F(x) \in \Gamma\} = \mu(\Gamma), \quad \text{dla } \Gamma \in \mathcal{E}.$$

Istnienie miar niezmienniczych i ich jedyność w określonych klasach, są również badane. Układy dynamiczne są *deterministyczne* ponieważ stan układu X_t w dowolnej chwili t , jest całkowicie wyznaczony przez położenie X_t w chwili poprzedniej $t - 1$, w myśl wzoru

$$X_t = F(X_{t-1}), \quad X_0 = x.$$

Założmy, że mamy do czynienia z układem, który jest stochastyczny w tym sensie, że stan następny jest losowany zgodnie z rozkładem $P(x, \cdot)$, gdzie x oznacza stan poprzedni. Funkcję $P(x, \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{E}$, która jest mierzalna ze względu na pierwszy argument i miarę probabilistyczną ze względu na drugi argument, nazywa się *funkcją przejścia* układu. A więc *stochastycznym układem dynamicznym z czasem dyskretnym* jest trójka $(E, \mathcal{E}, \mathcal{P})$, gdzie $(E, \mathcal{E})$ jest przestrzenią mierzalną a P jest funkcją przejścia. Zdefiniujmy przez indukcję (P^t) prawdopodobieństwa przejścia w t -krokach

$$P^{t+1}(x, \Gamma) = \int_E P(x, dy) P^t(y, \Gamma) = \int_E P^t(x, dy) P(x, \Gamma),$$

$$P^0(x, \Gamma) = \delta_{\{x\}}(\Gamma), \quad x \in E, \Gamma \in \mathcal{E}.$$

Dla dowolnego $t = 0, 1, \dots$ i $x \in E$, $P^t(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną na E . Ogólniej, dla dowolnych liczb naturalnych $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ i dowolnych zbiorów $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$ definiujemy prawdopodobieństwa

$$P^{t_1, \dots, t_n}(x, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$$

znalezienia się układu w momentach $t_1, \dots, t_n$ w zbiorach $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, również przez indukcję, zgodnie ze wzorami

$$\begin{aligned} & P^{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(x, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \Gamma_{n+1}) \\ &= \int_{\Gamma_n} P^{t_1, \dots, t_n}(x, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}, dy_n) P^{t_{n+1}-t_n}(y_n, \Gamma_{n+1}) \\ &= \int_{\Gamma_1} P(x, dy_1) P^{t_2-t_1, \dots, t_{n+1}-t_1}(y_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n+1}). \end{aligned}$$

Realizacją stochastycznego układu dynamicznego $(E, \mathcal{E}, \mathcal{P})$ jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i ciąg $X_0, X_1, \dots$ zmiennych losowych

$$X_t : \Omega \longrightarrow E,$$

czyli odwzorowań mierzalnych z $(\Omega, \mathcal{F})$ do $(E, \mathcal{E})$, taki że $X_0 = x$ oraz dla dowolnych $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ i $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}(w : X_{t_1}(w) \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n}(w) \in \Gamma_n) = P^{t_1, \dots, t_n}(x, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n).$$

Jeżeli E jest przestrzenią metryczną zupełną to istnienie realizacji układu (E, P) wynika z twierdzenia *Kolmogorowa o rozszerzaniu miar*. Jako Ω można przyjąć zbiór wszystkich ciągów $w = (w_n)$ o wartościach w E czyli $E^{N \cup \{0\}}$ oraz położyć

$$X_t(w) = w_t, \quad w \in \Omega.$$

Można podać jednak bardziej konkretne realizacje stochastycznego układu dynamicznego w postaci równań dla których punktem wyjścia jest tak zwany *biały szum*.

1.1.1 Konstrukcja stochastycznego układu dynamicznego

Niech $(U, \mathcal{U})$ będzie przestrzenią mierzalną, a $\xi_1, \xi_2, \dots$ ciągiem zmiennych losowych o wartościach w U , określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ciąg (ξ_n) nazywa się *białym szumem*, lub też ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tych samych rozkładach, gdy istnieje miara probabilistyczna μ na U , taka że dla dowolnych $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{U}$,

$$\mathbb{P}(w : \xi_1(w) \in \Gamma_1, \dots, \xi_n(w) \in \Gamma_n) = \prod_{j=1}^n \mu(\Gamma_j).$$

Jeżeli $U = [0, 1]$ i μ jest miarą Lebesgue'a obcięta do $[0, 1]$, to biały szum nazywa się lebesgue'owskim, gdy $U = \mathbb{R}^d$, a

$$\mu(\Gamma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\Gamma} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx,$$

to biały szum nazywa się gaussowskim. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1 *Załóżmy, że E jest przestrzenią zupełną i ośrodkową, a $(E, \mathcal{E}, P)$ stochastycznym układem dynamicznym. Istnieje wtedy odwzorowanie mierzalne $F : E \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, takie że określony następującym wzorem ciąg (X_t) ,*

$$X_{t+1} = F(X_t, \xi_{t+1}), \quad X_0 = x, \quad (1.1)$$

gdzie (ξ_t) to biały szum lebesgue'owski określony na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jest realizacją układu (E, P) .

Istnieje wiele konstrukcji odwzorowania F . Ich cechą wspólną jest to, że dla dowolnego $x \in E$, $F(x, \cdot)$ jest odwzorowaniem odcinka $[0, 1]$ w przestrzeń E , które przenosi miarę Lebesgue'a na miarę $P(x, \cdot)$.

Szkic dowodu

Przypomnijmy, że punktem wyjścia jest funkcja przejścia $P(\cdot, \cdot)$ na zupełnej przestrzeni E . Niech $B_1^1, B_2^1, \dots$ będą kulami o średnicach mniejszych niż $\frac{1}{2^1}$ i pokrywającymi E .

Ustalmy x i oznaczmy przez μ miarę $P(x, \cdot)$. Konstrukcja jest indukcyjna.

Krok 1. Niech $x_1^1, x_2^1, \dots$ będą elementami zbiorów

$$\tilde{B}_1^1 = B_1^1, \tilde{B}_2^1 = B_1^1 \cup B_2^1 \setminus B_1^1, \tilde{B}_3^1 = B_1^1 \cup B_2^1 \cup B_3^1 \setminus B_1^1 \cup B_2^1, \dots$$

Jeżeli m -ty zbiór jest pusty, to kładziemy $x_m^1 = \partial$, gdzie ∂ jest dodanym izolowanym punktem. Zbiory $\tilde{B}_1^1, \tilde{B}_2^1, \dots$ są rozłączne i wyczerpują całą przestrzeń. Niech

$$\lambda_k^1 = \mu(\tilde{B}_k^1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Wtedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^1 = 1.$$

Definiujemy $F_1(y) = x_k^1$ dla

$$y \in [\lambda_1^1 + \dots + \lambda_{k-1}^1, \lambda_1^1 + \dots + \lambda_k^1) \equiv I_k^1.$$

Gdy przedział jest pusty funkcji F_1 nie definiujemy.

Krok 2. Bierzymy drugie pokrycie $B_1^2, B_2^2, \dots$ o średnicach $< \frac{1}{2^2}$ i funkcję F_2 definiujemy na przedziałach $I_1^1, I_2^1, \dots$ w sposób następujący. Rozpatrujemy obcięcie μ^k miary μ do zbioru $\tilde{B}_k^1$, której masa całkowita jest równa długości przedziału I_k^1 . Rozpatrujemy

$$\tilde{B}_k^1 \cap \bigcup_m B_m^2 = \bigcup_m \tilde{B}_k^1 \cap B_m^2$$

i tworzymy zbiory rozłączne

$$B_{k,1}^2 = \tilde{B}_k^1 \cap B_1^2, \quad B_{k,2}^2 = \tilde{B}_k^1 \cap (B_1^2 \cup B_2^2) \setminus B_{k,1}^2.$$

W każdym z nich wybieramy punkty $x_{k,1}^2, x_{k,2}^2, \dots$, które są odległe od x_k^1 o mniej niż $\frac{1}{2^2}$. Przedział I_k^1 rozkładamy na podprzedziały długości odpowiednio równe mierze μ_1^k obciętej do kolejnych zbiorów $B_{k,m}^2$ i na nich definiujemy F_2 kładąc $x_{k,m}^2$.

Przez indukcję otrzymujemy ciąg $F_1, F_2, \dots$, taki że

$$\rho(F_n(y), F_{n+1}(y)) \leq \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Funkcje (F_n) oczywiście zależą od zmiennej x , czyli w rzeczywistości mamy do czynienia z ciągiem funkcji $F_n(x, y)$, $x \in E$, $y \in [0, 1]$ przyjmujących przeliczalną liczbę wartości. Funkcje te są mierzalne jako funkcje obydwu argumentów i zbiegają do pewnej funkcji F . Funkcja F ma wymagane własności. Aby to udowodnić, niech μ_n będzie rozkładem funkcji F_n . Funkcja F_n przeprowadza miarę Lebesgue'a obciętą do $[0, 1]$ na miarę skoncentrowaną na przeliczalnym zbiorze $\{x_k^n, k = 1, 2, \dots\}$. Wystarczy wykazać, że ciąg (μ_n) zbiega słabo do miary μ . Przypomnijmy, że ciąg (μ_n) zbiega słabo do miary μ , gdy dla dowolnej funkcji ciągłej i ograniczonej ϕ ,

$$\lim_n \int \phi(x) \mu_n(dx) = \int \phi(x) \mu(dx),$$

lub równoważnie, gdy dla dowolnego zbioru otwartego G ,

$$\liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G).$$

Zauważmy, że dla każdego n istnieje ciąg $(\Gamma_k^n)_{k=1, \dots}$ zbiorów rozłącznych, taki że

$$\rho(x_k^n, \Gamma_k^n) < \frac{1}{2^n}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \mu_n\{x_k^n\} = \mu(\Gamma_k^n)$$

oraz

$$\bigcup_k \Gamma_k^n = E.$$

Ustalmy zbiór otwarty $G \subset E$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą dodatnią, $K \subset G$ podzbiorem zwartym, takim że $\mu(K) \geq \mu(G) - \varepsilon$. Dowolna kula B_k^n o niepustym przecięciu z K i z $k : \frac{1}{2^k} < \varepsilon$, leży całkowicie w G . Niech

$$\tilde{G} = \bigcup_{B_k^n} \cap K \subset G.$$

Wtedy

$$\mu_n(G) \geq \mu_n(\tilde{G}) \geq \mu(K) \geq \mu(G) - \varepsilon.$$

Czyli

$$\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G),$$

co kończy dowód wymaganej słabej zbieżności. $\square$

Równanie (1.1) jest dyskretną w czasie wersją stochastycznego równania różniczkowego. Nazwiemy je równaniem stochastycznym w czasie dyskretnym. Możemy więc powiedzieć, że stochastyczne układy dynamiczne a równania stochastyczne w czasie dyskretnym są tym samym jeżeli tylko przestrzeń fazowa jest zupełna i ośrodkowa. Okazuje się, że fakt ten jest do pewnego stopnia prawdziwy i dla układów w czasie ciągłym. Zaczniemy od układów deterministycznych.

1.2 Deterministyczne układy w czasie ciągłym

Niech E będzie przestrzenią metryczną a $\mathcal{E}$ rodziną podzbiorów borelowskich E . Rodzinę F^t , $t \geq 0$ odwzorowań mierzalnych E w E , taką że

1. $F^0(x) = x$, $x \in E$,
2. $F^{t+s}(x) = F^t(F^s(x))$, $t, s \geq 0$, $x \in E$,
3. Funkcja $F^t(x)$, $t \geq 0$ jest ciągła dla dowolnego $x \in E$,

nazywamy *układem dynamicznym w czasie ciągłym* albo *potokiem*, na E . Funkcję zmiennej t , $F^t(x)$, $t \geq 0$ nazywa się *trajektorią startującą z $x \in E$* . Załóżmy dla prostoty, że $E = \mathbb{R}^d$. Jeżeli trajektorie układu dynamicznego są różniczkowalne w sposób ciągły, to wtedy

$$\frac{d}{dt} F^t(x) = A(F^t(x)), \quad t \geq 0, \quad x \in E, \quad (1.2)$$

gdzie

$$A(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{F^t(x) - x}{t}, \quad x \in E.$$

A więc regularne układy dynamiczne w czasie ciągłym, czyli takie, których trajektorie są różniczkowalne, są identyczne z rozwiązaniami równań różniczkowych zwyczajnych. Dla pełności obrazu zauważmy, że istnieją układy dynamiczne, których żadna trajektoria nie jest różniczkowalna w jakimkolwiek punkcie. Takie układy nie są więc opisywalne przez równania różniczkowe. Również bardziej regularne *układy dyssypatywne* mają trajektorie lipschitzowskie będące rozwiązaniami różniczkowalnych inkluzji

$$\frac{dF^t}{dt}(x) \in A(F^t(x)), \quad t \geq 0, x \in E,$$

gdzie A jest funkcją o wartościach zbiorowych. Przypomnijmy, że układy dysypatywne to układy dla których

$$|F^t(x) - F^t(y)| \leq |x - y|, \quad t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d.$$

A więc dla konstruktywnego opisu układów dynamicznych należy niekiedy wyjść poza tradycyjne równania różniczkowe, ale są to raczej sytuacje wyjątkowe.

Na związki między potokami a równaniami różniczkowymi można popatrzeć jeszcze inaczej. Niech $C_0(\mathbb{R}^d)$ oznacza przestrzeń Banacha funkcji ciągłych znikających w nieskończoności z normą równą supremum modułu funkcji. Zdefiniujmy rodzinę operatorów

$$P^t \phi(x) = \phi(F^t(x)), \quad t \geq 0, x \in E.$$

Jeżeli operatory (P^t) przekształcają przestrzeń $C_0(\mathbb{R}^d)$ w siebie oraz dla dowolnego $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$,

$$P^t \phi \longrightarrow \phi \quad \text{jednostajnie, gdy } t \downarrow 0,$$

to układ dynamiczny $(E, (F^t)_{t \geq 0})$ nazywa się *fellerowski*. Niech L będzie operatorem zadany wzorem

$$L\phi(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P^t \phi(x) - \phi(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\phi(F^t(x)) - \phi(x)}{t} \quad (1.3)$$

na zbiorze $D(L)$ składającym się z tych funkcji $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ dla których zbieżność w (1.3) jest jednostajna. Z elementarnych własności silnie ciągłych półgrup operatorów liniowych wynika, że zbiór $D(L)$ jest gęsty i para $(L, D(L))$ jednoznacznie wyznacza $(E, (F^t)_{t \geq 0})$. Gdy układ jest regularny, wtedy na funkcjach ϕ dostatecznie regularnych

$$L\phi(x) = \langle A(x), D\phi(x) \rangle,$$

gdzie A to odwzorowanie występujące w równaniu (1.2). W ogólnym przypadku postać operatora L nie jest jednak znana.

1.3 Stochastyczne układy w czasie ciągłym

Biorąc pod uwagę poprzednie definicje, stochastycznym układem w czasie ciągłym nazwiemy trójkę $(E, \mathcal{E}, (P^t)_{t \geq 0})$ składającą się z przestrzeni metrycznej E wyposażonej w rodzinę zbiorów borelowskich $\mathcal{E}$ i rodziny P^t , $t \geq 0$ funkcji przejścia na E , takiej że

1. $P^0(x, \Gamma) = \delta_{\{x\}}(\Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{E}$,
2. $P^{t+s}(x, \Gamma) = \int_E P^t(x, dy) P^s(y, \Gamma)$, $t, s \in [0, \infty)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{E}$,
3. Jeżeli $t \downarrow 0$, to $P^t(x, \cdot) \longrightarrow \delta_{\{x\}}$ słabo.

Podobnie jak w czasie dyskretnym definiujemy funkcje $P^{t_1, \dots, t_n}(x; \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $\Gamma_i \in \mathcal{E}$, $i = 1, \dots, n$ i realizacją stochastycznego układu dynamicznego $(E, \mathcal{E}, (P^t)_{t \geq 0})$ nazywamy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i rodzinę $X_t : \Omega \longrightarrow E$, $t \geq 0$ zmiennych losowych, taką że

$$\mathbb{P}(w : X_{t_1}(w) \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n}(w) \in \Gamma_n) = P^{t_1, \dots, t_n}(x, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$$

dla dowolnych $0 < t_1 < \dots < t_n$ i $\Gamma_i \in \mathcal{E}$, $i = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$. Podobnie jak w czasie dyskretnym istnienie realizacji wynika z twierdzenia Kołmogorowa o rozszerzaniu miar zadanych na zbiorach cylindrycznych.

Założmy, że $E = \mathbb{R}^d$ i oznaczmy tym samym symbolem P^t funkcje przejścia jak i operatory przejścia określone wzorami

$$P^t \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P^t(x, dy) \phi(y).$$

Następujące twierdzenie Courrègue'a [2] opisuje strukturę dużej klasy stochastycznych układów dynamicznych.

Twierdzenie 1.2 *Założmy, że dla dowolnego $t \geq 0$, P^t jest ciągłym operatorem na $C_0(\mathbb{R}^d)$, $P^t \phi \longrightarrow \phi$ jednostajnie, gdy $t \downarrow 0$. Niech dodatkowo dla wszystkich funkcji $\phi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$, nieskończenie wiele razy różniczkowalnych i o ograniczonych nośnikach i dowolnego $x \in \mathbb{R}^d$, funkcja $P^t \phi(x)$, $t \geq 0$ jest różniczkowalna. Istnieją wtedy funkcje $A : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $Q : \mathbb{R}^d \longrightarrow L_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ i $\nu : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, gdzie $L_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ oznacza przestrzeń operatorów nieujemnie określonych na $\mathbb{R}^d$, a $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ oznacza przestrzeń wszystkich miar nieujemnych μ na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, takich że*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|y|^2 \wedge 1) \mu(dy) < \infty$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{P^t \phi(x) - \phi(x)}{t} &= \langle A(x), D\phi(x) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr } Q(x) D^2 \phi(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left(\phi(x+y) - \phi(x) - \frac{\langle y, D\phi(x) \rangle}{1+|y|^2} \right) \nu(x, dy) \end{aligned} \quad (1.4)$$

dla $\phi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

W pracy [9] z 1951, K.Itô wprowadził klasę równań różniczkowych stochastycznych, takich że ich rozwiązania są realizacjami układów dynamicznych dla których ma miejsce (1.4). Przed wprowadzeniem tych równań podamy kompletny opis stochastycznych układów dynamicznych przestrzennie jednorodnych, czyli takich, że

$$P^t(x, \Gamma) = P^t(0, \Gamma - x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \Gamma \in \mathcal{E}. \quad (1.5)$$

Niech $\mu_t(\Gamma) = P^t(0, \Gamma)$, $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathcal{E}$. Wtedy

$$\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s, \quad t, s \geq 0, \quad (1.6)$$

$$\mu_t \rightarrow \delta_{\{0\}} \quad \text{slabo, gdy } t \rightarrow 0, \quad (1.7)$$

gdzie przez $*$ oznaczyliśmy operację splotu. Następujące twierdzenie znane jest jako charakteryzacja Lévy'ego–Chinczyna, patrz [1] and [11].

Twierdzenie 1.3 *Jeżeli (μ_t) jest rodziną miar probabilistycznych spełniających (1.6) i (1.7) to wtedy*

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \lambda, x \rangle} \mu_t(dy) = e^{-t\psi(\lambda)}, \quad t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^d, \quad (1.8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) = & i\langle a, \lambda \rangle + \frac{1}{2} \langle Q\lambda, \lambda \rangle \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - e^{i\langle \lambda, x \rangle} - \frac{\langle \lambda, x \rangle}{1 + |x|^2} \right) \nu(dx), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$a \in \mathbb{R}^d$, $Q \in L_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ oraz $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Odwrotnie dla każdej funkcji ψ postaci (1.9), istnieje rodzina (μ_t) spełniająca (1.6) i (1.7), dla której ma miejsce (1.8).

Realizacje jednorodnych przestrzennie układów dynamicznych nazywa się procesami o przyrostach niezależnych. Istnieją zawsze realizacje regularne, czyli o trajektoriach prawostronnie ciągłych posiadających lewostronne pochodne. Są to tak zwane procesy Lévy'ego.

Niech Z_t , $t \geq 0$ będzie procesem Lévy'ego, takim że $Z_0 = 0$. Jeżeli $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ i $\Gamma_i \in \mathcal{E}$, $i = 1, 2, \dots$, to

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(w; Z_{t_{j+1}}(w) - Z_{t_j}(w) \in \Gamma_j, j = 0, 1, \dots, n-1) \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(w; Z_{t_{j+1}}(w) - Z_{t_j}(w) \in \Gamma_j). \end{aligned}$$

Czyli przyrosty mają własność niezależności, która występowała w definicji białego szumu w czasie dyskretnym. Ponieważ trajektorie procesu Z są funkcjami lokalnie ograniczonymi, dlatego istnieje pochodna każdej trajektorii $Z_t(\omega)$ w sensie teorii dystrybucji $\frac{dZ_t}{dt}(t)$, $t \in (0, \infty)$. Jeżeli funkcje $f_1, \dots, f_n \in C_0^\infty((0, \infty))$ mają nośniki zawarte w rozłącznych odcinkach, to wtedy zmienne

$$\left(\frac{dZ}{dt}, f_1 \right), \left(\frac{dZ}{dt}, f_2 \right), \dots, \left(\frac{dZ}{dt}, f_n \right)$$

są niezależne. Dlatego białym szumem w czasie ciągłym nazywa się każdy uogólniony proces $\frac{dZ}{dt}$, gdzie Z jest procesem o przyrostach niezależnych.

Dwa procesy Lévy'ego są szczególnie ważne z punktu widzenia stochastycznych układów dynamicznych. Pierwszy z nich nazywa się procesem Wienera W i odpowiada on funkcji $\psi(\lambda) = |\lambda|^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$, a drugi (symetrycznym) procesem Cauchy'ego C i odpowiada on funkcji $\psi(\lambda) = |\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Dla procesu Wienera $a = 0$, $Q = I$, $\nu = 0$, a dla procesu Cauchy'ego

$$a = 0, \quad Q = 0, \quad \nu(dx) = \frac{1}{|x|^{1+d}} dx.$$

Co więcej, dla procesu Wienera mamy

$$\mu_t(\Gamma) = P^t(0, \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^d}} \int_{\Gamma} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx,$$

a dla procesu Cauchy'ego

$$\mu_t(\Gamma) = P^t(0, \Gamma) = \pi^{(d+1)/2} \Gamma((d+1)/2) t \int_{\Gamma} (|x|^2 + t^2)^{-(d+1)/2} dx.$$

Proces Wienera ma trajektorie ciągłe, a proces Cauchy'ego nieciągłe.

1.4 Równania stochastyczne

Aby naszkicować konstruktywne rozwiązanie problemu realizacji stochastycznego układu dynamicznego podane przez Itô powróćmy do Twierdzenia Co-urrière'a i zatrzymajmy się nad przypadkiem gdy funkcja $A(\cdot)$ spełnia warunek Lipschitza, Q jest funkcją stałą, a $\nu \equiv 0$. Nietrudno udowodnić, w oparciu o twierdzenie o odwzorowaniach zwężających, że równanie całkowe

$$X_t(w) = x + \int_0^t A(X_s(w)) ds + Q^{\frac{1}{2}} W_t(w), \quad t \geq 0, \quad (1.10)$$

ma jedyne rozwiązanie zależne od parametru $w \in \Omega$. Równanie zapisuje się często w postaci różniczkowej

$$\frac{dX_t}{dt} = x + A(X_t) + Q^{\frac{1}{2}} \frac{dW_t}{dt}, \quad (1.11)$$

w którym biały szum pojawia się explicite. Równaniu temu można nadać ścisły sens używając pojęcia dystrybucji, jednakże wygodniejsza jest postać (6.16), która stanowi punkt wyjścia uogólnień na przypadek dowolnych funkcji A, Q, ν . Rozwiązanie równania (1.10), to właśnie poszukiwana realizacja układu stochastycznego z opisanymi parametrami.

Przyjmijmy, że macierzowa funkcja $Q(\cdot)$ nie jest stała a jedynie $\nu \equiv 0$. Wtedy realizację X_t , $t \geq 0$ konstruuje się jako rozwiązanie równania całkowego

$$X_t(w) = x + \int_0^t A(X_s(w)) ds + \int_0^t Q^{\frac{1}{2}}(X_s(w)) dW_s(w), \quad (1.12)$$

gdzie druga całka stojąca po prawej stronie (12) jest tak zwaną *całką Itô*. Przy odpowiednim doborze zstępującego ciągu podziałów $\{(t_j^n)\}$ można ją otrzymać jako granicę, przy prawie każdym w , sum postaci

$$\sum_{t_j^n \leq t} Q^{\frac{1}{2}}(X_{t_j^n}(w))(W_{t_{j+1}^n}(w) - W_{t_j^n}(w)).$$

Dla konstrukcji realizacji układu stochastycznego w ogólnym przypadku potrzebny jest jeszcze proces o nieciągłych trajektoriach. Wygodnie jest wybrać proces Cauchy'ego, który oznaczать będziemy przez C_t , $t \geq 0$. Zdefiniujemy najpierw dla dowolnego zbioru borelowskiego $\Gamma \in \mathcal{E}$, ściśle oddzielonego od 0, dwa procesy $p(t, \Gamma)$, $t \geq 0$ i $q(t, \Gamma)$, $t \geq 0$ w myśl wzorów

$$\begin{aligned} p(t, \Gamma, w) &= \text{liczność zbioru } \{s \in [0, t]; C_s(w) - C_{s-}(w) \in \Gamma\}, \\ q(t, \Gamma, w) &= p(t, \Gamma, w) - \int_{\Omega} p(t, \Gamma, \eta) \mathbb{P}(d\eta), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Położmy

$$B(x) = A(x) + \int_{|y| < 1} \frac{|y|^2 y}{1 + |y|^2} \nu(x, dy) - \int_{|y| \geq 1} \frac{y}{1 + |y|^2} \nu(x, dy), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Niech dodatkowo dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$, $G(x, \cdot)$ będzie transformacją z $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ w $\mathbb{R}^d$, taką że

$$\begin{aligned} |G(x, y)| &< 1 \quad \text{dla } |y| < 1, \\ |G(x, y)| &\geq 1 \quad \text{dla } |y| \geq 1, \end{aligned}$$

która dodatkowo przekształca miarę $\frac{1}{|y|^{1+d}} dy$ na miarę $\nu(x, \cdot)$. Okazuje się, że przy odpowiednich założeniach regularności ([9]), można zrealizować układ stochastyczny jako proces X_t , $t \geq 0$ będący rozwiązaniem równania

$$\begin{aligned} X_t(w) &= x + \int_0^t B(X_s(w)) ds + \int_0^t Q^{\frac{1}{2}}(X_s(w)) dW_s(w) \\ &+ \int_0^t \int_{|y| < 1} G(X_s(w), y) q(ds, dy, w) + \int_0^t \int_{|y| \geq 1} G(X_s(w), y) p(ds, dy, w). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Całki względem miar skokowych q i p mają naturalny sens i zostały również zdefiniowane przez Itô.

Wzór (1.13) to poszukiwane uogólnienie wzoru (1.1).

Miary gaussowskie i proces Wienera

Miary gaussowskie grają podstawową rolę w teorii stochastycznych równań ewolucyjnych. W rozdziale przypominamy różne fakty dotyczące miar gaussowskich na przestrzeniach skończonego wymiaru i uogólniamy niektóre z nich na przypadek przestrzeni Hilberta. Dokładniej badany jest przypadek gdy przestrzeń Hilberta jest przestrzenią funkcji całkowitych z kwadratem. Końcowa sekcja poświęcona jest procesowi Wienera i przykładom.

2.1 Miary gaussowskie na $\mathbb{R}^d$

Miarą gaussowską μ na $\mathbb{R}^1$ nazywamy dowolną miarę skoncentrowaną w jednym punkcie $\mu = \delta_{\{m\}}$, lub miarę z gęstością

$$\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q}} e^{-\frac{1}{2q}(x-m)^2} dx,$$

gdzie $q > 0$ i $m \in \mathbb{R}^1$. Miary takie oznaczamy $N(m, q)$, gdzie $N(m, 0) = \delta_{\{m\}}$. Zamiast $N(0, q)$ piszemy N_q . Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład $N(m, q)$ dla pewnych m, q , to ξ nazywamy ją *zmienną gaussowską rzeczywistą*.

Bezpośrednim rachunkiem stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} x N_{(m,q)}(dx) &= m, & \int_{\mathbb{R}^1} (x-m)^2 N_{m,q}(dx) &= q, \\ \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda x} N_{m,q}(dx) &= e^{i\lambda m - \frac{1}{2}q\lambda^2}. \end{aligned}$$

Gdy $\mathcal{L}(\xi) = N(m, q)$, to

$$\mathbb{E} \xi = m, \quad \mathbb{E} (\xi - m)^2 = q, \quad \mathbb{E} e^{i\lambda \xi} = e^{i\lambda m - \frac{1}{2}q\lambda^2}.$$

Lemat 2.1 *Jeżeli $\mathcal{L}(\xi) = N_1$, to*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{\lambda \xi} &= e^{\frac{1}{2}\lambda^2}, \\ \mathbb{E} e^{\lambda \xi^2} &= \begin{cases} \infty, & \text{gdy } \lambda \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}, & \text{gdy } \lambda < \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dowód. Udowodnimy jedynie wzór (2.1). Ponieważ $\mathcal{L}(\xi) = N_1$,

$$\mathbb{E} e^{\lambda \xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\frac{1}{2}+\lambda)x^2} dx.$$

Gdy $-\frac{1}{2} + \lambda \geq 0$, to całka $= +\infty$. Gdy $-\frac{1}{2} + \lambda < 0$, to

$$e^{(-\frac{1}{2}+\lambda)x^2} = e^{-\frac{1}{2}(1-2\lambda)x^2} = e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{1-2\lambda}x)^2}.$$

Podstawiając

$$y = \sqrt{1-2\lambda}x, \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} dy$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\frac{1}{2}+\lambda)x^2} dx &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}. \end{aligned}$$

□

Ogólniej niech E będzie przestrzeń liniowa, topologiczna, a $\mathcal{E}$ rodziną podzbiorów borelowskich E . Miara μ na $(E, \mathcal{E})$ jest gaussowska wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny funkcjonal $x^* \in E^*$, rozpatrywany jako zmienna losowa na przestrzeni $(E, \mathcal{E}, \mu)$ ma rozkład gaussowski. Oznacza to, że dla dowolnego $x^* \in E^*$ istnieją m^* oraz $q^* \geq 0$, że

$$\int_E e^{i\langle x, x^* \rangle} \mu(dx) = e^{\lambda m^* - \frac{1}{2} q^* \lambda^2}.$$

Założmy, że $E = \mathbb{R}^d$ i że μ jest miarą gaussowską na $\mathbb{R}^d$. Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} x \mu(dx) &= m, \\ \int_{\mathbb{R}^d} \langle x - m, a \rangle \langle x - m, b \rangle \mu(dx) &= \langle Qa, b \rangle, \end{aligned}$$

gdzie $m = (m_1, \dots, m_d)$ jest wektorem a $Q = (q_{ij})$ symetryczną macierzą o elementach odpowiednio

$$m_i = \int_{\mathbb{R}^d} x_i \mu(dx), \quad q_{ij} = \int_{\mathbb{R}^d} (x_i - m_i)(x_j - m_j) \mu(dx).$$

Miarę taką oznaczamy przez $N_{m,Q}$. Niech $\mathcal{L}(\xi) = N_{m,Q}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\mathbb{E} e^{i\langle \lambda, \xi \rangle} &= e^{i\mathbb{E}\langle \lambda, \xi \rangle - \frac{1}{2}\mathbb{E}(\langle \lambda, \xi \rangle - \mathbb{E}(\lambda, \xi))^2} \\ &= e^{i\langle \lambda, m \rangle} e^{-\frac{1}{2}\int (\langle \lambda, x \rangle - \langle \lambda, m \rangle)^2 \mu(dx)} \\ &= e^{i\langle \lambda, m \rangle - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\langle \lambda, x - m \rangle)^2 \mu(dx)} \\ &= e^{i\langle \lambda, m \rangle - \frac{1}{2}\langle Q\lambda, \lambda \rangle}.\end{aligned}$$

Jeżeli Q jest dodatnio określoną macierzą, to jest jeżeli

$$\langle Qa, a \rangle > 0, \quad a \neq 0,$$

to

$$N_{m,Q}(dx) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det Q}} e^{-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-m), x-m \rangle} dx.$$

Jeżeli Q jest macierzą diagonalną, to

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{q_d} \end{pmatrix}$$

i gdy dodatkowo $m = 0$, to

$$\begin{aligned}N_Q(dx) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \prod_{j=1}^d q_j}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{1}{q_j} x_j^2} dx_1 \dots dx_d \\ &= \prod_{j=1}^d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi q_j}} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{q_j} x_j^2} \right) dx.\end{aligned}$$

A więc gdy $\mathcal{L}(\xi) = N_Q$ i $\mathbb{E} \xi_i \xi_j = 0$ dla $i \neq j$, to

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi_1(\xi_1) \dots \phi_d(\xi_d)) &= \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int \phi_1(x_1) \dots \phi_d(x_d) \prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi q_j}} e^{-\frac{1}{2q_j} x_j^2} dx_1 \dots dx_d \\ &= \prod_{j=1}^d \int \phi_j(x_j) \frac{1}{\sqrt{2\pi q_j}} e^{-\frac{1}{2q_j} x_j^2} dx_j = \prod_{j=1}^d \mathbb{E} \phi_j(\xi_j).\end{aligned}$$

Czyli zmienne $\xi_1, \dots, \xi_d$ są niezależne. Ogólnie, gdy

$$\mathbb{E}(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j) = 0, \quad i \neq j,$$

to $\xi_1, \dots, \xi_d$ są niezależne.

Lemat 2.2 *Niech ξ będzie zmienną gaussowską o wartościach w $\mathbb{R}^d$ z $\mathbb{E}\xi = m = 0$ a s liczbą rzeczywistą, taką że $2s\mathbb{E}|\xi|^2 < 1$. Wtedy*

$$\mathbb{E} e^{s|\xi|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2s\mathbb{E}|\xi|^2}}.$$

Dowód. Niech $Qe_j = \gamma_j e_j$, $j = 1, \dots, d$, gdzie (e_j) ortogonalne wektory własne macierzy Q . Wtedy

$$\xi = \sum_{j=1}^d \langle \xi, e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^d \eta_j e_j.$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{E} \langle \xi, e_j \rangle \langle \xi, e_k \rangle = \langle Qe_j, e_k \rangle = 0, \quad j \neq k.$$

A więc zmienne η_j są niezależne i gaussowskie oraz $\mathbb{E}\eta_j^2 = \gamma_j$. Ponadto

$$\mathbb{E} \langle \xi, e_j \rangle^2 = \langle Qe_j, e_j \rangle = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, d.$$

Dlatego

$$\mathbb{E} e^{s|\xi|^2} = \mathbb{E} e^{\sum_{j=1}^d s\eta_j^2} = \prod_{j=1}^d \mathbb{E} e^{s\eta_j^2}.$$

Gdy dla pewnego $j = 1, \dots, d$, $s\gamma_j \geq \frac{1}{2}$, to

$$\mathbb{E} e^{s|\xi|^2} = \prod_{j=1}^d \mathbb{E} e^{s\eta_j^2} = \prod_{j=1}^d \mathbb{E} e^{s\gamma_j \left(\frac{\eta_j}{\sqrt{\gamma_j}}\right)^2} = \infty.$$

Założmy więc, że $s\gamma_j < \frac{1}{2}$, $j = 1, \dots, d$. Wtedy

$$\mathbb{E} e^{s|\xi|^2} = \prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{1 - 2s\gamma_j}} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^d (1 - 2s\gamma_j)}}.$$

Jeżeli $2s\gamma_j < 1$, dla $j = 1, \dots, d$, to

$$\prod_{j=1}^d (1 - 2s\gamma_j) \geq 1 - 2s \sum_{j=1}^d \gamma_j.$$

Ponieważ

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_d = \mathbb{E}|\xi|^2,$$

dlatego, gdy

$$1 - 2s \sum_{j=1}^d \gamma_j > 0,$$

to

$$\mathbb{E} e^{s|\xi|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2s \sum_{j=1}^d \gamma_j}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2s \mathbb{E} \xi^2}}.$$

Udowodnimy jeszcze przez indukcję następujący elementarny fakt, z którego powyżej korzystaliśmy.

Jeżeli $0 \leq a_j < 1$, $j = 1, \dots, d$, to

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_d) \geq 1 - (a_1 + \dots + a_d). \quad (2.2)$$

Nierówność jest oczywiście prawdziwa, gdy $d = 1$. Mnożąc nierówność (2.2) przez $(1 - a_{d+1}) > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} (1 - a_1) \dots (1 - a_{d+1}) &\geq (1 - (a_1 + \dots + a_d))(1 - a_{d+1}) \\ &= 1 - (a_1 + \dots + a_d) - a_{d+1} + (a_1 + \dots + a_d)a_{d+1} \\ &\geq 1 - a_1 - \dots - a_{d+1}. \quad \square \end{aligned}$$

2.2 Rozkłady gaussowskie na przestrzeniach Hilberta

Niech $E = H$ będzie przestrzenią Hilberta, z iloczynem skalarnym $\langle x, y \rangle$ i z normą

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x, y \in H.$$

Na przykład $H = \mathbb{R}^d$ lub $H = l^2$ z iloczynem skalarnym

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i, \quad x = (x_i), \quad y = (y_i) \in l^2.$$

Wiadomo, że dowolny ciągły funkcjonal liniowy h na H jest postaci

$$x \longrightarrow \langle h, x \rangle,$$

dla pewnego $h \in H$.

Lemat 2.3 Niech μ będzie miarą gaussowską na przestrzeni Hilberta H . Wtedy odwzorowanie

$$a \longrightarrow \int_H \langle a, x \rangle \mu(dx)$$

jest ciągłym funkcjonalem liniowym,

$$\left| \int_H \langle a, x \rangle \mu(dx) \right| \leq M \|a\|, \quad a \in H \quad (2.3)$$

oraz dla pewnego $m \in H$ i dowolnego $a \in H$,

$$\int_H \langle a, x \rangle \mu(dx) = \langle m, a \rangle.$$

Dowód. Zauważmy, że gaussowska zmienna losowa $x \rightarrow \langle a, x \rangle$ ma wszystkie momenty i dlatego

$$\int |\langle a, x \rangle| \mu(dx) < \infty, \quad a \in H.$$

Dla dowolnej liczby naturalnej n zdefiniujmy

$$K_n = \left\{ a \in H; \int_H |\langle a, x \rangle| \mu(dx) \leq n \right\}.$$

Zbiór K_n jest domknięty, bo gdy $a_m \rightarrow a$ i

$$\int_H |\langle a_m, x \rangle| \mu(dx) \leq n.$$

to

$$\begin{aligned} n &\geq \liminf_m \int_H |\langle a_m, x \rangle| \mu(dx) \geq \int_H \liminf_m |\langle a_m, x \rangle| \mu(dx) \\ &\geq \int_H |\langle a, x \rangle| \mu(dx). \end{aligned}$$

Ponieważ przestrzeń H jest zupełna i $\bigcup_n K_n = H$, to na podstawie twierdzenia Baire'a, jeden ze zbiorów K_n zawiera kulę. A więc dla pewnego n_0 istnieje $r > 0$, że dla dowolnego $y \in H$, $|y| \leq r$,

$$\int_H |\langle y_0 + y, x \rangle| \mu(dx) \leq n_0.$$

Stąd, gdy $|y| \leq r$, to

$$\int_H |\langle y, x \rangle| \mu(dx) \leq n_0 + \int_H |\langle y_0, x \rangle| \mu(dx) \leq M < \infty.$$

Dlatego dla dowolnego $y \in H$, $y \neq 0$,

$$\int_H \left| \left\langle \frac{y}{|y|} r, x \right\rangle \right| \mu(dx) \leq M.$$

Czyli

$$\int_H |\langle y, x \rangle| \mu(dx) \leq \frac{M}{r} |y|, \quad y \neq 0. \quad (2.4)$$

Jednak (2.4) zachodzi oczywiście i dla $y = 0$. Kończy to dowód (2.3). $\square$

Zauważmy, że

$$\int_H \langle a, x - m \rangle \mu(dx) = 0, \quad \forall a.$$

Jeżeli $x \in \mathbb{R}^d$ i $e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, to

$$x = \sum_{i=1}^d x_i e_i.$$

Dlatego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^p \mu(dx) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{i=1}^d \langle x, e_i \rangle e_i \right|^p \mu(dx) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^d |\langle x, e_i \rangle| \right)^p \mu(dx) \\ &\leq d^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} |\langle x, e_i \rangle|^p \mu(dx) < \infty. \end{aligned}$$

Zasadniczy wynik dotyczący miar gaussowskich na przestrzeniach Hilberta jest treścią następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1 *Załóżmy, że zmienna losowa ξ ma rozkład gaussowski na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H . Wtedy $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$. Co więcej, jeżeli dla wektora $m \in H$,*

$$\mathbb{E} \langle \xi, a \rangle = \langle m, a \rangle, \quad a \in H$$

i jeżeli dla liczby rzeczywistej s , $2s \mathbb{E}|\xi - m|^2 < 1$, to

$$\mathbb{E} e^{s|\xi - m|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2s \mathbb{E}|\xi - m|^2}}.$$

Dowód. Ponieważ dla dowolnego a , $\mathbb{E} \langle \xi - m, a \rangle = 0$, można zakładać, bez zmniejszania ogólności rozważań, że dla dowolnego $a \in H$, $\mathbb{E} \langle \xi, a \rangle = 0$. Niech (e_j) będzie bazą ortonormalną i zupełną w H . Wtedy

$$\xi = \sum_j \langle \xi, e_j \rangle e_j$$

i szereg zbiega w H . Zdefiniujmy

$$\xi_N = \sum_{j=1}^N \langle \xi, e_j \rangle e_j.$$

Zmienna losowa $(\langle \xi, e_1 \rangle, \dots, \langle \xi, e_N \rangle)$ jest gaussowska o wartościach w $\mathbb{R}^N$ i na podstawie Lematu 2.2 mamy

$$\mathbb{E} e^{-|\xi_N|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \mathbb{E} |\xi_N|^2}}.$$

Ponieważ, $|\xi_N|^2 \uparrow |\xi|^2$ i $\mathbb{E} |\xi_N|^2 \uparrow \mathbb{E} |\xi|^2$ dlatego

$$\mathbb{E} e^{-|\xi|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \mathbb{E} |\xi|^2}}.$$

Gdyby $\mathbb{E} |\xi|^2 = \infty$, to wtedy $\mathbb{E} e^{-|\xi|^2} = 0$ a stąd, z prawdopodobieństwem 1, $|\xi|^2 = \infty$. Dlatego $\mathbb{E} |\xi|^2 < \infty$. Ponieważ

$$\mathbb{E} e^{s|\xi_N|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2s \mathbb{E} |\xi_N|^2}},$$

to przechodząc z N do ∞ otrzymujemy

$$\mathbb{E} e^{s|\xi|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2s \mathbb{E} |\xi|^2}},$$

jeżeli tylko $2s \mathbb{E} |\xi|^2 < 1$. $\square$

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że $\mathbb{E} |\xi| < \infty$ i $\mathbb{E} \xi = m$. Ponadto

$$|\mathbb{E} \langle \xi - m, a \rangle \langle \xi - m, b \rangle| \leq \mathbb{E} |\xi - m|^2 |a| |b|, \quad a, b \in H.$$

Dlatego istnieje taki operator liniowy, ograniczony i symetryczny Q , że

$$\mathbb{E} \langle \xi - m, a \rangle \langle \xi - m, b \rangle = \langle Qa, b \rangle, \quad a, b \in H.$$

Operator ten, zwany *operatorem kowariancji*, jest ponadto dodatnio określony

$$\langle Qa, a \rangle \geq 0, \quad a \in H.$$

Okazuje się, że ma on skończony ślad. Niech mianowicie (e_k) będzie dowolną bazą ortonormalną zupełną w przestrzeni H . Wtedy

$$|\xi|^2 = \sum_n \langle \xi, e_k \rangle^2.$$

Dlatego

$$\text{Tr } Q = \sum_k \langle Qe_k, e_k \rangle = \sum_k \mathbb{E} \langle \xi, e_k \rangle^2 = \mathbb{E} |\xi|^2 < \infty.$$

Ma miejsce następująca charakteryzacja.

Twierdzenie 2.2 *Dla dowolnego wektora $m \in H$ i operatora $Q \geq 0$, takiego że $\text{Tr } Q < \infty$ istnieje zmienna gaussowska ξ , taka że*

$$\mathbb{E} \xi = m, \quad \mathbb{E} \langle \xi - m, a \rangle \langle \xi - m, b \rangle = \langle Qa, b \rangle, \quad a, b \in H.$$

Dowód. Niech (e_j) i (γ_j) będą odpowiednio wektorami własnymi i wartościami własnymi operatora Q . Wtedy $\gamma_j \geq 0$ dla dowolnego naturalnego j i

$$Qx = \sum_j \gamma_j \langle x, e_j \rangle e_j, \quad \text{Tr } Q = \sum_j \gamma_j < \infty.$$

Zdefiniujmy $\xi = \sum_j \sqrt{\gamma_j} \eta_j e_j$, gdzie (ξ_j) są gaussowskimi zmiennymi niezależnymi z $\mathcal{L}(\eta_j) = N_1$. Niech

$$\xi_K = \sum_{j=1}^K \sqrt{\gamma_j} \eta_j e_j.$$

Ponieważ

$$\mathbb{E} \sum_j (\sqrt{\gamma_j} \eta_j)^2 = \sum_j \gamma_j < \infty,$$

dlatego ciąg (ξ_K) jest zbieżny prawie wszędzie do ξ . Co więcej, dla dowolnego $a \in H$,

$$\langle \xi, a \rangle = \sum_j \sqrt{\gamma_j} \eta_j \langle e_j, a \rangle.$$

Dlatego

$$\mathcal{L}(\langle \xi, a \rangle) = N_{\sum_j \gamma_j \langle e_j, a \rangle^2}.$$

□

Rozkłady gaussowskich zmiennych losowych są całkowicie określone przez parametry m, Q . Tak jak w przypadku skończonego wymiarowego rozkładu te oznaczamy przez $N_{(m,Q)}$ lub $N(m, Q)$ a gdy $m = 0$ przez N_Q .

2.3 Miary gaussowskie na $L^2(\Theta)$

Zajmiemy się teraz ważnym przykładem ilustrującym fizyczny sens operatora kowariancji Q .

Dowolna miara gaussowska na przestrzeni $L^2(\Theta)$ jest określona przez operator kowariancji $Q \geq 0$ i funkcję $m \in L^2(\Theta)$. Ponieważ operator Q ma skończony ślad i jest dodatnio określony, dlatego operator $Q^{\frac{1}{2}}$ jest operatorem Hilberta-Schmidta. Jednakże każdy operator Hilberta-Schmidta na przestrzeni $L^2(\Theta)$ jest operatorem całkowym o jądrze q_0 całkowalnym z kwadratem. Mianowicie

$$Q^{\frac{1}{2}}a(\xi) = \int_{\Theta} q_0(\xi, \eta) a(\eta) d\eta, \quad \xi \in \Theta, \quad a \in L^2(\Theta),$$

gdzie

$$\int_{\Theta \times \Theta} (q_0(\xi, \eta))^2 d\xi d\eta < \infty.$$

Z dodatniej określoności operatora Q wynika, że

$$\int_{\Theta} q_0(\xi, \eta) a(\xi) a(\eta) d\xi d\eta \geq 0, \quad a \in L^2(\Theta).$$

Operator Q , jako kwadrat operatora całkowego, jest również operatorem całkowym, i ma jądro q postaci

$$q(\xi, \eta) = \int_{\Theta} q_0(\xi, \zeta) q_0(\zeta, \eta) d\zeta, \quad \xi, \eta \in \Theta.$$

Podamy teraz warunek dostateczny, by funkcja q , była jądrem operatora kowariancji pewnej miary gaussowskiej na $L^2(\Theta)$. Przypomnijmy, że ciągła funkcja q zdefiniowana na $\Theta \times \Theta$ jest *dodatnio określona*, gdy dla dowolnej naturalnej liczby M , dowolnych liczb λ_j , $j = 1, \dots, M$ i dowolnych elementów $\zeta_j \in \Theta$, $j = 1, \dots, M$,

$$\sum_{i,j=1}^M q(\zeta_i, \zeta_j) \lambda_i \lambda_j \geq 0.$$

Twierdzenie 2.3 *Niech Θ będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym w $\mathbb{R}^d$, a q funkcją ciągłą, symetryczną i dodatnio określoną na $\Theta \times \Theta$. Wtedy operator $Q : L^2(\Theta) \rightarrow L^2(\Theta)$ dany wzorem*

$$Qx(\zeta) = \int_{\Theta} q(\zeta, \eta) x(\eta) d\eta, \quad x \in L^2(\Theta), \quad \zeta \in \Theta$$

jest dodatnio określony na $L^2(\Theta)$ i ma skończony ślad.

Dowód. Zaczniemy od dowodu dodatniej określoności operatora Q . Wystarczy sprawdzić, że

$$\int_{\Theta} \int_{\Theta} q(\zeta, \eta) x(\zeta) x(\eta) d\zeta d\eta \geq 0 \quad (2.5)$$

dla dowolnej funkcji ciągłej x . Istotnie, niech x będzie dowolnym elementem $H = L^2(\Theta)$. Istnieje wtedy ciąg funkcji ciągłych (x_N) , taki że

$$\|x - x_N\|_{L^2(\Theta)}^2 = \int_{\Theta} |x_N(\zeta) - x(\zeta)|^2 d\zeta \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} I &= \left| \int_{\Theta} \int_{\Theta} q(\zeta, \eta) x(\zeta) x(\eta) d\zeta d\eta - \int_{\Theta} \int_{\Theta} q(\zeta, \eta) x_N(\zeta) x_N(\eta) d\zeta d\eta \right| \\ &\leq \left(\int_{\Theta} \int_{\Theta} q^2(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Theta} \int_{\Theta} (x(\zeta) x(\eta) - x_N(\zeta) x_N(\eta))^2 d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$x(\zeta) x(\eta) - x_N(\zeta) x_N(\eta) = (x(\zeta) - x_N(\zeta)) x(\eta) + x_N(\zeta) (x(\eta) - x_N(\eta)),$$

mamy

$$\begin{aligned}
I &\leq \|q\|_{L^2(\Theta \times \Theta)} \left(\int_{\Theta} \int_{\Theta} x^2(\eta) (x(\zeta) - x_N(\zeta))^2 d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \|q\|_{L^2(\Theta \times \Theta)} \left(\int_{\Theta} \int_{\Theta} x_N^2(\zeta) (x(\eta) - x_N(\eta))^2 d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|q\|_{L^2(\Theta \times \Theta)} [\|x\|_{L^2(\Theta)} \|x - x_N\|_{L^2(\Theta)} + \|x_N\|_{L^2(\Theta)} \|x - x_N\|_{L^2(\Theta)}] \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Jeśli więc nierówność (2.5) zachodzi dla funkcji ciągłych, to zachodzi i dla dowolnych $x \in L^2(\Theta)$.

Założmy więc, że $x \in C(\Theta)$. Niech $\epsilon > 0$ i $\Theta = \bigcup_{i=1}^M A_i$, gdzie $A_1, \dots, A_M$ to zbiory rozłączne, a $\zeta_i \in A_i$, $i = 1, \dots, M$ to punkty, takie że dla dowolnych $\zeta \in A_i$, $\eta \in A_i$, $i, j = 1, \dots, M$,

$$|q(\zeta, \eta) - q(\zeta_i, \eta_i)| \leq \epsilon, \quad |x(\zeta) - x(\zeta_i)| \leq \epsilon.$$

Z dodatniej określoności funkcji q wynika, że

$$\sum_{i,j=1}^M q(\zeta_i, \zeta_j) x(\zeta_i) x(\zeta_j) |A_i| |A_j| \geq 0,$$

gdzie $|A_i|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru A_i .

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
J &= \left| \int_{\Theta} \int_{\Theta} q(\zeta, \eta) x(\zeta) x(\eta) d\zeta d\eta - \sum_{i,j=1}^M q(\zeta_i, \zeta_j) |A_i| |A_j| \right| \\
&= \left| \sum_{i,j=1}^M \iint_{A_i \times A_j} [q(\zeta, \eta) x(\zeta) x(\eta) - q(\zeta_i, \zeta_j) x(\zeta_i) x(\zeta_j)] d\zeta d\eta \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^M |A_i| |A_j| \sup_{\substack{\zeta \in A_i \\ \eta \in A_j}} |q(\zeta, \eta) x(\zeta) x(\eta) - q(\zeta_i, \zeta_j) x(\zeta_i) x(\zeta_j)|.
\end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{\zeta \in A_i \\ \eta \in A_j}} |q(\zeta, \eta)x(\zeta)x(\eta) - q(\zeta_i, \zeta_j)x(\zeta_i)x(\zeta_j)| \\
& \leq \sup_{\substack{\zeta \in A_i \\ \eta \in A_j}} |q(\zeta, \eta)x(\zeta_n)x(\zeta_j) - q(\zeta, \eta)x(\zeta)x(\eta)| \\
& + \sup_{\substack{\zeta \in A_i \\ \eta \in A_j}} |q(\zeta, \eta) - q(\zeta_i, \zeta_j)||x(\zeta)||x(\eta)| \\
& \leq \|q\|_{C(\Theta \times \Theta)} \sup_{\substack{\zeta \in A_i \\ \eta \in A_j}} |x(\zeta)x(\eta) - x(\zeta_i)x(\zeta_j)| + \epsilon \|x\|_{C(\Theta)}^2 \\
& \leq \|q\|_{C(\Theta \times \Theta)} \left(\sup_{\substack{\zeta \in A_i \\ \eta \in A_j}} |x(\zeta) - x(\zeta_i)||x(\eta)| + \sup_{\substack{\zeta \in A_i \\ \eta \in A_j}} |x(\zeta_i)||x(\eta) - x(\zeta_j)| \right) \\
& + \epsilon \|x\|_{C(\Theta)}^2 \\
& \leq 2\epsilon \|q\|_{C(\Theta \times \Theta)} \|x\|_{C(\Theta)} + \epsilon \|x\|_{C(\Theta)}^2.
\end{aligned}$$

Dlatego

$$\begin{aligned}
J & \leq \epsilon \left(2\|q\|_{C(\Theta \times \Theta)} \|x\|_{C(\Theta)} + \|x\|_{C(\Theta)}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^M |A_i| \right) \left(\sum_{j=1}^M |A_j| \right) \\
& \leq \epsilon \left(2\|q\|_{C(\Theta \times \Theta)} \|x\|_{C(\Theta)} + \|x\|_{C(\Theta)}^2 \right) |\Theta|^2.
\end{aligned}$$

Z dowolności $\epsilon > 0$ wynika, że

$$\int_{\Theta} \int_{\Theta} q(\zeta, \eta)x(\zeta)x(\eta)d\zeta d\eta \geq 0.$$

Przechodzimy do dowodu zwartości operatora Q . Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
|Qx(\zeta)| & = \left| \int_{\Theta} q(\zeta, \eta)x(\eta)d\eta \right| \leq \left(\int_{\Theta} q^2(\zeta, \eta)d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Theta} x^2(\eta)d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \|q\|_{C(\Theta \times \Theta)} |\Theta|^{\frac{1}{2}} \|x\|_{L^2(\Theta)}, \quad \zeta \in \Theta
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
|Qx(\zeta) - Qx(\zeta')| & \leq \int_{\Theta} |q(\zeta, \eta) - q(\zeta', \eta)| |x(\eta)| d\eta \\
& \leq \left(\sup_{\eta, \zeta, \zeta' \in \Theta} |q(\zeta, \eta) - q(\zeta', \eta)| \right) |\Theta|^{\frac{1}{2}} \|x\|_{L^2(\Theta)}.
\end{aligned}$$

Czyli operator Q przekształca ustaloną kulę w przestrzeni $H = L^2(\Theta)$ w zbiór funkcji wspólnie ograniczonych i jednakowo ciągłych, czyli w zbiór zwarty w $C(\Theta)$ a tym bardziej w zbiór zwarty w $L^2(\Theta)$.

Ponieważ operator Q jest samosprężony i zwarty dlatego istnieje baza ortonormalna, zupełna (e_n) w $L^2(\Theta)$, składająca się z funkcji własnych operatora Q , odpowiadających wartościom własnym $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Z dodatniości Q wynika, że $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots$, a z tego, że $Qe_j = \lambda_j e_j$, otrzymujemy, że $e_j \in C(\Theta)$, $j = 1, \dots$, jeżeli tylko $\lambda_j \neq 0$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań przyjmujemy, że $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots$. Zdefiniujemy

$$q_N(\zeta, \eta) = \sum_{j=1}^N \lambda_j e_j(\zeta) e_j(\eta), \quad \zeta, \eta \in \Theta,$$

$$Q_N x(\zeta) = \int_{\Theta} q_N(\zeta, \eta) x(\eta) d\eta, \quad \zeta \in \Theta, x \in H.$$

Jest jasne, że operator Q_N jest operatorem symetrycznym o ciągłym jądrze q_N . Ponadto

$$(Q - Q_N)(x) = \sum_{j>N} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j, \quad x \in H.$$

Dlatego operator $Q - Q_N$ jest operatorem dodatnio określonym

$$\int_{\Theta} \int_{\Theta} (q(\zeta, \eta) - q_N(\zeta, \eta)) x(\zeta) x(\eta) d\zeta d\eta \geq 0, \quad x \in L^2(\Theta). \quad (2.6)$$

Z (2.6) wynika łatwo, że

$$k_N(\zeta, \zeta) = q(\zeta, \zeta) - q_N(\zeta, \zeta) \geq 0, \quad \zeta \in \Theta.$$

Istotnie, założmy, że dla pewnego $\zeta' \in \Theta$,

$$k_N(\zeta', \zeta') = -\epsilon < 0.$$

Wtedy również

$$k_N(\zeta, \eta) \leq -\frac{\epsilon}{2}, \quad \zeta, \eta \in B(\zeta', r) \cap \Theta,$$

dla pewnego $r > 0$, takiego że $|B(\zeta', r) \cap \Theta| > 0$. Jeżeli więc $x' \geq 0$ jest funkcją ciągłą nieujemną, taką że

$$x'(\zeta') > 0, \quad x'(\zeta) = 0 \quad \text{dla } \zeta \notin B(\zeta', r) \cap \Theta,$$

to

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} \int_{\Theta} k_N(\zeta, \eta) x'(\zeta) x'(\eta) d\zeta d\eta &= \int_{\Theta \cap B(\zeta', r)} \int_{\Theta \cap B(\zeta', r)} k_N(\zeta, \eta) x'(\zeta) x'(\eta) d\zeta d\eta \\ &\leq -\frac{\epsilon}{2} \left(\int_{\Theta \cap B(\zeta', r)} x'(\zeta) d\zeta \right)^2 < 0, \end{aligned}$$

co prowadzi do sprzeczności. Czyli

$$k_N(\zeta, \zeta) \geq 0, \quad \zeta \in \Theta.$$

W szczególności dla dowolnego naturalnego N ,

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j e_j^2(\zeta) \leq q(\zeta, \zeta), \quad \zeta \in \Theta.$$

Stąd

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = \sum_{j=1}^N \lambda_j \int_{\Theta} e_j^2(\zeta) d\zeta \leq \int_{\Theta} q(\zeta, \zeta) d\zeta < \infty.$$

Dlatego

$$\sum_j \lambda_j < \infty.$$

□

Jako produkt uboczny otrzymaliśmy w dowodzie, że szereg

$$\sum_n \lambda_n e_n(\zeta) e_n(\eta),$$

jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny na zbiorze $\Theta \times \Theta$ i

$$q(\zeta, \eta) = \sum_n \lambda_n e_n(\zeta) e_n(\eta), \quad \zeta, \eta \in \Theta, \quad \text{Tr } Q = \int_{\Theta} q(\zeta, \zeta) d\zeta.$$

2.4 Proces Wienera

W najogólniejszym przypadku proces Wienera może przyjmować wartości w liniowej przestrzeni topologicznej E . Do najważniejszych przypadków zalicza się sytuacje, gdy E jest przestrzenią Banacha (np. $C[0, 1]$), przestrzenią Hilberta (np. $\mathbb{R}^d$, $L^2[0, 1]$), lub przestrzenią dystrybucji temperowanych (np. $S^1(\mathbb{R}^d)$). Przez E^* oznaczamy przestrzeń ciągłych funkcjonałów liniowych na E , a przez $\mathcal{E}$, σ -ciało podzbiorów borelowskich E , czyli najmniejsze σ -ciało podzbiorów E względem którego wszystkie funkcjonały z E^* są mierzalne. Przestrzeń dystrybucji temperowanych $S^1(\mathbb{R}^d)$ to przestrzeń sprzężoną do przestrzeni $S(\mathbb{R}^d)$ funkcji klasy C^∞ , których wszystkie pochodne cząstkowe znikają do 0 w nieskończoności szybciej, niż dowolna potęga $|x|$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Rodzina rzeczywistych zmiennych losowych $W(t)$, $t \geq 0$ określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywa się *uogólnionym procesem Wienera*, gdy

1. Dla dowolnego $w \in \Omega$, $W(\cdot, w)$ jest funkcją ciągłą startującą z 0.

2. Proces W ma przyrosty niezależne, czyli dla dowolnych $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(w : W(t_{j+1}, w) - W(t_j, w) \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, n) \\ = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(w : W(t_{j+1}, w) - W(t_j, w) \in \Gamma_j). \end{aligned}$$

3. Proces W ma przyrosty jednorodne w czasie, to znaczy dla dowolnych $t \geq 0$ i $h \geq 0$,

$$\mathbb{P}(w : W(t+h, w) - W(t, w) \in \Gamma) = \mathbb{P}(w : W(h, w) \in \Gamma).$$

Zachodzi następujące klasyczne twierdzenie.

Twierdzenie 2.4 Dla uogólnionego procesu Wienera W istnieją liczby $m, q, q > 0$, takie że

$$W(t) = mt + \tilde{W}(t), \quad t \geq 0,$$

gdzie $\tilde{W}$ jest procesem gaussowskim o ciągłych trajektoriach, dla którego

$$\mathbb{E} \tilde{W}(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad \mathbb{E} \tilde{W}(t) \tilde{W}(s) = q t \wedge s, \quad s, t \geq 0.$$

Z twierdzenia wynika w szczególności, że

$$\mathcal{L}(\tilde{W}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi tq}} e^{-\frac{1}{2qt} x^2} dx.$$

Jeżeli $m = 0$ to uogólniony proces Wienera będziemy nazywać krótko *procesem Wienera* a gdy $m = 0$ i $q = 1$, *unormowanym procesem Wienera*.

Proces stochastyczny $W(t)$, $t \geq 0$ o wartościach w przestrzeni E nazywamy procesem Wienera, gdy ma on ciągłe trajektorie, startuje z 0 i dla dowolnego $x^* \in E^*$ proces

$$\langle W(t), x^* \rangle, \quad t \geq 0$$

jest rzeczywistym procesem Wienera.

Przejdziemy teraz do przypadku gdy przestrzeń E jest przestrzenią Hilberta H . Wtedy rozkład zmiennej $W(1)$ jest gaussowski o wartości oczekiwanej 0, którego operator kowariancji oznaczamy będziemy przez Q .

Lemat 2.4 Dla dowolnych $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{E} \langle W(t), a \rangle \langle W(s), b \rangle = t \wedge s \langle Qa, b \rangle.$$

Dowód. Niech Q_h będzie operatorem kowariancji zmiennej $W(h)$, $h \geq 0$. Wtedy kowariancja $W(t+h) - W(t)$ jest również Q_h i

$$\begin{aligned} \langle Q_t a, b \rangle &= \mathbb{E} \langle (W(t) - W(s)) + W(s), a \rangle \langle W(t) - W(s) + W(s), b \rangle \\ &= \mathbb{E} \langle W(t) - W(s), a \rangle \langle W(t) - W(s), b \rangle \\ &\quad + \mathbb{E} [\langle W(s), a \rangle \langle W(s), b \rangle] + \langle Q_{t-s} a, b \rangle + \langle Q_s a, b \rangle. \end{aligned}$$

Stąd

$$\psi(t) = \psi(t-s) + \psi(s),$$

gdzie

$$\psi(s) = \langle Q_s a, b \rangle \quad \text{i} \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(1) = \langle Q_1 a, b \rangle.$$

Stąd $\psi(s) = s \langle Q_1 a, b \rangle$. $\square$

2.4.1 Generowanie operatorów kowariancji

Istnieje prosty sposób generowania operatorów kowariancji wyznaczających procesy Wienera.

Przykład 1. Niech $\xi(t)$, $t \in [0, 1] = \Theta$ będzie rzeczywistym procesem stochastycznym, takim że

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \mathbb{E} \xi^2(t) < \infty.$$

Zdefiniujemy

$$q(t, s) = \mathbb{E} \xi(t) \xi(s), \quad t, s \in [0, 1].$$

Wtedy

$$\sum_{i,j} q(t_i, t_j) \lambda_i \lambda_j = \sum_{i,j} \mathbb{E} \xi(t_i) \xi(t_j) \lambda_i \lambda_j = \mathbb{E} \left(\sum_{i,j} \xi(t_i) \lambda_i \right)^2 \geq 0.$$

Stąd q jest funkcją dodatnio określoną. W szczególności funkcje

$$q_1(t, s) = t \wedge s, \quad s, t \in [0, 1], \quad q_2(t, s) = t \wedge s - st, \quad s, t \in [0, 1],$$

mogą być jądrami operatorów kowariancji. Aby otrzymać jądro q_1 wystarczy założyć, że proces ξ jest rzeczywistym, unormowanym procesem Wienera β a jądro q_2 otrzymujemy przyjmując, że ξ jest tak zwanym *mostem brownowskim*, czyli

$$\xi(t) = \beta(t) - t\beta(1), \quad t \in [0, 1].$$

Istotnie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\beta(t) - t\beta(1))(\beta(s) - s\beta(1)) &= \mathbb{E} \beta(t) \beta(s) - s \mathbb{E} \beta(t) \beta(1) \\ &\quad - t \mathbb{E} \beta(1) \beta(s) + st \mathbb{E} \beta^2(1) = t \wedge s - st - ts + st = t \wedge s - st. \end{aligned}$$

Dlatego $q_2(t, s) = t \wedge s - st$, $s, t \in [0, 1]$.

Przykład 2. Niech ν będzie unormowaną miarą symetryczną na $\mathbb{R}^1$. Wtedy

$$q(t, s) = \int e^{i(t-s)x} \nu(dx), \quad t, s \in \mathbb{R}^1$$

jest funkcją ciągłą dodatnio określoną. W szczególności następujące funkcje mogą być jądrami operatorów kowariancji

$$q(t, s) = e^{-|t-s|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 2,$$

$$q(t, s) = \begin{cases} \frac{\sin a(t-s)}{a(t-s)}, & t \neq s \\ 1, & t = s, \end{cases}$$

$$q(t, s) = \begin{cases} \frac{2}{a^2} \frac{1 - \cos a(t-s)}{|t-s|^2}, & t \neq s \\ 1, & t = s. \end{cases}$$

2.4.2 Rozwinięcia procesów Wienera

Jeżeli (e_j) jest ortonormalną bazą zupełną w przestrzeni H , to

$$W(t) = \sum_i \langle W(t), e_i \rangle e_i, \quad t \geq 0.$$

Jeżeli dodatkowo elementy (e_i) są wektorami własnymi operatora kowariancji Q czyli, gdy $Qe_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots$, to

$$\mathbb{E} \langle W(t), e_i \rangle \langle W(s), e_j \rangle = t \wedge s \langle Qe_i, e_j \rangle = \delta_{(i-j)}, \quad t, s \geq 0.$$

Dlatego procesy

$$\beta_i(t) = \frac{\langle W(t), e_i \rangle}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad t \geq 0,$$

to znormalizowane i niezależne procesy Wienera oraz

$$W(t) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \beta_i(t) e_i, \quad t \geq 0.$$

W szczególności, gdy $H = L^2([0, \pi])$ oraz

$$q(\xi, \eta) = \xi \wedge \eta, \quad \eta \in [0, \pi],$$

to mamy przedstawienie

$$W(t, \xi) = \sum_n \frac{\beta_n(t)}{n + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left[\frac{2n+1}{2} \xi \right].$$

2.4.3 Pochodna dystrybucyjna procesu Wienera

Niech β będzie rzeczywistym procesem Wienera na przedziale $[0, 1]$. Ponieważ ma on ciągłe trajektorie, to dla dowolnego $w \in \Omega$ istnieje pochodna dystrybucyjna

$$\frac{d\beta(\cdot, w)}{dt} = \dot{\beta}(\cdot, w).$$

Z definicji pochodnej

$$(\dot{\beta}, \psi) = -(\psi', \beta), \quad \text{dla } \psi \in C_0^\infty(0, 1).$$

Mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\dot{\beta}, \phi)(\dot{\beta}, \psi) &= \mathbb{E} \int_0^1 \beta(s) \phi'(s) \int_0^1 \beta(r) \psi'(r) dr \\ &= \int_0^1 \int_0^1 s \wedge t \phi'(s) \psi'(t) ds dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 s \wedge t \phi'(s) ds \right) \psi'(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^t s \phi'(s) ds + t \int_t^1 \phi'(s) ds \right) \psi'(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(t\phi(t) - \int_0^t \phi(s) ds - t\phi(t) \right) \psi'(t) dt \\ &= - \int_0^1 \left(\int_0^t \phi(s) ds - t\phi(t) \right) \psi'(t) dt \\ &= - \int_0^1 \left(\int_0^t \phi(s) ds \right) \psi'(t) dt = \int_0^1 \phi(t) \psi(t) dt \\ &= \langle \phi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Czyli formalnie operator kowariancji pochodnej procesu Wienera jest operatorem identycznościowym i dlatego pochodną tę nazywa się *białym szumem*.

Równania stochastyczne z szumem addytywnym

Rozdział ten jest wprowadzeniem do teorii równań stochastycznych nie wykorzystującym analizy stochastycznej. Punktem wyjścia jest klasyczna całka Stieltjesa. Rozważania ograniczamy do przestrzeni skończone wymiarowych, jednak wiele z nich można łatwo uogólnić na przypadek nieskończone wymiarowy. Dowodzimy, że rozwiązanie ma własność Markowa i wyprowadzamy tak zwane równanie Kołmogorowa. Dokładniej analizujemy równania stochastyczne liniowe.

3.1 Całka Paley’a–Wienera–Zygmunda

Niech W będzie procesem Wienera przyjmującym wartości w przestrzeni Hilberta U a Φ funkcją mierzalną określoną na przedziale $[0, \infty)$, której wartościami są operatory przekształcające przestrzeń U w przestrzeń Hilberta H . Naszym celem jest zdefiniowanie całki

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s), \quad t \geq 0,$$

dla możliwie szerokiej klasy funkcji Φ . Główną trudność, którą należy pokonać, to nieregularność trajektorii procesu W . Są one co prawda funkcjami ciągłymi ale mają nieograniczoną wariację i dlatego korzystanie z teorii całki Stieltjesa wymaga dużej ostrożności.

Założmy, że $U = H = \mathbb{R}^1$ i $\Phi = \phi$ jest funkcją o wartościach rzeczywistych i przypomnijmy podstawowy rezultat dotyczący całki Stieltjesa.

Lemat 3.1 *Jeżeli $f \in C^1[a, b]$ oraz $g \in C[a, b]$, to*

$$\int_a^b f(t) dg(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Dowód. Niech

$$\xi_0 = a \leq \eta_0 \leq \xi_1 \leq \eta_1 \leq \cdots \leq \eta_i \leq \xi_{i+1} \leq \cdots \leq \xi_N = b.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{N-1} f(\eta_i)(g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)) = \sum_{i=0}^{N-1} f(\eta_i)g(\xi_{i+1}) - \sum_{i=0}^{N-1} f(\eta_i)g(\xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^N g(\xi_i)f(\eta_{i-1}) - \sum_{i=0}^{N-1} g(\xi_i)f(\eta_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} g(\xi_i)(f(\eta_{i-1}) - f(\eta_i)) + g(\xi_N)f(\eta_{N-1}) - g(\xi_0)f(\eta_0) \end{aligned}$$

(z twierdzenia o wartości średniej dla pewnych $\tilde{\eta}_i \in [\eta_{i-1}, \eta_i]$)

$$\begin{aligned} &= - \sum_{i=1}^{N-1} g(\xi_i)f'(\tilde{\eta}_i)(\eta_i - \eta_{i-1}) + g(\xi_N)f(\eta_{N-1}) - g(\xi_0)f(\eta_0) \\ &= - \sum_{i=1}^{N-1} g(\tilde{\eta}_i)f'(\tilde{\eta}_i)(\eta_i - \eta_{i-1}) + g(\xi_N)f(\eta_{N-1}) - g(\xi_0)f(\eta_0) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} [g(\xi_i) - g(\tilde{\eta}_i)]f'(\tilde{\eta}_i)(\eta_i - \eta_{i-1}). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\left| \sum_{i=1}^{N-1} (g(\xi_i) - g(\tilde{\eta}_i))f'(\tilde{\eta}_i)(\eta_i - \eta_{i-1}) \right| \leq [\sup_{\eta} |f'(\eta)| \sup_i |g(\xi_i) - g(\tilde{\eta}_i)|](b - a)$$

i funkcja g jest jednostajnie ciągła na $[a, b]$, mamy

$$I \rightarrow - \int_a^b g(s)f'(s) ds + g(b)f(b) - g(a)f(a).$$

Lemat 3.2 *Jeżeli $\phi, \psi \in C^1[0, t]$ a β jest rzeczywistym procesem Wienera, to*

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \phi(s) d\beta(s) \int_0^t \psi(u) d\beta(u) \right) = \int_0^t \phi(s)\psi(s) ds.$$

Dowód. Z elementarnych własności całki Riemana mamy

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\int_0^t \phi(s) d\beta(s) \int_0^t \psi(u) d\beta(u) \right) \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\phi(t)\beta(t) - \int_0^t \phi'(s)\beta(s) ds \right) \left(\psi(t)\beta(t) - \int_0^t \psi'(u)\beta(u) du \right) \right] \\
&= \phi(t)\psi(t)t - \phi(t) \int_0^t \psi'(u) t \wedge u du - \psi(t) \int_0^t \phi'(u) t \wedge u du \\
&\quad + \int_0^t \int_0^t \phi'(s)\psi'(u) s \wedge u ds du \\
&= \phi(t)\psi(t)t - \phi(t) \left(\int_0^t \psi'(u)u du \right) - \psi(t) \left(\int_0^t \phi'(u)u du \right) \\
&\quad + \int_0^t \int_0^t \phi'(s)\psi'(u) s \wedge u ds du \\
&= \phi(t)\psi(t)t - \phi(t) \left[\psi(u)u \Big|_0^t - \int_0^t \psi(u) du \right] \\
&\quad - \psi(t) \left[\phi(u)u \Big|_0^t - \int_0^t \phi(u) du \right] + \int_0^t \int_0^t \phi'(s)\psi'(u) s \wedge u ds du \\
&= -\phi(t)\psi(t)t + \phi(t) \int_0^t \psi(u) du + \psi(t) \int_0^t \phi(u) du \\
&\quad + \int_0^t \int_0^t \phi'(s)\psi'(u) s \wedge u ds du.
\end{aligned}$$

Przekształcając całkę podwójną otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \phi'(s) \left[\int_0^t [\psi'(u) s \wedge u] du \right] ds \\
&= \int_0^t \phi'(s) \left[\int_0^s \psi'(u)u du + s \int_0^t \psi'(u) du \right] ds \\
&= \phi(s) \int_0^s \psi(u)u du \Big|_0^t - \int_0^t \phi(s)\psi'(s) ds + \int_0^t \phi'(s)s(\psi(t) - \psi(s)) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(t) \int_0^t \psi'(u)u \, du - \left[\phi(s)s\psi(s) \Big|_0^t - \int_0^t (\phi(s)s)' \psi(s) \, ds \right] \\
&\quad + \psi(t) \int_0^t \phi'(s)s \, ds - \int_0^t \phi'(s)s\psi(s) \, ds \\
&= \phi(t) \left[\psi(t)t - \int_0^t \psi(u) \, du \right] - \phi(t)\psi(t)t + \int_0^t \phi'(s)s\psi(s) \, ds \\
&\quad + \int_0^t \phi(s)\psi(s) \, ds + \psi(t) \left[\phi(s)s \Big|_0^t - \int_0^t \phi(s) \, ds \right] - \int_0^t \phi'(s)s\psi(s) \, ds \\
&= \phi(t)\psi(t)t - \phi(t) \int_0^t \psi(u) \, du - \phi(t)\psi(t)t \\
&\quad + \int_0^t \phi(s)\psi(s) \, ds + \psi(t)\phi(t)t - \psi(t) \int_0^t \phi(s) \, ds.
\end{aligned}$$

Ustalmy liczbę $t > 0$. Dla dowolnej funkcji $\phi \in C^1[0, t]$ i unormowanego procesu Wienera $\beta(t)$, $t \geq 0$, kładziemy

$$I(\phi) = \phi(t)\beta(t) - \phi(0)\beta(0) - \int_0^t \phi'(s)\beta(s) \, ds.$$

Wtedy $I(\phi)$ jest zmienną gaussowską, taką że $\mathbb{E} I(\phi) = 0$ i

$$\mathbb{E} (I(\phi))^2 = \int_0^t (\phi(s))^2 ds = \|\phi\|^2,$$

gdzie $\|\phi\|$ oznacza normę funkcji ϕ w przestrzeni $L^2(0, t)$. Dlatego I można traktować jako izometryczne odwzorowanie z podzbioru gęstego przestrzeni $L^2(0, t)$ w przestrzeń zmiennych losowych $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ma ono dokładnie jedno rozszerzenie na całą przestrzeń $L^2(0, t)$. Dla dowolnej funkcji $\phi \in L^2(0, t)$ całką Paley'a–Wienera–Zygmunda nazywamy odpowiadającą funkcji ϕ zmienną losową przy tym rozszerzeniu i oznaczamy ją tak samo jak całkę dla regularnych funkcji ϕ . Jeżeli $T > 0$ jest zadaną liczbą to dla dowolnych funkcji ϕ, ψ należących do $L^2(0, T)$ i dowolnego $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \phi(s) d\beta(s) \int_0^t \psi(u) d\beta(u) \right) = \int_0^t \phi(s)\psi(s) \, ds. \quad (3.1)$$

Definicja całki i wzór (3.1) uogólniają się łatwo na przypadek większej liczby wymiarów. Niech mianowicie W będzie procesem Wienera o wartościach w $\mathbb{R}^d$ z kowariancją Q . Istnieje wtedy proces Wienera B , którego składowe β_j , $j = 1, \dots, d$ są niezależnymi i unormowanymi procesami Wienera (jego kowariancja jest macierzą identycznościową I), że

$$W(t) = Q^{1/2} B(t), \quad t \geq 0.$$

Jeżeli $Q^{1/2} = (\gamma_{ij})$ i $\Phi(t) = (\phi_{kl}(t))$, $t \in [0, T]$ jest funkcją macierzową o d kolumnach i n wierszach, której elementy są funkcjami całkowalnymi z kwadratem to kładziemy

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s) = \int_0^t \Phi(s) Q^{1/2} dB(s), \quad t \in [0, T].$$

Całka stochastyczna jest więc procesem o wartościach w $\mathbb{R}^n$, którego współrzędne są równe

$$\sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d \gamma_{lk} \int_0^t \phi_{ik}(s) d\beta_l(s), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, T].$$

Kowariancja całki jest macierzą Q_t daną wzorem

$$Q_t = \int_0^t \Phi(s) Q (\Phi(s))^* ds. \quad (3.2)$$

W szczególności mamy następujące *wzory izometryczne*

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t \Phi(s) dW(s) \right|^2 = \int_0^t \text{Tr} \Phi(s) Q \Phi(s)^*, \quad (3.3)$$

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t \Phi(s) dW(s) \right|^2 = \int_0^t \|\Phi(s) Q^{1/2}\|_2^2 ds, \quad (3.4)$$

gdzie $\|(g_{ij})\|_2$ jest *normą Hilberta–Schmidta* macierzy Γ ,

$$\|(g_{ij})\|_2 = \left(\sum_{ij} (g_{ij}^2) \right)^{1/2}.$$

Podobnie, niech W będzie nieskończenie wymiarowym procesem Wienera na przestrzeni Hilberta U z operatorem kowariancji Q , to jest

$$\mathbb{E} \langle W(t), a \rangle \langle W(s), b \rangle = t \wedge s \langle Qa, b \rangle, \quad t, s \in [0, \infty),$$

i niech $\Phi(t)t \in [0, T]$ będzie funkcją, której wartości są w przestrzeni $L(U, H)$ ciągłych operatorów liniowych działających z U w H wtedy całka stochastyczna funkcji Φ względem procesu W , jest procesem o wartościach w H , dla którego mają miejsce wzory (3.2) i (3.3). Niech, na przykład, Ψ i Φ będą funkcjami o wartościach w $L(U, H)$. Dla dowodu (3.2) ustalmy t i zdefiniujmy

$$Y = \int_0^t \Psi(s) dW(s), \quad Z = \int_0^t \Phi(s) dW(s).$$

Wzór (3.2) przyjmuje wtedy postać

$$\mathbb{E} \langle Y, a \rangle_H \langle Z, b \rangle_H = \left\langle \left[\int_0^t \Psi(s) Q (\Phi(s))^* ds \right] a, b \right\rangle, \quad a, b \in H.$$

Zachodzenie tego wzoru sprawdzimy jedynie dla przypadku, gdy funkcje Ψ i Φ są stałe, $\Psi(s) = \bar{\Psi}$ i $\Phi(s) = \bar{\Phi}$, $s \in [0, t]$. Wtedy $Y = \bar{\Psi} W(t)$, $Z = \bar{\Phi} W(t)$ oraz

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \langle \bar{\Psi} W(t), a \rangle_H \langle \bar{\Phi} W(t), b \rangle_H &= \mathbb{E} (\langle W(t), \bar{\Psi}^* a \rangle_U \langle W(t), \bar{\Phi}^* b \rangle_U) \\ &= \langle Q \bar{\Psi}^* a, \bar{\Phi}^* b \rangle_U t = \langle \bar{\Phi} Q \bar{\Psi}^* a, b \rangle_H t \\ &= \left\langle \left(\int_0^t \bar{\Phi}(s) Q \bar{\Psi}^*(s) ds \right) a, b \right\rangle_H. \end{aligned}$$

Podobnie postępujemy by udowodnić (3.3).

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int_0^t \Psi(s) dW(s) \right|_H^2 &= \mathbb{E} \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \int_0^t \Psi(s) dW(s), e_j \right\rangle_H^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left\langle \int_0^t \Psi(s) dW(s), e_j \right\rangle_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \left[\int_0^t \Psi(s) Q \Psi^*(s) ds \right] e_j, e_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle \Psi(s) Q \Psi^*(s) e_j, e_j \rangle ds = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t |Q^{\frac{1}{2}} \Psi^*(s) e_j|^2 ds \\ &= \int_0^t \|Q^{\frac{1}{2}} \Psi^*(s)\|_{HS}^2 ds = \int_0^t \|\Psi(s) Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2 ds \\ &= \int_0^t \|\Psi(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach $\|\Psi\|_{HS}$ oznacza normę Hilberta–Schmidta operatora Ψ a $\mathcal{H} = L_{HS}(V, H)$ przestrzeń wszystkich operatorów Hilberta–Schmidta z przestrzeni $V = Q^{1/2}U$ z naturalną hilbertowską normą, w przestrzeń H .

3.2 Równania stochastyczne w $\mathbb{R}^d$

Przedmiotem naszych rozważań będą równania postaci

$$dX(t) = F(X(t))dt + dW(t), \quad X(0) = x, \quad (3.5)$$

gdzie F jest odwzorowaniem z $\mathbb{R}^d$ w $\mathbb{R}^d$. Wiele rozważań przenosi się na ogólniejszy przypadek, gdy $\mathbb{R}^d$ zastąpi się nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta. Równanie (3.5) traktować będziemy jako równanie całkowe

$$X(t) = x + \int_0^t F(X(s))ds + W(t), \quad t \geq 0. \quad (3.6)$$

3.2.1 Liniowe równania stochastyczne

Rozpocznijmy od ważnego przypadku równania liniowego

$$dX(t) = A X(t) dt + dW(t), \quad X(0) = x, \quad (3.7)$$

równoważnego równaniu

$$X(t) = x + \int_0^t A X(s) ds + W(t), \quad t \geq 0. \quad (3.8)$$

Przypomnijmy pewne fakty z teorii macierzy. Jeżeli $A = (a_{ij})$ jest macierzą $d \times d$ to kładziemy

$$\|A\| = \|(a_{ij})\| = \sum_{i,j=1}^d |a_{ij}|.$$

Lemat 3.3 *Zachodzi*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

i dla dowolnej stałej α ,

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|.$$

Dowód. Udowodnimy jedynie nierówność. Z definicji mamy

$$\|AB\| = \sum_{i,k} \left| \sum_j a_{ij} b_{jk} \right| \leq \sum_{i,j,k} |a_{ij}| |b_{jk}|.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \|A\|\|B\| &= \left(\sum_{i,k} |a_{i,k}| \right) \left(\sum_{l,m} |b_{l,m}| \right) \\ &= \sum_{i,k,l,m} |a_{i,k}| |b_{l,m}| \geq \sum_{i,j,k} |a_{i,k}| |b_{k,j}|. \end{aligned}$$

Skąd teza. $\square$

Definiujemy

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n,$$

to

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

Lemat 3.4 Dla dowolnych macierzy kwadratowych A i B , takich że $AB = BA$, mamy $e^A e^B = e^{A+B}$.

Dowód. Z definicji

$$e^A e^B = \left(\sum_n \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_m \frac{B^m}{m!} \right) = \sum_{n,m} \frac{A^n B^m}{n! m!} = \sum_k \left(\sum_{n+m=k} \frac{1}{n! m!} A^n B^m \right).$$

Ponieważ

$$(A+B)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} A^n B^{k-n} = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} A^n B^{k-n},$$

mamy

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = e^{A+B}. \quad \square$$

Twierdzenie 3.1 Rozwiązanie równania (3.7) dane jest wzorem

$$X(t) = e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-s)} dW(s), \quad t \geq 0.$$

Dowód. Zdefiniujmy

$$\tilde{X}(t) = e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-s)} dW(s), \quad t \geq 0.$$

Z własności całki Stieltjesa mamy

$$\int_0^t e^{-As} dW(s) = e^{-At} W(t) + A \int_0^t e^{-As} W(s) ds.$$

Stąd

$$A\tilde{X}(s) = Ae^{As} x + AW(s) + A^2 e^{As} \int_0^s e^{-Au} W(u) du,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t A\tilde{X}(s) ds &= A \int_0^t e^{As} x ds + A \int_0^t W(s) ds \\
&\quad + \int_0^t \int_0^s A^2 e^{As} e^{-Au} W(u) du ds \\
&= \int_0^t \frac{d}{ds} (e^{As} x) ds + A \int_0^t W(s) ds \\
&\quad + \int_0^t \int_0^s \mathbb{I}_{[0,s]}(u) A^2 e^{As} e^{-Au} W(u) du ds \\
&= e^{At} x - x + A \int_0^t W(s) ds \\
&\quad + \int_0^t A \left[\int_u^t A e^{A(s-u)} ds \right] W(u) du \\
&= e^{At} x - x + A \int_0^t W(s) ds \\
&\quad + \int_0^t A \left[e^{(t-u)A} - I \right] W(u) du \\
&= e^{At} x - x + A \int_0^t e^{A(t-u)} W(u) du, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Dlatego $\tilde{X}$ spełnia równanie (3.7). $\square$

W podobny sposób można udowodnić, że rozwiązaniem równania

$$dX = (A X(t) + f(t)) dt + dW(t), \quad X(0) = x$$

jest proces

$$X(t) = e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} dW(s).$$

Jako ilustrację przedstawimy rozwiązanie równania *zaburzonego oscylatora harmonicznego*. Niech W będzie jednowymiarowym procesem Wienera. Równanie

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\alpha x(t) + \frac{dW}{dt}, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (3.9)$$

gdzie $\alpha > 0$, opisuje ruch cząstki wokół położenia równowagi pod wpływem siły sprężystej i losowego zaburzenia. Z formalnego opisu (3.9) przechodzimy do równania w $\mathbb{R}^2$, definiując prędkość $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$,

$$d \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -\alpha, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} dt + d\tilde{W}(t), \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\tilde{W}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ W(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Z ogólnego wzoru na rozwiązanie

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

równania liniowego otrzymujemy

$$X(t) = e \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -\alpha, & 0 \end{pmatrix} t + \int_0^t e \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -\alpha, & 0 \end{pmatrix} (t-s) d\tilde{W}(s), \quad t \geq 0.$$

Ponieważ dla

$$A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -\alpha, & 0 \end{pmatrix},$$

$A^{2k} = (-\alpha)^k I$, $A^{2k+1} = (-\alpha)^k A$, $k = 0, 1, \dots$ i jak wiadomo

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dlatego

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha}t), & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha}t) \\ -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}t), & \cos(\sqrt{\alpha}t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Otrzymujemy więc ostatecznie

$$x(t) = (\cos(\sqrt{\alpha}t))x_0 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\sin(\sqrt{\alpha}t))v_0 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^t \sin(\sqrt{\alpha}(t-s)) dW(s),$$

$$v(t) = -\sqrt{\alpha}(\sin(\sqrt{\alpha}t))x_0 + (\cos \sqrt{\alpha}t)v_0 + \int_0^t \cos(\sqrt{\alpha}(t-s)) dW(s), \quad t \geq 0.$$

3.3 Własność Markowa i równanie Kołmogorowa

Wracamy do stochastycznego równania (3.5) równoważnego równaniu całkowemu

$$X(t) = x + \int_0^t F(X(s))ds + W(t), \quad t \geq 0. \quad (3.10)$$

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2 *Założmy, że dla pewnego $K > 0$,*

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \quad (3.11)$$

Wtedy, dla dowolnej funkcji ciągłej $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $u(t)$, $t \geq 0$, taka że

$$u(t) = \int_0^t F(u(s))ds + f(t), \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Dowód. Ustalmy $T > 0$ i rozpatrzmy równanie (3.12) w przestrzeni $C = C[0, T; \mathbb{R}^d]$. Niech mianowicie $\mathcal{F}$ będzie odwzorowaniem przestrzeni $C[0, T; \mathbb{R}^d]$ w $C[0, T; \mathbb{R}^d]$ dane wzorem

$$F(v)(t) = \int_0^t F(v(s)) ds + f(t), \quad t \in [0, T].$$

To, że $\mathcal{F}$ działa w przestrzeni C wynika z założeń. W C , dla dowolnego $\lambda \geq 0$ wprowadzamy tak zwaną normę Bieleckiego

$$\|v\|_\lambda = \sup_{0 \leq t \leq T} e^{-\lambda t} |v(t)|$$

równoważną tradycyjnej normie $\|v\|_0$. Mamy

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(v)(t) - \mathcal{F}(\bar{v})(t)| &\leq \int_0^t |F(v(s)) - F(\bar{v}(s))| ds \leq K \int_0^t |v(s) - \bar{v}(s)| ds \\ &\leq K \int_0^t e^{\lambda s} e^{-\lambda s} |v(s) - \bar{v}(s)| ds \\ &\leq K \left[\int_0^t e^{\lambda s} ds \right] \|v - \bar{v}\|_\lambda \\ &\leq K \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \|v - \bar{v}\|_\lambda. \end{aligned}$$

Stąd

$$\|\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\bar{v})\|_\lambda \leq \frac{K}{\lambda} \|v - \bar{v}\|_\lambda.$$

Niech λ będzie dowolną liczbą większą niż K . Z twierdzenia o odwzorowaniach zwężających otrzymujemy istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (3.12). $\square$

Rozwiązanie u równania (3.12) oznaczać będziemy przez $u(\cdot, f)$. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ będzie rodziną σ -ciał zawartych w $\mathcal{F}$, taką że $W(t)$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalną zmienną losową, a przyrosty $W(s) - W(t)$ dla $s \geq t$ są niezależne od $\mathcal{F}_t$. Z powyższego twierdzenia wynika, że równanie (3.10) ma dokładnie jedno rozwiązanie, które oznaczać będziemy $X(t, x)$. Ogólniej dla zmiennej losowej ζ , $\mathcal{F}_0$ -mierzalnej, niech $X(t, \zeta)$, $t \geq 0$ oznacza rozwiązanie równania

$$X(t) = \zeta + \int_0^t F(X(s)) ds + W(t), \quad t \geq 0.$$

Zauważmy, że

$$X(t, \zeta) = u(t, \zeta + W(\cdot)), \quad t \geq 0.$$

Zdefiniujemy operatory przejścia P_t przyporządkowujące borelowskiej funkcji ograniczonej ϕ funkcję ograniczoną w myśl wzoru

$$P_t \phi(x) = \mathbb{E} \phi(X(t, x)), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Poniższe twierdzenie wyraża fakt, że proces X ma własność Markowa.

Twierdzenie 3.3 Dla dowolnego mierzalnego i ograniczonego Φ na $C[0, t; \mathbb{R}^d]$ i dowolnej mierzalnej i ograniczonej funkcji ϕ na $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}(\Phi(X(\cdot, \zeta))\phi(X(t+h, \zeta))) = \mathbb{E}(\Phi(X(\cdot, \zeta))P_h\phi(X(t, \zeta))).$$

Dowód. Wykażemy najpierw, że dla dowolnych $t, s \geq 0$ i $f \in C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$,

$$u(t+s, f) = u(s, u(t, f) + (f(t+\cdot) - f(t))). \quad (3.13)$$

Zauważmy, że jeżeli dla dowolnego $t \geq 0$,

$$u(t) = \int_0^t F(u(s)) ds + f(t),$$

to dla dowolnego $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} u(t+s) &= \int_0^{t+s} F(u(\sigma)) d\sigma + f(t+s) \\ &= \int_0^t F(u(\sigma)) d\sigma + f(t) + \int_t^{t+s} F(u(\sigma)) d\sigma + f(t+s) - f(t) \\ &= u(t) + \int_0^s F(u(t+\sigma)) d\sigma + f(t+s) - f(t). \end{aligned}$$

Ustalmy $t \geq 0$ i wprowadźmy oznaczenia

$$v(s) = u(t+s), \quad s \geq 0,$$

$$g(s) = u(t) + (f(t+s) - f(t)), \quad s \geq 0.$$

Wtedy

$$v(s) = \int_0^s F(v(\sigma)) d\sigma + g(s), \quad s \geq 0$$

i dlatego

$$v(s) = u(s, g), \quad s \geq 0.$$

Stąd wynika (3.13). W szczególności

$$X(t+h, \zeta) = u(t+h, \zeta + W(\cdot)) = u(h, X(t, \zeta) + W(t+\cdot) - W(t)).$$

Proces

$$\hat{W}(s) = W(t+s) - W(t), \quad s \geq 0$$

jest procesem Wienera na $\mathbb{R}^d$ z kowariancją Q . Dlatego

$$\mathbb{E}(\Phi(X(\cdot, \zeta))\phi(X(t+h, \zeta))) = \mathbb{E}(\Phi(X(\cdot, \zeta))\phi(u(h, X(t, \zeta) + \hat{W}(\cdot)))).$$

Proces $X(\cdot, \zeta)$, rozpatrywany jako zmienna losowa o wartościach w $C[0, t; \mathbb{R}^d]$, jest niezależny od procesu $\hat{W}(\cdot)$, rozpatrywanego (po obcięciu) jako zmienna

losowa o wartościach w $C[0, h; \mathbb{R}^d]$. Dlatego, dla dowolnej funkcji Ψ mierzalnej i ograniczonej na $C[0, t; \mathbb{R}^d] \times C[0, h; \mathbb{R}^d]$ mamy

$$\mathbb{E}(\Psi(X(\cdot, \zeta), \hat{W}(\cdot))) = \mathbb{E}(\hat{\Psi}(X(\cdot, \zeta))),$$

gdzie

$$\hat{\Psi}(f) = \mathbb{E}(\Psi(f, \hat{W}(\cdot))), \quad f \in C[0, t; \mathbb{R}^d].$$

W naszym przypadku

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(f) &= \mathbb{E}(\Phi(f)\phi(u(h, f(t) + \hat{W}(\cdot))) \\ &= \Phi(f)\mathbb{E}(\phi(u(h, f(t) + \hat{W}(\cdot)))) = \Phi(f)P_h\phi(f(t)). \end{aligned}$$

Stąd teza. $\square$

W szczególności, dla $0 \leq t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t_1, \zeta) \in \Gamma_1 \text{ i } X(t_2, \zeta) \in \Gamma_2) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\Gamma_1}(X(t_1, \zeta))\mathbb{I}_{\Gamma_2}(X(t_2, \zeta))) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\Gamma_1}(X(t_1, \zeta))P_{t_2-t_1}(X(t_1, \zeta), \Gamma_2)). \end{aligned}$$

Gdy $\Gamma_1 = \mathbb{R}^d$ i $\zeta = x$ otrzymujemy

$$P_{t_2}(x, \Gamma_2) = \mathbb{E}(P_{t_2-t_1}(X(t_1, x), \Gamma_2)) = \int_{\mathbb{R}^d} P_{t_2-t_1}(y, \Gamma_2)P_{t_1}(x, dy). \quad (3.14)$$

Czyli dla dowolnych $t, s \geq 0$ i dowolnego zbioru borelowskiego Γ ,

$$P_{t+s}(x, \Gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} P_s(y, \Gamma)P_t(x, dy). \quad (3.15)$$

Dlatego równanie stochastyczne (3.5) definiuje stochastyczny układ dynamiczny w sensie Rozdziału 1. Zależność nazywa się *równaniem Chapmana–Kołmogorowa*.

Wprowadźmy oznaczenie

$$u(t, x) = P_t\phi(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Paraboliczne równanie pojawiające się w poniższym twierdzeniu nazywa się *równaniem Kołmogorowa*.

Twierdzenie 3.4 *Załóżmy, że odzorowanie F spełnia warunek Lipschitza i ma ciągle i ograniczone pochodne do rzędu 3 włącznie. To dla dowolnej funkcji $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $P_t\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ oraz funkcja $u(t, x) = P_t\phi(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ spełnia równanie*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \langle Du(t, x), F(x) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr } Q D^2 u(t, x), \\ u(0, x) &= \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Twierdzenie wynika z następującego lematu.

Lemat 3.5 *Jeżeli F spełnia warunek Lipschitza i jest odwzorowaniem ograniczonym, to wtedy dla dowolnej funkcji $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\frac{d}{dt} P_t f(x) |_{t=0} = \langle Df(x), F(x) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr } Q D^2 f(x).$$

Rzeczywiście. Z lematu mamy

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \langle Du(0, x), F(x) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr } Q D^2 u(0, x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Przyjmijmy, że funkcje

$$P_t \phi(x), \quad DP_t \phi(x), \quad D^2 P_t \phi(x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$$

są ciągłe i ograniczone. Ustalmy $s \geq 0$ i zdefiniujmy

$$\bar{\phi}(x) = P_s \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Wtedy

$$\bar{u}(t, x) = P_t(P_s \phi)(x) = u(t + s, x).$$

Dlatego,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \langle Du(t, x), F(x) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr } Q D^2 u(t, x).$$

Dowód Lematu 3.5. Przypomnijmy, że gdy funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu 2 włącznie, to wtedy dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \langle Df(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(x)(y - x), y - x \rangle \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \langle [D^2 f(x) - D^2 f(x + \eta\sigma(y - x))] (y - x), y - x \rangle \sigma d\sigma d\eta. \end{aligned}$$

Dla dowodu tej tożsamości przyjmijmy że $d = 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \left(\int_0^1 f'(x + \sigma(y - x)) d\sigma \right) (y - x) \\ &= \int_0^1 \left[f'(x) + \sigma \int_0^1 f''(x + \eta\sigma(y - x)) d\eta (y - x) \right] d\sigma (y - x). \end{aligned}$$

Stąd wynika równość. Ponieważ

$$X(t) - x = \int_0^t F(X(s)) ds + W(t),$$

dlatego, zakładając, dla prostoty, że $d = 1$,

$$\begin{aligned}
\phi(X(t)) - \phi(x) &= \phi'(x) \left(\int_0^t F(X(s)) ds + W(t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \phi''(x) \left(\int_0^t F(X(s)) ds + W(t) \right)^2 \\
&\quad + R(t) \left(\int_0^t F(X(s)) ds + W(t) \right)^2.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \phi(X(t)) - \phi(x) &= \phi'(x) \left(\mathbb{E} \int_0^1 F(X(s)) ds \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \phi''(x) \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t F(X(s)) ds \right)^2 + 2W(t) \int_0^t F(X(s)) ds + W^2(t) \right] \right) \\
&\quad + \mathbb{E} (R(t)) \left[\left(\int_0^t F(X(s)) ds \right)^2 + 2W(t) \int_0^t F(X(s)) ds + W^2(t) \right].
\end{aligned}$$

Dlatego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \mathbb{E} (\phi(X(t)) - \phi(x)) &= \phi'(x) \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t F(X(s)) ds + \frac{1}{2} \phi''(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \phi''(x) \frac{1}{2t} \left[\mathbb{E} \left(\int_0^t F(X(s)) ds \right)^2 + 2W(t) \int_0^t F(X(s)) ds \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \frac{1}{t} R(t) \left[\left(\int_0^t F(X(s)) ds \right)^2 + 2W(t) \int_0^t F(X(s)) ds + W^2(t) \right].
\end{aligned}$$

Ale

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t F(X(s)) ds \right| \leq \|F\|_\infty, \quad \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^t |F(X(s))F(X(u))| ds du \leq t \|F\|_\infty^2$$

i z twierdzenia Lebesgue'a o przechodzeniu z granicą pod całkę

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{t} \int_0^t F(X(s)) ds \right) \longrightarrow F(x), \quad \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \int_0^t F(X(s))F(X(u)) ds du \longrightarrow 0.$$

Z następujących elementarnych oszacowań

$$\begin{aligned}
\left| \mathbb{E} W(t) \frac{1}{t} \int_0^t F(X(s)) ds \right| &\leq (\mathbb{E} W^2(t))^2 \left(\mathbb{E} \left| \frac{1}{t} \int_0^t F(X(s)) ds \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{t} \|F\|_\infty
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
& |R(t)| \\
&= \left| \int_0^1 \int_0^1 \left[\phi''(x) - \phi'' \left(x + \eta \sigma \left(\int_0^t F(X(s)) ds + W(t) \right) \right) \right] \sigma d\sigma d\eta \right| \\
&\leq 2 \|\phi''\|_\infty
\end{aligned}$$

oraz

$$\mathbb{E} |R(t)| \frac{W^2(t)}{t} = \mathbb{E} |R(t)| \left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}} \right)^2 \leq (\mathbb{E} |R(t)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

otrzymujemy, przez przejście graniczne, wymaganą zależność. $\square$

Miary niezmiennicze

Jednym z ważniejszych zadań teorii procesów stochastycznych jest ustalenie, czy dany proces Markowa ma miarę niezmienniczą i ewentualne znalezienie tej miary. W niniejszym rozdziale podajemy wstępne wyniki na temat miar niezmienniczych dla tak zwanych układów gradientowych i układów dyssypatywnych. Wyniki tego rozdziału będą wykorzystane w następnym rozdziale poświęconym układom spinowym fizyki statystycznej.

4.1 Miary niezmiennicze dla układów gradientowych

Mówimy, że miara probabilistyczna μ jest *niezmiennicza dla funkcji przejścia* (P_t) pewnego procesu Markowa, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru borelowskiego Γ i $t \geq 0$,

$$\mu(\Gamma) = \int \mu(dx) P_t(x, \Gamma).$$

Będziemy zajmować się równaniem

$$dX(t) = F(X(t))dt + dW(t), \quad X(0) = x \quad (4.1)$$

analizowanym w rozdziale poprzednim jako równanie (1.10). Zauważmy, że gdy warunek początkowy $X(0)$ rozwiązania X równania (4.1) jest zmienną losową o rozkładzie μ to rozkład $X(t)$ jest również równy μ dla dowolnego $t \geq 0$. Niech L oznacza następujący operator różniczkowy, związany z równaniem (4.1),

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \text{Tr } Q D^2 f(x) + \langle Df(x), F(x) \rangle.$$

Twierdzenie 4.1 (i) *Załóżmy, że funkcja g ciągła i z ciągłymi pochodnymi do rzędu 2, jest gęstością miary niezmienniczej dla półgrupy przejścia (P_t) związanej z równaniem (4.1). Wtedy*

$$L^*g(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (4.2)$$

(ii) Niech funkcja g będzie rozwiązaniem równania (4.2) z ciągłymi i ograniczonymi pochodnymi do rzędu 2. Jeżeli g jest gęstością pewnej miary probabilistycznej μ , to wtedy μ jest miarą niezmienniczą dla (P_t) .

Dowód (i). Mamy

$$\int (P_t f - f) d\mu = 0, \quad f \in C_b(\mathbb{R}^d).$$

Założmy, że $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, wtedy $u(t, x) = P_t f(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ jest klasycznym rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = Lu(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ponadto

$$\frac{1}{t}(P_t f(x) - f(x)) \longrightarrow Lf(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

w sposób jednostajnie ograniczony i dlatego

$$(\mu, Lf) = 0.$$

Ale $Lf \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$. Stąd dla dostatecznie dużego N ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) Lf(x) dx = \int_{\substack{-N \leq x_i \leq N \\ i=1, \dots, d}} g(x) Lf(x) dx$$

i dlatego

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) Lf(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} L^*g(x) f(x) dx = 0.$$

Przy założeniu, że g ma ciągle pochodne do rzędu 2, otrzymujemy $L^*g = 0$.

Dowód (ii). Jeżeli $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, to wtedy, dla ustalonego t , pochodne cząstkowe do rzędu 2 funkcji

$$\int_0^t P_s f(x) ds, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

znikają w nieskończoności. Ponieważ $L^*g = 0$, dlatego

$$(\mu, P_t f - f) = \left\langle g, L \int_0^t P_s f ds \right\rangle_{L^2} = \left\langle L^*g, \int_0^t P_s f ds \right\rangle = 0.$$

Stąd teza. $\square$

Dla tak zwanych *równań gradientowych*, istnieją proste wzory na miary niezmiennicze. Poniższy fakt został zauważony przez Kołmogorowa.

Twierdzenie 4.2 *Niech U będzie funkcją rzeczywistą różniczkowalną z ciągłymi i ograniczonymi pochodnymi do rzędu 2 włącznie. Probabilistyczna miara niezmiennicza μ dla równania*

$$dX(t) = \frac{1}{2} DU(X(t)) dt + dW(t)$$

ma postać

$$\mu(dx) = \frac{e^{U(x)}}{Z} dx,$$

gdzie Z jest stałą normującą.

Dowód. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że gęstość

$$g = \frac{e^U}{Z}$$

spełnia równanie (4.2). Istotnie

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} e^{U(x)} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \frac{\partial U}{\partial x_j}(x) \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{U(x)} \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{U(x)} \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} e^{U(x)} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \frac{\partial U}{\partial x_j}(x) \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial x_j} e^{U(x)} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{U(x)} \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \sum_{j=1}^d e^{U(x)} \frac{\partial U}{\partial x_j}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{U(x)} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) dx. \end{aligned}$$

□

W nieskończenie wymiarowych sytuacjach mamy często do czynienia z równaniem

$$dX = \left[AX + \frac{1}{2} DU(X) \right] dt + dW(t), \quad (4.3)$$

gdzie $L = -A$ jest dodatnio określonym (na ogół nieograniczonym) operatorem. Niech μ będzie miarą niezmienniczą dla (4.3). Formalnie

$$Lx = \frac{1}{2} D \langle Lx, x \rangle$$

i

$$-Lx + \frac{1}{2}DU(x) = DH(x),$$

gdzie

$$H(x) = -\langle Lx, x \rangle + U(x)$$

a D oznacza operację różniczkowania. Ponadto

$$\mu(dx) = \frac{1}{Z}e^{-H(x)}dx = \frac{1}{Z}e^{-\langle Lx, x \rangle + U(x)}dx.$$

W szczególności dla miary niezmienniczej μ_A równania Ornsteina–Uhlenbecka

$$dX = AXdt + dW$$

otrzymujemy wzór

$$\mu_A(dx) = e^{\langle Ax, x \rangle} dx. \quad (4.4)$$

Ponieważ na przestrzeniach nieskończenie wymiarowych nie ma odpowiednika miary Lebesgue’a dlatego powyższe wzory tracą swoją moc. Jednakże miara niezmiennicza μ_A dla równania Ornsteina–Uhlenbecka często istnieje, chociaż nie jest dana wzorem (4.4). Dobrym kandydatem na miarę niezmienniczą μ dla równania (4.3) jest dlatego

$$\mu(dx) = Z^{-1}e^{U(x)}\mu_A(dx).$$

Zabieg taki nazywa się w fizyce *renormalizacją*.

4.2 Miary niezmiennicze dla układów dyssypatywnych

Układy gradientowe są specjalnym przypadkiem tak zwanych *układów dyssypatywnych* na przestrzeni Hilberta H . Są to rozwiązania równań postaci

$$dX = (AX + F(X))dt + dW(t), \quad (4.5)$$

gdzie A jest odwzorowaniem liniowym a

$$G(x) = Ax + F(x), \quad x \in H$$

jest *przekształceniem dyssypatywnym*. Przekształcenie $G : H \rightarrow H$ jest dyssypatywne, gdy

$$\langle G(x) - G(y), x - y \rangle \leq 0, \quad x, y \in H.$$

Zasadniczą rolę w naszych rozważaniach będzie pełniło rozwiązanie Y równania Ornsteina–Uhlenbecka

$$dY = AY dt + dW(t), \quad Y(0) = 0. \quad (4.6)$$

Twierdzenie 4.3 *Załóżmy, że następujące warunki są spełnione:*

1. Odwzorowania $A + \omega_1$ i $F + \omega_2$ są dyssypatywne i $\omega_1 + \omega_2 = \omega > 0$,
2. $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E} [|Y(t)| + |F(Y(t))|] < \infty$.

Wtedy dla równania (4.5) istnieje dokładnie jedna miara niezmiennicza μ . Ponadto istnieje stała $C > 0$, taka że dla dowolnej ograniczonej i lipschitzowskiej funkcji ϕ ,

$$|P_t \phi(x) - (\phi, \mu)| \leq C(1 + |x|)e^{-\frac{\omega}{2}t} \|\phi\|_{Lip}.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}F(X(s))ds + \int_0^t e^{A(t-s)}dW(s) \\ &= e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}F(X(s))ds + Y(t). \end{aligned}$$

Stąd

$$Z(t) = X(t) - Y(t), \quad t \geq 0,$$

spełnia

$$Z(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}F(Z(s) + Y(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Równoważnie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z(t) &= AZ(t) + F(Z(t) + Y(t)), \quad t \geq 0, \\ Z(0) &= x. \end{aligned}$$

Niech $\bar{W}$ będzie dwustronnym procesem Wienera, czyli procesem określonym na całej prostej $(-\infty, +\infty)$, takim że procesy

$$W(t) = \bar{W}(t), \quad \bar{W}(-t), \quad t \geq 0$$

są niezależnymi procesami Wienera o identycznym operatorze kowariancji. Dla dowolnego dodatniego λ połóżmy

$$Y^\lambda(t) = \int_{-\lambda}^t e^{A(t-s)}d\bar{W}(s), \quad t \geq -\lambda.$$

Ponadto niech X^λ będzie rozwiązaniem następującego równania,

$$\begin{aligned} dX^\lambda &= AX^\lambda + F(X^\lambda)dt + d\bar{W}, \quad t \geq -\lambda, \\ X^\lambda(-\lambda) &= x. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} dZ^\lambda &= AZ^\lambda + F(Z^\lambda + Y^\lambda), \\ Z^\lambda(-\lambda) &= x. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt} |Z^\lambda(t)| = \left\langle \frac{Z^\lambda(t)}{|Z^\lambda(t)|}, \frac{d}{dt} Z^\lambda(t) \right\rangle = \frac{1}{|Z^\lambda(t)|} \left\langle Z^{\lambda(t)}, AZ^\lambda + F(Z^\lambda + Y^\lambda) \right\rangle.$$

Ponieważ dla dowolnych $a, b \in H$,

$$\begin{aligned} \langle (a - b), (A + \omega_1)(a - b) \rangle &\leq 0, \\ \langle a - b, (F + \omega_2)a - (F + \omega_2)b \rangle &\leq 0, \end{aligned}$$

mamy

$$\begin{aligned} \langle Z^\lambda, (A + \omega_1)(Z^\lambda) \rangle &\leq 0, \\ \langle Z^\lambda, (F + \omega_2)(Z^\lambda + Y^\lambda) - (F + \omega_2)(Y^\lambda) \rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

Z elementarnych przekształceń wynika, że

$$\begin{aligned} \langle Z^\lambda, AZ^\lambda + F(Z^\lambda + Y^\lambda) \rangle &= \langle Z^\lambda, (A + \omega_1)Z^\lambda - \omega_1 Z^\lambda \rangle \\ &+ \langle Z^\lambda, F(Z^\lambda + Y^\lambda) + \omega_2(Z^\lambda + Y^\lambda) - (F(Y^\lambda) + \omega_2 Y^\lambda) + F(Y^\lambda) - \omega_2 Z^\lambda \rangle \\ &\leq -\omega_1 |Z^\lambda(t)|^2 - \omega_2 |Z^\lambda(t)|^2 + \langle Z^\lambda(t), F(Y^\lambda(t)) \rangle \\ &\leq -\omega_1 |Z^\lambda(t)|^2 + |Z^\lambda(t)| |F(Y^\lambda(t))|. \end{aligned}$$

Czyli

$$\frac{d}{dt} |Z^\lambda(t)| \leq -\omega |Z^\lambda(t)| + |F(Y^\lambda(t))|,$$

a stąd

$$\begin{aligned} |Z^\lambda(t)| &\leq e^{-\omega(t+\lambda)} |x| + \int_{-\lambda}^t e^{-\omega(t-s)} |F(Y^\lambda(s))| ds, \\ \mathbb{E} |Z^\lambda(t)| &\leq |x| + \frac{1}{\omega} \sup_{s \geq -\lambda} \mathbb{E} |F(Y^\lambda(s))|, \quad t \geq -\lambda. \end{aligned}$$

Co więcej

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |X^\lambda(t)| &\leq \mathbb{E} (|Z^\lambda(t)| + |Y^\lambda(t)|) \\ &\leq |x| + \frac{1}{\omega} \sup_{s \geq -\lambda} \mathbb{E} |F(Y^\lambda(s))| + \sup_{s \geq -\lambda} |Y^\lambda(s)| \leq |x| + C. \end{aligned}$$

Dlatego

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} |Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)| \\
&= \frac{1}{|Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)|} \left\langle Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y), \frac{d}{dt} (Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)) \right\rangle \\
&= \frac{1}{|Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)|} \left\langle Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y), A [Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)] \right. \\
&\quad \left. + F(Z^\lambda(t, x) + Y^\lambda(t)) - F(Z^\lambda(t, y) + Y^\lambda(t)) \right\rangle \\
&= \frac{1}{|Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)|} \left\langle Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y), (A + \omega_1) (Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)) \right. \\
&\quad - \omega_1 (Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)) + F(Z^\lambda(t, x) + Y^\lambda(t)) \\
&\quad + \omega_2 (Z^\lambda(t, x) + Y^\lambda(t)) - F(Z^\lambda(t, y) + Y^\lambda(t)) \\
&\quad \left. - \omega_2 (Z^\lambda(t, y) + Y^\lambda(t)) - \omega_2 (Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)) \right\rangle \\
&\leq \frac{-\omega_1 |Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)|^2 - \omega_2 |Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)|^2}{|Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)|}.
\end{aligned}$$

Czyli

$$\frac{d}{dt} |Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)| \leq -\omega |Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)|,$$

a więc

$$|Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y)| \leq e^{-\omega(t+\lambda)} |x - y|.$$

Ponieważ

$$X^\lambda(t, x) - X^\lambda(t, y) = Z^\lambda(t, x) - Z^\lambda(t, y).$$

Dlatego

$$|X^\lambda(t, x) - X^\lambda(t, y)| \leq e^{-\omega(t+\lambda)} |x - y|.$$

Co więcej

$$X^\gamma(t, x) = X^\lambda(t, X^\gamma(-\lambda, x)).$$

Stąd

$$\begin{aligned}
|X^\gamma(t, x) - X^\lambda(t, x)| &= |X^\lambda(t, X^\gamma(-\lambda, x)) - X^\lambda(t, x)| \\
&\leq e^{-\omega(t+\lambda)} |X^\gamma(-\lambda, x) - x|.
\end{aligned}$$

Dlatego

$$\mathbb{E} |X^\gamma(t, x) - X^\lambda(t, x)| \leq e^{-\omega(t+\lambda)} (C + 2|x|). \quad (4.7)$$

Dla dowodu *istnienia miary niezmienniczej* założymy, że $x = 0$. Wtedy z (4.7) wynika, że gdy $\lambda \rightarrow +\infty$, to ciąg $X^\lambda(0, 0)$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^1(\Omega, H)$ i dlatego istnieje zmienna losowa ξ , taka że

$$X^\lambda(0, 0) \rightarrow \xi \quad \text{w } L^1(\Omega, H).$$

W szczególności

$$\mathcal{L}(X^\lambda(0)) \longrightarrow \mathcal{L}(\xi) = \mu,$$

gdy $\lambda \rightarrow +\infty$. Stąd wynika już łatwo, że miara μ , jest miarą niezmienniczą dla (4.1).

Dla dowodu *jedyności i wykładniczej zbieżności* przyjmijmy, że $t = \gamma$. Wtedy

$$\mathcal{L}(X^t(0)) = \mathcal{L}(X(t, x)) = P_t(x, \cdot).$$

Ponadto dla $s \geq t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |P_t\phi(x) - P_s\phi(x)| &= |\mathbb{E}(\phi(X(t, x))) - \phi(X(s, x))| \\ &= |\mathbb{E}(\phi(X^t(0)) - \phi(X^s(0)))| \\ &\leq \|\phi\|_{Lip} \mathbb{E}|X^t(0) - X^s(0)| \\ &\leq \|\phi\|_{Lip} e^{-\omega t} (2|x| + C). \end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned} |P_t\phi(x) - P_t\phi(y)| &= |\mathbb{E}\phi(X(t, x)) - \mathbb{E}\phi(X(t, y))| \\ &= |\mathbb{E}[\phi(X^t(0, x)) - \phi(X^t(0, y))]| \\ &\leq \|\phi\|_{Lip} \mathbb{E}|X^t(0, x) - X^t(0, y)| \\ &\leq \|\phi\|_{Lip} e^{-\omega t} |x - y| \end{aligned}$$

oraz

$$\mathbb{E}|X^\lambda(t) - X^\gamma(t)| \leq e^{-\omega(t+\lambda)} \mathbb{E}|X^\gamma(-\lambda) - x| \leq e^{-\omega(t+\lambda)} (2|x| + C).$$

Stąd

$$\mathbb{E}|X^\lambda(0) - X^\gamma(0)| \leq e^{-\omega\lambda} (2|x| + C).$$

Z powyższych oszacowań wynika już teza. $\square$

Układy spinowe

Rozdział poświęcony jest zastosowaniu teorii stochastycznych równań ewolucyjnych do mechaniki statystycznej. W oparciu o pracę [4] podajemy szkic dowodu istnienia miary Gibbsa dla pewnych układów spinowych. Rozpoczynamy od podania motywacji prowadzących do abstrakcyjnej definicji miary Gibbsa.

5.1 Miary Gibbsa

Niech $\mathbb{Z}^d$ będzie kratą a M pewną przestrzenią metryczną. W zastosowaniach fizycznych M jest zbiorem skończonym, zwartą rozmaitością, przestrzenią $\mathbb{R}^d$ lub przestrzenią Hilberta. Przez $\mathcal{F}$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich podzbiorów skończonych kraty $\mathbb{Z}^d$. *Konfiguracją* nazywamy dowolną funkcję x określoną na $\mathbb{Z}^d$, o wartościach w M . Zbiór wszystkich konfiguracji oznaczać będziemy przez $\mathcal{M}$. Tak więc $x = x(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{Z}^d$ i $\mathcal{M} = M^{\mathbb{Z}^d}$. *Potencjał* (J_Δ , $\Delta \in \mathcal{F}$) to rodzina funkcji rzeczywistych indeksowana elementami $\Delta \in \mathcal{F}$, taka że gdy $\Delta = \{\gamma^1, \dots, \gamma^k\}$, to

$$J_\Delta(x) = f_\Delta(x(\gamma^1), \dots, x(\gamma^k)), \quad x \in \mathcal{M},$$

gdzie f_Δ to funkcja z $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^1$. *Hamiltonian* $\mathcal{H}$ jest sumą potencjałów

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{\Delta \in \mathcal{F}} J_\Delta(x), \quad x \in \mathcal{M}.$$

Niech ν_0 będzie miarą probabilistyczną na M , a

$$\nu(dx) = \prod_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} \nu_0(dx_\gamma)$$

miarą na $\mathcal{M}$. Przez *miarę Gibbsa* rozumie się w fizyce statystycznej miarę

$$\mu(dx) = \frac{1}{C} e^{-\mathcal{H}(x)} \nu(dx).$$

Funkcja $e^{-\mathcal{H}}$ to tak zwana *gęstość Gibbsa* a liczba C to stała normująca. Niekiedy gęstość ma postać $e^{-\beta\mathcal{H}}$, gdzie parametr β ma interpretację fizyczną, na przykład jest temperatura bezwzględna.

W tak zwanym *modelu Isinga*, $M = \{-1, 1\}$,

$$J_\Delta(x) = \begin{cases} x(k)x(l) & \text{gdy } \Delta = \{k, l\} \text{ i } |k - l| = 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych konfiguracji.} \end{cases}$$

W tym przypadku przyjmuje się, że $\nu_0\{-1\} = \nu_0\{1\} = \frac{1}{2}$. Zauważmy, że Hamiltonian jest źle zdefiniowany, bo dla dowolnego x suma

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{F}} J_\Delta(x)$$

składa się z nieskończonej ilości liczb, co do modułu $= 1$. Jest to typowa trudność związana z modelowaniem i pokonanie jej związane jest z tak zwanym *równaniem D-L-R* czyli *równaniem Dobrushina–Lanforda–Ruelle’a*.

Przed sformułowaniem tego równania przypomnijmy pewien fakt z teorii rozkładów warunkowych. Niech ν_1 i ν_2 będą miarami nieujemnymi, nie koniecznienie skończonymi, określonymi odpowiednio na E_1 i E_2 , a g gęstością, względem produktu miar $\nu_1 \times \nu_2$ na $E_1 \times E_2$. Gęstość warunkową $g(x|y)$ definiuje się wzorem

$$g(x|y) = \frac{g(x, y)}{\int_{E_1} g(z, y) \nu_1(dz)}, \quad (x, y) \in E_1 \times E_2.$$

Sens tego określenia jest zawarty w poniższym dobrze znanym twierdzeniu.

Twierdzenie 5.1 *Jeżeli (X, Y) jest zmienną losową o wartościach w $E_1 \times E_2$ i*

$$\mu = \mathcal{L}(X, Y) = g(x, y) \nu_1(dx) \nu_2(dy),$$

to wtedy

$$\mathbb{E}(\phi(X) | \sigma(Y)) = \left[\int_{E_1} \phi(x) g(x|Y) \nu_1(dx) \right].$$

W szczególności

$$\int_{E_1} \phi(x) \mu(dx) = \int_{E_2} \left[\int_{E_1} \phi(x) g(x|y) \nu_1(dx) \right] \mu_2(dy),$$

gdzie μ_1 i μ_2 to rozkłady brzegowe μ .

Dla $\Gamma \in \mathcal{F}$ i dowolnego $x \in \mathcal{M}$ zapiszmy $x = (x^\Gamma, y^{\Gamma^c})$. Wtedy dla gęstości Gibbsa mamy wyrażenie

$$g_{\mathcal{H}}(x) = g_{\mathcal{H}}(x^\Gamma, y^{\Gamma^c}) = e^{-\mathcal{H}(x^\Gamma, y^{\Gamma^c})} = e^{-\sum_{\Delta \subset \Gamma^c} J_\Delta(x^\Gamma, y^{\Gamma^c}) - \sum_{\Delta \cap \Gamma \neq \emptyset} J_\Delta(x^\Gamma, y^{\Gamma^c})},$$

a dla gęstości warunkowej

$$g_{\mathcal{H}}(x^{\Gamma}|y^{\Gamma^c}) = \frac{e^{-\sum_{\Delta \subset \Gamma^c} J_{\Delta}(x^{\Gamma}, y^{\Gamma^c}) - \sum_{\Delta \cap \Gamma \neq \emptyset} J_{\Delta}(x^{\Gamma}, y^{\Gamma^c})}}{\int e^{-\sum_{\Delta \subset \Gamma^c} J_{\Delta}(z^{\Gamma}, y^{\Gamma^c}) - \sum_{\Delta \cap \Gamma \neq \emptyset} J_{\Delta}(z^{\Gamma}, y^{\Gamma^c})} \nu_1(dz^{\Gamma})},$$

gdzie

$$\nu_1(dz^{\Gamma}) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \nu_0(dz_{\gamma}).$$

Ale gdy $\Delta \subset \Gamma^c$ to dla dowolnych $x^{\Gamma}, y^{\Gamma^c}, z^{\Gamma^c}$,

$$J_{\Delta}(x^{\Gamma}, y^{\Gamma^c}) = J_{\Delta}(z^{\Gamma}, y^{\Gamma^c}),$$

a stąd

$$g_{\mathcal{H}}(x^{\Gamma}|y^{\Gamma^c}) = \frac{e^{-\sum_{\Delta \cap \Gamma \neq \emptyset} J_{\Delta}(x^{\Gamma}, y^{\Gamma^c})}}{\int e^{-\sum_{\Delta \cap \Gamma \neq \emptyset} J_{\Delta}(z^{\Gamma}, y^{\Gamma^c})} \nu_1(dz^{\Gamma})}. \quad (5.1)$$

Sumy występujące w powyższym wyrażeniu mają często jedynie *skończoną* liczbę składników różnych od zero. Tak więc gęstości warunkowe mogą mieć sens mimo, że gęstość pary nie jest dobrze zdefiniowana. Liczbę (5.1) można interpretować jako prawdopodobieństwo (ściślej, gęstość warunkową) pojawienia się na zbiorze Γ konfiguracji x^{Γ} , gdy na zewnątrz zbioru Γ zaobserwowana została konfiguracja y^{Γ^c} . Dlatego *miarę Gibbsa* na przestrzeni konfiguracji $\mathcal{M}$ odpowiadającą potencjałowi $(J_{\Delta}, \Delta \in \mathcal{F})$ nazywamy dowolną miarę probabilistyczną μ , taką że dla dowolnego skończonego zbioru $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \in \mathcal{F}$, dowolnej funkcji ograniczonej ϕ od k zmiennych, mamy

$$\begin{aligned} \int_{M^{\Gamma}} \phi(x(\gamma_1), \dots, x(\gamma_k)) \mu(dx) = \\ \int_{M^{\Gamma^c}} \int_{M^{\Gamma}} \phi(x(\gamma_1), \dots, x(\gamma_k)) g_{\mathcal{H}}(x(\gamma_1), \dots, x(\gamma_k)|y(\gamma); \\ \gamma \notin \Gamma) \nu_1(dx) \mu(dy). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Powyższą równość, definiującą miarę Gibbsa, nazywa się równaniem D-L-G.

5.2 Układy z ciągłym spinem

Założmy, że przestrzenią konfiguracji $\mathcal{M}$ jest zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na $\mathbb{Z}^d$ i że Hamiltonian ma postać

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k,j} a_{k,j} x(k)x(j) + \sum_k v(x(k)). \quad (5.3)$$

Elementy macierzy $(a_{k,j})$ opisują lokalne oddziaływania między punktami kraty, a funkcja v to tak zwany potencjał lokalnych oddziaływań. Miara Gibbsa (nieunormowana) winna mieć postać

$$e^{-\mathcal{H}(x)} \prod_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} dx_\gamma = e^{-\mathcal{H}(x)} d\mathbf{x},$$

gdzie miara $d\mathbf{x}$ jest nieskończonym produktem miar Lebesguea na prostej. Produkt taki nie jest dobrze określony i ponadto szeregi występujące w wyrażeniu na $\mathcal{H}$ nie są na ogół zbieżne. Tym niemniej gęstość warunkowa występująca w równaniu D-L-R ma dobry sens. Rzeczywiście połóżmy

$$J_\Delta(x) = \begin{cases} v(x(\gamma)), & \text{gdy } \Delta = \{\gamma\}, \\ a(k-j)x(k)x(j), & \text{gdy } \Delta = \{k, j\}, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Gdy zbiór Γ jest skończony, $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, to w sumie

$$\sum_{\Delta \cap \Gamma \neq \emptyset} J_\Delta(x)$$

jest tylko skończona liczba funkcji różnych od zera. Podobnie miara ν_1 jest skończonym produktem miar Lebesgue'a, a więc jest dobrze określona.

Miar Gibbsa dla Hamiltonianu (5.3) będziemy szukać wśród miar określonych na przestrzeni Hilberta $H = l_\rho^2(\mathbb{Z}^d)$ ciągów sumowalnych z wagami $\rho = \rho^\kappa$, $\rho = \rho_{\kappa r}$, gdzie

$$\rho^\kappa(\gamma) = e^{-\kappa|\gamma|}, \quad \rho_{\kappa r}(\gamma) = \frac{1}{1 + \kappa|\gamma|^r}, \quad r > d, \quad \gamma \in \mathbb{Z}^d.$$

Gdy $\rho \equiv 1$, to piszemy $l_\rho^2 = l^2$. Dokładniej przez $l^2(\mathbb{Z}^d)$ i $l_\rho^2(\mathbb{Z}^d)$, krótko l^2, l_ρ^2 , oznaczamy przestrzeń Hilberta ciągów liczb rzeczywistych $x = (x_\gamma)$, takich że

$$\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} x_\gamma^2 < \infty, \quad \|x\|_\rho^2 = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} \rho_\gamma x_\gamma^2 < \infty.$$

Mówimy, że oddziaływania $(a_{\gamma j})$ mają ograniczony zasięg, gdy istnieją stałe $R, M > 0$, takie że

$$a_{\gamma j} = 0 \quad \text{gdy } |\gamma - j| > R, \quad |a_{\gamma j}| \leq M \quad \text{dla dowolnych } \gamma, j. \quad (5.4)$$

Przez A będziemy oznaczać operator liniowy zadany przez macierz $(a_{\gamma j})$. Zachodzi następujące twierdzenie, [4], [14], [5].

Twierdzenie 5.2 *Założmy, że oddziaływania $(a_{\gamma j})$ mają ograniczony zasięg i że pochodna potencjału v' ma rozkład $v' = f_0 + f_1$, gdzie f_0 jest funkcją malejącą, taką że dla pewnych $c_0 > 0, s \geq 1$, $|f_0(\xi)| \leq c_0(1 + |\xi|^s)$, $\xi \in \mathbb{R}$, a funkcja f_1 spełnia warunek Lipschitza ze stałą $\|f_1\|_{\text{Lip}}$. Założmy również, że dla pewnego η operator $A + \eta I$ jest na l^2 dyssypatywny i że $\eta > \|f_1\|_{\text{Lip}}$. Wtedy istnieje takie $\kappa_0 > 0$, że w przestrzeniach $l_{\rho^\kappa}^2, l_{\rho_{\kappa,r}}^2, \kappa \in (0, \kappa_0)$ istnieją jedyne miary Gibbsa z Hamiltonianem (5.3).*

Idea dowodu polega na wykazaniu, że miary Gibbsa, dla powyższego modelu, są miarami niezmienniczymi dla gradientowego układu równań stochastycznych

$$dX_\gamma(t) = \left(\sum_j a(\gamma - j) X_j(t) + v'(X_\gamma(t)) \right) dt + dW_\gamma, \quad (5.5)$$

w którym W_γ , $\gamma \in \mathbb{Z}^d$ są niezależnymi, rzeczywistymi procesami Wienera. Układ (5.5) będziemy nazywać *równaniem spinowym*. Ograniczymy się do podania zasadniczych własności równania spinowego potrzebnych do zastosowania twierdzenia o istnieniu miar niezmienniczych dla układów dyssypatywnych. To, że miary te są miarami Gibbsa może zostać udowodnione w oparciu o idee dotyczące układów gradientowych z końca Rozdziału 4.1.

5.3 Elementy dowodu istnienia miary Gibbsa

Niech $A = (a_{\gamma j})$, $\gamma, j \in \mathbb{Z}^d$ będzieadaną macierzą, f daną funkcją, a $W = (W_\gamma, \gamma \in \mathbb{Z}^d)$ rodziną niezależnych procesów Wienera o wariancji $\sigma \geq 0$. Równanie spinowe jest szczególnym przypadkiem nieskończonego układu równań

$$dX_\gamma(t) = \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_{\gamma j} X_j(t) + f(X_\gamma(t)) \right] dt + dW_\gamma(t), \quad X_\gamma(0) = x_\gamma, \quad (5.6)$$

$\gamma \in \mathbb{Z}^d$, które zapisujemy w abstrakcyjnej postaci

$$dX = (AX + F(X))dt + dW(t), \quad X(0) = x. \quad (5.7)$$

Przestrzenie l_ρ^2 będą przestrzeniami Hilberta, w których te równania będziemy rozpatrywać. Operator F ciągowi (x_γ) przyporządkowuje ciąg $F(x)$ w myśl wzoru

$$(F(x))_\gamma = (f(x_\gamma)).$$

Jeżeli układ ten ma rozwiązanie przy dowolnej początkowej konfiguracji to rozwiązanie takie jest procesem Markowa z jednoznacznie zdefiniowaną funkcją przejścia

$$P_t(x, B) = \mathbb{P}(X(t, x) \in B),$$

gdzie $t \geq 0$, $x \in H$ i B jest podzbiorem borelowskim.

5.3.1 Proces Wienera W

Rozpoczniemy od następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.3 (i) Proces W przyjmuje wartości w l_ρ^2 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{\gamma} \rho(\gamma) < \infty.$$

(ii) Co więcej jego trajektorie spełniają warunek Höldera z dowolnym wykładnikiem $< \frac{1}{2}$.

Dowód (i). Jak wiemy proces gaussowski W przyjmuje wartości w przestrzeni Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy ma względem tej przestrzeni skończony drugi moment

$$\mathbb{E} \|W(t)\|^2 < \infty, \quad t \geq 0.$$

Ponieważ

$$\mathbb{E} \|W(t)\|_\rho^2 = \mathbb{E} \sum_{\gamma} \rho(\gamma) W_\gamma^2(t) = \sum_{\gamma} \rho(\gamma) \mathbb{E} W_\gamma^2(t) = t \sum_{\gamma} \rho(\gamma),$$

to dowód pierwszej części twierdzenia jest zakończony.

(ii) Przyjmujemy bez dowodu następujące klasyczne twierdzenie Kołmogorowa.

Twierdzenie 5.4 Niech $Z(t)$, $t \in [0, T]$ będzie procesem stochastycznym o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha E . Jeżeli dla pewnych stałych $c > 0$, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$,

$$\mathbb{E} \|Z(t) - Z(s)\|^\delta \leq c|t - s|^{1+\epsilon}, \quad t, s \in [0, T],$$

to wtedy istnieje wersja procesu Z , której wszystkie trajektorie są funkcjami spełniającymi warunek Höldera z dowolnym wykładnikiem $< \frac{\epsilon}{\delta}$. Czyli, gdy $0 \leq \gamma < \frac{\epsilon}{\delta}$, to istnieje modyfikacja $\tilde{Z}$ procesu Z , taka że dla pewnej zmiennej losowej c i prawie każdego ω ,

$$|\tilde{Z}(t, \omega) - \tilde{Z}(s, \omega)| \leq c(\omega)|t - s|^\gamma, \quad s, t \in [0, T].$$

Dla $0 \leq s < t \leq T$ mamy

$$\mathbb{E} \|W(t) - W(s)\|_\rho^2 = (t - s) \sum_{\gamma} \rho(\gamma).$$

Przyjmijmy, że $\sum \rho(\gamma) = 1$. Wtedy

$$\mathbb{E} \left\| \frac{W(t) - W(s)}{\sqrt{t - s}} \right\|_\rho^2 = 1.$$

Z zasadniczego Twierdzenia 2.1 o miara gaussowskich w przestrzeni Hilberta mamy

$$\mathbb{E} e^{\beta \left\| \frac{W(t) - W(s)}{\sqrt{t - s}} \right\|_\rho^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2\beta}} < \infty,$$

jeżeli tylko $1 - 2\beta > 0$, czyli gdy $\beta < \frac{1}{2}$. W szczególności

$$c_\alpha = \mathbb{E} \left\| \frac{W(t) - W(s)}{\sqrt{t-s}} \right\|_\rho^{2\alpha} < \infty$$

dla dowolnego $\alpha > 0$. Dlatego

$$\mathbb{E} \|W(t) - W(s)\|_\rho^{2\alpha} \leq c_\alpha (\sqrt{t-s})^{2\alpha} = c_\alpha (t-s)^\alpha \leq c_\alpha |t-s|^{1+(\alpha-1)}.$$

Gdy $\alpha \uparrow \infty$, wtedy

$$\frac{\alpha-1}{2\alpha} \uparrow \frac{1}{2}.$$

Czyli proces W ma modyfikację spełniającą warunek Höldera z dowolnym wykładnikiem $< \frac{1}{2}$. $\square$

5.3.2 Ograniczoność operatora A

Twierdzenie 5.5 *Załóżmy, że*

$$\sup_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |a_{\gamma j}| = \alpha < \infty$$

oraz istnieje liczba $\beta > 0$, taka że

$$\sum_{\gamma} |a_{\gamma j}| \rho(\gamma) \leq \beta \rho(j), \quad j \in \mathbb{Z}^d.$$

Wtedy, dla dowolnego $p \in [1, \infty]$ wzór

$$Ax = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_{\gamma j} x_j, \quad x \in l_\rho^p$$

definiuje liniowy operator ograniczony w l_ρ^p , z normą nie większą niż $\alpha^{\frac{1}{q}} \beta^{\frac{1}{p}}$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. W szczególności A jest operatorem z l_ρ^2 w l_ρ^2 z normą nie większą niż $\sqrt{\alpha\beta}$.

Dowód. Załóżmy, że $p \in (1, \infty)$ i ciąg $x = (x_\gamma)$ ma tylko skończoną liczbę różnych od zera wyrazów. Z nierówności Höldera mamy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_{\gamma j} x_j \right|^p &\leq \left(\sum_j |a_{\gamma j}| |x_j| \right)^p \leq \left(\sum_j \left(|a_{\gamma j}|^{\frac{1}{p}} |x_j| \right) |a_{\gamma j}|^{\frac{1}{q}} \right)^p \\ &\leq \left(\sum_j |a_{\gamma j}| |x_j|^p \right) \left(\sum_j |a_{\gamma j}| \right)^{\frac{p}{q}} \leq \alpha^{\frac{p}{q}} \sum_j |a_{\gamma j}| |x_j|^p. \end{aligned}$$

Stąd

$$\sum_{\gamma} \rho(\gamma) \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_{\gamma j} x_j \right|^p \leq \alpha^{\frac{p}{q}} \sum_{\gamma, j} \rho(\gamma) |a_{\gamma j}| |x_j|^p \leq \alpha^{\frac{p}{q}} \beta \sum_j \rho(j) |x_j|^p.$$

Przez proste przejście graniczne otrzymujemy wynik. $\square$

Lemat 5.1 *Założmy, że zachodzi warunek (5.4) oraz, że*

$$\frac{\rho(\gamma)}{\rho(j)} \leq M \quad \text{gdzie} \quad |\gamma - j| \leq R, \quad \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} \rho(\gamma) < \infty. \quad (5.8)$$

Wtedy operator A jest liniowym operatorem ograniczonym w l_p^p , $p \geq 1$.

Dowód. Wynika z oszacowania

$$\sum_{\gamma} |a_{\gamma j}| \rho(\gamma) = \sum_{\gamma} |a_{\gamma j}| \frac{\rho(\gamma)}{\rho(j)} \rho(j) \leq M \left(\sum_{\gamma} |a_{\gamma j}| \right) \rho(j) \leq \beta \rho(j),$$

gdzie

$$\beta = M \sup_j \sum_{\gamma} |a_{\gamma j}|.$$

$\square$

Lemat 5.2 *Warunki (5.8) są spełnione dla wag ρ^κ , $\kappa > 0$, $\rho_{\kappa, r}$.*

Dowód. Dla wagi ρ^κ mamy

$$\frac{\rho(\gamma)}{\rho(j)} = e^{-\kappa|\gamma| + \kappa|j|}.$$

Ponieważ $\kappa(|j| - |\gamma|) \leq \kappa|j - \gamma|$, dlatego

$$\frac{\rho(\gamma)}{\rho(j)} \leq e^{\kappa|j - \gamma|} \leq e^{\kappa R}, \quad \text{gdzie} \quad |\gamma - j| \leq R.$$

Dowód dla wagi $\rho_{\kappa, r}$;

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\gamma)}{\rho(j)} &= \frac{1 + \kappa|j|^r}{1 + \kappa|\gamma|^r} = \frac{1 + \kappa(|\gamma + j - \gamma|)^r}{1 + \kappa|\gamma|^r} \leq \frac{1 + \kappa(|\gamma| + |j - \gamma|)^r}{1 + \kappa|\gamma|^r} \\ &\leq \frac{1 + \kappa 2^{r-1}(|\gamma|^r + |j - \gamma|^r)}{1 + \kappa|\gamma|^r} \leq \frac{1 + \kappa 2^{r-1}|\gamma|^r}{1 + \kappa|\gamma|^r} + \frac{1 + \kappa 2^{r-1}R^r}{1 + \kappa|\gamma|^r} \\ &\leq 2^{r-1}(1 + \kappa R^r) + 1. \end{aligned}$$

$\square$

5.3.3 Dyssypatywność operatora lokalnych oddziaływań

Niech P_d będzie macierzą przejścia symetrycznego błędzenia przypadkowego na d -wymiarowej kracie $\mathbb{Z}^d$. Macierz dyskretnego laplasjanu dana jest wzorem

$$\Delta_d = P_d - I.$$

Przypomnijmy, że dla elementów $p_{\gamma\delta}$ macierzy P_d mamy

$$p_{(\gamma_1, \dots, \gamma_d), (\delta_1, \dots, \delta_d)} = \frac{1}{2d}, \quad \text{gdy} \quad \sum_1^d |\gamma_i - \delta_i| = 1, \quad (5.9)$$

$$= 0, \quad \text{gdy} \quad \sum_1^d |\gamma_i - \delta_i| > 1. \quad (5.10)$$

Z poniższego twierdzenia wynika, że gdy macierz lokalnych oddziaływań A jest postaci $A = \Delta_d - \alpha I$, to operator $A + \alpha I$ jest dyssypatywny (własność wymagana w twierdzeniu (5.2) o istnieniu miary Gibbsa).

Twierdzenie 5.6 *Dla dowolnej liczby rzeczywistej α , w przestrzeni Hilberta $H = l^2$,*

$$\sup_{|x| \leq 1} \langle (\Delta_d - \alpha I)x, x \rangle \leq -\alpha, \quad x \in H.$$

Dowód. Podamy dowód dla dwóch ważnych przypadków szczególnych. Szkic dowodu opartego na twierdzeniu Frobeniusa podamy oddzielnie.

Niech $d = 1$ i $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = \frac{1}{2}$ oraz $a_{ij} = 0$, gdy $|i - j| \neq 1$. Wtedy

$$\sup_{|x| \leq 1} \langle Ax, x \rangle = 1.$$

Oznaczmy $y = Ax$, wtedy $y_i = \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}$, $i \in \mathbb{Z}$ i dlatego

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_i x_i \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_i x_i x_{i+1} + \sum_i x_{i-1} x_i \right) = \sum_i x_i x_{i+1}.$$

Stąd

$$\langle Ax, x \rangle \leq \left(\sum x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum x_{i+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq |x|^2.$$

Czyli otrzymujemy oszacowanie

$$\sup_{|x| \leq 1} \langle Ax, x \rangle \leq 1.$$

Dla dowodu nierówności w przeciwnym kierunku niech $x_i^n = 1$ gdy $i = 1, 2, \dots, n$ oraz 0 dla pozostałych i . Wtedy

$$\langle Ax^n, x^n \rangle = \sum_i x_i^n x_{i+1}^n = \sum_i x_{i+1}^n = n - 1$$

oraz $|x^n|^2 = n$. Stąd

$$\frac{1}{|x^n|^2} \langle Ax^n, x^n \rangle = \frac{n-1}{n},$$

co kończy dowód.

Podobnie przebiega dowód, gdy $d = 2$. Mianowicie niech

$$y_{i,k} = \frac{1}{4}(x_{i,k-1} + x_{i,k+1} + x_{i-1,k} + x_{i+1,k}).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} y_{i,k} x_{i,k} &= \frac{1}{4} \sum_{i,k} (x_{i,k-1} + x_{i,k+1} + x_{i-1,k} + x_{i+1,k}) x_{i,k} \\ &= \frac{1}{4} \sum_i \left(\sum_k x_{i,k-1} x_{i,k} + x_{i,k} x_{i,k+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_k \left(\sum_i x_{i-1,k} x_{i,k} + x_{i+1,k} x_{i,k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_k x_{i,k} x_{i,k+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_k \left(\sum_i x_{i,k} x_{i+1,k} \right) \\ &\leq |x|^2. \end{aligned}$$

Czyli otrzymujemy oszacowanie z góry. Dla szacowania z dołu, niech $x_{i,k}^n = 1$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ oraz 0 dla pozostałych par. Wtedy

$$\langle Ax^n, x^n \rangle = n(n-1) \quad \text{oraz} \quad |x^n|^2 = n^2.$$

Czyli

$$\frac{\langle Ax^n, x^n \rangle}{|x^n|^2} = \frac{n(n-1)}{n^2} \longrightarrow 1,$$

stąd teza. $\square$

Wspomniane w dowodzie *twierdzenia Frobeniusa* brzmi następująco.

Twierdzenie 5.7 *Dowolna i różna od zera, skończona macierz kwadratowa P o nieujemnych elementach ma dodatnią wartość własną $\hat{\lambda}$ nie mniejszą od modułów pozostałych wartości własnych. Odpowiada jej różny od zera wektor własny $\hat{x}$ o nieujemnych elementach.*

Można z niego wyprowadzić dowód dla dowolnego d . Zauważmy, na przykład, że jeżeli P jest symetryczną macierzą przejścia, to

$$\sup_{|x| \leq 1} \langle Px, x \rangle = 1.$$

Rzeczywiście. Mamy $P\hat{x} = \hat{\lambda}\hat{x}$, skąd $\sum p_{ij}\hat{x}_j = \hat{\lambda}\hat{x}_i$ i dlatego

$$\sum_{i,j} p_{i,j} \hat{x}_j = \sum_j \hat{x}_j = \hat{\lambda} \sum \hat{x}_i.$$

Czyli $\hat{\lambda} = 1$. Ale

$$\sup_{|x| \leq 1} \langle Px, x \rangle = \hat{\lambda},$$

stąd teza.

Podobnie jeżeli P jest nieograniczoną, symetryczną macierzą przejścia to

$$\sup_{|x| \leq 1} \langle Px, x \rangle \leq 1. \quad (5.11)$$

Rzeczywiście. Niech Γ będzie skończonym podzbiorem kraty i niech x^Γ i P^Γ to odpowiednio wektor x i macierz P obcięte do zbioru Γ . Wtedy

$$\langle Px^\Gamma, x^\Gamma \rangle = \sum_{i,j \in \Gamma} p_{ij} x_i x_j.$$

Dopełniamy macierz P^Γ do symetrycznej macierzy przejścia $\hat{P}^\Gamma$. Wtedy

$$\langle Px^\Gamma, x^\Gamma \rangle = \langle \hat{P}^\Gamma x^\Gamma, x^\Gamma \rangle$$

i dlatego

$$\langle \hat{P}^\Gamma x^\Gamma, x^\Gamma \rangle \leq |x^\Gamma|^2.$$

Stąd wynika już (5.11).

Półgrupy operatorów i równania semiliniowe

Celem niniejszego rozdziału jest wprowadzenie w półgrupowe podejście do teorii deterministycznych równań semiliniowych. Typowym przykładem takich równań jest nieliniowe równanie ciepła

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi) &= \Delta u(t, \xi) + f(u(t, \xi)), & t > 0, \xi \in \Theta, \\ u(0, \xi) &= x(\xi), & \xi \in \Theta, \\ u(t, \xi) &= 0, & \xi \in \partial\Theta, t > 0.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Półgrupy liniowych operatorów liniowych pojawiają się w sposób naturalny przy formalizacji tak zwanego zagadnienia Cauchy'ego. Wyprowadzamy podstawowe własności półgrup włącznie ze szkicem twierdzenia Hill'e- Yosidy i omawiamy specjalne przykłady generatorów. Na końcu rozdziału zajmujemy się słabymi rozwiązaniami stochastycznych równań ewolucyjnych, które powstają przez dodanie do prawych stron równań semiliniowych czynnika stochastycznego.

6.1 Zagadnienie Cauchy'ego

Przedmiotem naszych rozważań będą równania, które można sprowadzić do postaci

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(u(t)), \quad u(0) = x \in E.\tag{6.2}$$

Rozwiązaniem tego równania będzie ciągła funkcją u określona na przedziale $[0, \infty)$ i o wartościach w przestrzeni Banacha E . W równaniu (6.2) pochodna $\frac{du}{dt}(t)$ jest rozumiana w sensie przestrzeni E , symbol A oznacza operator liniowy, niekoniecznie wszędzie określony, z E w E , a F jest pewnym odwzorowaniem z $E \rightarrow E$, na ogół nieliniowym, niekiedy spełniającym warunek Lipschitza. Na przykład dla równania (6.1) jako E przyjmuje się przestrzeń

$C_0(\Theta)$ - funkcji ciągłych zanikających na brzegu lub $L^2(\Theta)$ - funkcji całkowalnych z kwadratem. Okazuje się, że istnieje pożyteczna i abstrakcyjna teoria równań typu (6.2), która prowadzi do wartościowych twierdzeń o równaniach typu (6.1). Oparta jest ona na pojęciu półgrupy liniowych operatorów. Do pojęcia tego można dojść wychodząc od tak zwanego *dobrego postawienia zagadnienia Cauchy'ego*. Niech A_0 będzie operatorem liniowym określonym na liniowym podzbiorze $D(A_0)$ przestrzeni Banacha E , gęstym w E . Mówimy, że zagadnienie Cauchy'ego

$$y' = A_0 y, \quad y(0) = x \in E \quad (6.3)$$

jest dobrze postawione w E gdy równanie (6.3) ma, dla dowolnego $x \in D(A_0)$, dokładnie jedno rozwiązanie $y(t, x)$, $t \geq 0$, zależące, dla dowolnego $t \geq 0$, liniowo i ciągle od warunku początkowego x . Wtedy

$$y(t, x) = S(t)x$$

i operator liniowy $S(t) : D(A_0) \rightarrow D(A_0)$ ma ciągłe rozszerzenie na całą przestrzeń E . To rozszerzenie będziemy również oznaczać przez $S(t)$. Zauważmy, że dla każdego s , funkcja $z(t) = y(t, y(s, x))$, $t \geq 0$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{dz(t)}{dt} = A_0 z(t), \quad z(0) = y(s, x)$$

oraz

$$\frac{dy(t+s, x)}{dt} = A_0 y(t+s, x), \quad t \geq 0.$$

Z jednoznaczności rozwiązania wynika więc, że $y(t+s, x) = y(t, y(s, x))$, czyli

$$S(t+s)x = S(t)S(s)x.$$

Półgrupa $S(t)$, może być traktowana jako abstrakcyjna wersja tak zwanego *rozwiązania podstawowego* liniowego równania ewolucyjnego.

6.2 Półgrupy operatorów liniowych

Ciągłą półgrupą operatorów liniowych na przestrzeni Banacha E lub krócej *C_0 -ciągłą półgrupą* nazywamy rodzinę liniowych i ograniczonych operatorów $S(t) : E \rightarrow E$, taką że

1. $S(t+s) = S(t)S(s)$, $t \geq 0, s \geq 0$.
2. $S(0) = I$.
3. Dla dowolnego $x \in E$, funkcja $t \rightarrow S(t)x$ jest ciągła.

Operator tworzący A , C_0 -ciągłej półgrupy $S(t)$, $t \geq 0$ jest zdefiniowany na dziedzinie $D(A)$,

$$D(A) = \left\{ x \in E; \text{ istnieje granica } \frac{S(t)x - x}{t} \text{ gdy } t \rightarrow 0 \right\},$$

wzorem

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A).$$

Zauważmy, że gdy półgrupa S powstaje z dobrze postawionego zagadnienia Cauchy'ego, to wtedy $D(A) \supset D(A_0)$ i operator A jest rozszerzeniem operatora A_0 . Zapis

$$y' = Ay, \quad y(0) = x \in E \quad (6.4)$$

stanowi abstrakcyjną wersję równania (6.3), dla dowolnego x . Funkcja $y(t, x) = S(t)x$, $t \geq 0$ jest rozwiązaniem równania (6.4) wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona pochodną w każdym punkcie $t \geq 0$ dla której zachodzi (6.4).

Przykład 1. Liniowe równanie różniczkowe w $\mathbb{R}^d$ ma postać

$$y' = Ay, \quad y(0) = x, \quad (6.5)$$

gdzie A jest macierzą $d \times d$ lub operatorem liniowym z $\mathbb{R}^d$ w $\mathbb{R}^d$. Rozwiązanie równania (6.5) ma wtedy postać

$$y(t, x) = e^{tA}x, \quad t \geq 0.$$

Czyli $S(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$. Z tej przyczyny często ogólne półgrupy $S(t)$ oznaczają symbolem e^{tA} , $t \geq 0$.

Przykład 2. Niech $A : E \rightarrow E$ będzie dowolnym liniowym operatorem ograniczonym na E , wtedy wzór

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

definiuje C_0 -półgrupą na E .

Przykład 3. Niech ciąg (e_m) będzie bazą ortonormalną i zupełną w przestrzeni Hilberta H . Połóżmy

$$S(t)x = \sum_n e^{\lambda_m t} \langle x, e_m \rangle e_m, \quad t \geq 0, \quad x \in H, \quad (6.6)$$

gdzie λ_m jest pewnym ciągiem liczb rzeczywistych. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1 (i) Dla ustalonego $t > 0$ szereg (6.6) jest zbieżny w H dla dowolnego $x \in H$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup \lambda_m < \infty. \quad (6.7)$$

(ii) Gdy warunek (6.7) jest spełniony, to wtedy wzór (6.6) definiuje C_0 -półgrupę na H , której generator A ma dziedzinę

$$D(A) = \left\{ x : \sum_n [\lambda_n \langle x, e_n \rangle]^2 < \infty \right\}$$

i zadany jest wzorem

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in D(A).$$

Dowód. Wykażemy prawdziwość punktu (ii). Niech $x \in D(A)$. Wtedy

$$\frac{S(t)x - x}{t} = \sum_n \left(\frac{e^{\lambda_n t} - 1}{t} \right) \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Jeżeli istnieje granica $\frac{1}{t}(S(t)x - x)$, gdy $t \downarrow 0$, to musi być ona postaci

$$\sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

a stąd warunek

$$\sum_n (\lambda_n \langle x, e_n \rangle)^2 < \infty$$

i wzór na generator. Jeżeli

$$\sup_n \lambda_n < \infty \quad \text{i} \quad \sum_n (\lambda_n \langle x, e_n \rangle)^2 < \infty,$$

to

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(t)x - x}{t} - Ax \right|^2 &= \sum_n \left(\frac{e^{\lambda_n t} - 1}{t} - \lambda_n \right)^2 \langle x, e_n \rangle^2 \\ &= \sum_n \left(\frac{e^{\lambda_n t} - 1}{\lambda_n t} - 1 \right)^2 (\lambda_n \langle x, e_n \rangle)^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Ciągła funkcja

$$\psi(\xi) = \frac{e^\xi - 1}{\xi} - 1, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \xi \neq 0, \quad \psi(0) = 0$$

ma w $-\infty$ granicę równą -1 i dlatego jest ograniczona na przedziałach postaci $(-\infty, a]$. Istnieją dlatego $M > 0$, $t_0 > 0$, że dla dowolnego $t \in (0, t_0)$ i dowolnego naturalnego n ,

$$\left| \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{\lambda_n t} - 1 \right| \leq M.$$

Na podstawie twierdzenia Lebesguea, można przejść we wzorze (6.8) do granicy, gdy $t \rightarrow 0$. Stąd teza. $\square$

Przykład 4. Niech $H = L^2[0, \pi]$ i $Ax = \frac{d^2x}{d\xi^2}$ z dziedziną $D(A)$ składającą się z funkcji absolutnie ciągłych x , takich że $\frac{dx}{d\xi}$ jest absolutnie ciągła i $\frac{d^2x}{d\xi^2} \in L^2(0, \pi)$ i ponadto $x(0) = x(1) = 0$. Operator A jest generatorem C_0 -półgrupy $S(t)$ postaci

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, g_n \rangle e^{\lambda_n t} g_n,$$

gdzie

$$\lambda_n = -n^2, \quad n = 1, \dots, \quad g_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin n\xi.$$

Przykład 5. Niech H i A będą tej samej postaci co w poprzednim przykładzie. W definicji dziedziny $D(A)$ zmienimy jedynie wymaganie brzegowe typu Dirichleta na warunek brzegowy typu Neumanna $x'(0) = x'(\pi) = 0$. Wtedy operator A generuje również C_0 -półgrupę. Ma ona przedstawienie postaci

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, h_n \rangle e^{\lambda_n t} h_n,$$

gdzie

$$\lambda_0 = 0, \quad h_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \lambda_n = -n^2, \quad h_n(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\xi.$$

Generatory z dwu ostatnich przykładów są tak zwanymi operatorami samosprężonymi, o których jeszcze będziemy mówić. Zauważmy, że operatory te są identyczne na gęstej podprzestrzeni funkcji klasy C^2 znikających na brzegu wraz z pierwszą pochodną. Tym niemniej generują dwie różne półgrupy. Przechodzimy do twierdzeń opisujących zasadnicze własności C_0 -półgrup.

Twierdzenie 6.2 *Niech $S(t)$, $t \geq 0$, będzie C_0 -półgrupą operatorów na przestrzeni Banacha E . Istnieją wtedy stałe $M > 0$ i $w \in \mathbb{R}$, takie że*

$$\|S(t)\| \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Dowód. Ponieważ dla dowolnego $x \in E$, funkcja $S(t)x$ zmiennej $t \geq 0$, jest ciągła, istnieje więc stała $m > 0$, taka że

$$\sup_{0 < t \leq m} \|S(t)\| = M < \infty.$$

Wtedy dla $t = km + s$, $s \in [0, m)$, $k = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|S(km)S(s)\| \leq \|S(m)\|^k \|S(s)\| \leq M^{k+1} \\ &\leq M M^{\frac{t}{m}} = M e^{\frac{t}{m} \log M} = M e^{t \log M^{\frac{1}{m}}} = M e^{tw}, \end{aligned}$$

co należało wykazać. $\square$

Twierdzenie 6.3 *Załóżmy, że operator A z dziedziną $D(A)$ generuje C_0 -półgrupę $S(t)$, $t \geq 0$, na przestrzeni Banacha E . Wtedy dla dowolnych $t \geq 0$, $x \in D(A)$,*

1. $S(t)x \in D(A)$,
2. $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$,
3. $S(t)x - x = \int_0^t S(r)Ax dr$,
4. *dziedzina $D(A)$ jest gęsta w E i operator A ma domknięty wykres czyli, zbiór par $\{(x, Ax); x \in D(A)\}$ jest domknięty w $E \times E$.*

Dowód. Ograniczymy się do dowodu ostatniego punktu. By wykazać, że zbiór $D(A)$ jest gęsty w E zauważmy, że dla dowolnego $x \in E$ i $t > 0$, element

$$y = \int_0^t S(s)x ds$$

należy do dziedziny operatora A . Wynika to, z następującego przejścia granicznego

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(S(h) \int_0^t S(s)x ds - \int_0^t S(s)x ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{t+h} S(s)x ds - \int_0^t S(s)x ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left[- \int_0^h S(s)x ds + \int_t^{t+h} S(s)x ds \right] \longrightarrow -x + S(t)x. \end{aligned}$$

Co więcej

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(s)x ds \longrightarrow x$$

gdy $t \rightarrow 0$. Dlatego zbiór $D(A)$ jest gęsty w E .

Dla dowodu domkniętości założmy, że $x_n \rightarrow x$ i $Ax_n \rightarrow y$. Ponieważ

$$S(t)x_n - x_n = \int_0^t S(r)Ax_n dr, \quad \text{to} \quad S(t)x - x = \int_0^t S(r)y dr.$$

Ale wtedy

$$\frac{1}{t}(S(t)x - x) = \frac{1}{t} \int_0^t S(r)y dr \longrightarrow y.$$

Czyli $x \in D(A)$ i $Ax = y$. $\square$

Przechodzimy do ważnego pojęcia rezolwenty półgrupy. Ponieważ

$$|S(t)| \leq Me^{wt}$$

to dla $\lambda > w$ operator

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt,$$

jest dobrze określony. Łatwo sprawdzamy, że

$$|R(\lambda)| \leq \frac{M}{\lambda - w}, \quad |R^m(\lambda)| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^m}, \quad m = 1, \dots$$

oraz, że $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$. Dowód, że na przykład $(\lambda - A)R(\lambda) = I$, wynika z równości

$$\begin{aligned} (\lambda - A) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AS(t)x \, dt \\ &= \lambda R(\lambda)x - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} S(t)x \, dt \\ &= \lambda R(\lambda)x - \left[e^{-\lambda t} S(t)x \Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right] \\ &= \lambda R(\lambda)x - [-x + \lambda R(\lambda)x] = x, \quad x \in E. \end{aligned}$$

Podobnie dowodzi się, że

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)[\lambda x - Ax] \, dt = x, \quad x \in D(A).$$

Zasadnicze znaczenie ma następujące twierdzenie Hille'a–Yosidy.

Twierdzenie 6.4 *Liniowy operator A generuje C_0 -półgrupę operatorów wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. *zbiór $D(A)$ gęsty,*
2. *operator A jest domknięty,*
3. *istnieją stałe $w, M > 0$, że dla $\lambda > w$, operator odwrotny*

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda)$$

jest dobrze określony i

$$|R^m(\lambda)| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^m}, \quad m = 1, 2, \dots, \lambda > w.$$

Jeżeli są spełnione warunki twierdzenia to operator A generuje półgrupę $S(t)$, $t \geq 0$, taką że

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Co więcej

$$R^{m+1}(\lambda) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} R(\lambda). \quad (6.9)$$

W szczególności

$$\begin{aligned}
|R^2(\lambda)x| &= \left| \int_0^{+\infty} s e^{-\lambda s} S(s)x \, ds \right| \\
&\leq M \int_0^{+\infty} s e^{-\lambda s} e^{ws} \, ds |x| \\
&\leq M|x| \int_0^{+\infty} s e^{-(\lambda-w)s} \, ds = M|x| \frac{1}{(\lambda-w)^2}.
\end{aligned}$$

Ponadto nierówność (6.9) wynika z prostych do dowodu identyczności

$$\begin{aligned}
R(\lambda) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n (R(\mu))^{n+1}, \\
(\lambda - A) &= (\mu - A) + (\lambda - \mu) = [I - (\mu - \lambda)R(\mu)](\mu - A), \\
R(\lambda) &= R(\mu) \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)R^n(\mu).
\end{aligned}$$

Elementy dowodu twierdzenia Hille'a–Yosidy.

W dowodzie twierdzenia Hille'a–Yosidy zasadniczą rolę odgrywają tak zwane *aproksymacje Yosidy* A_λ , $\lambda > \omega$ generatora A . Mianowicie

$$A_\lambda = \lambda(\lambda R(\lambda) - I).$$

Pożyteczne są następujące tożsamości

$$\begin{aligned}
A_\lambda &= \lambda(\lambda(\lambda - A)^{-1} - I) = \lambda(\lambda(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}) \\
&= \lambda[A(\lambda - A)^{-1}] = \lambda A R(\lambda).
\end{aligned}$$

Najważniejsza część dowodu polega na wykazaniu następujących własności aproksymacji Yosidy

1. $\lambda R(\lambda)x \longrightarrow x$, gdy $\lambda \rightarrow +\infty$, $x \in E$,
2. $A_\lambda x \longrightarrow Ax$, gdy $\lambda \rightarrow +\infty$, $x \in D(A)$,
3. Jeżeli $S^\lambda(t)x = e^{A_\lambda t}x$, to

$$\|S^\lambda(t)\| \leq M e^{\frac{w\lambda}{\lambda-w}t},$$

4. $S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S^\lambda(t)x$.

Na przykład fakt, że aproksymujące półgrupy S^λ są zbieżne wykazuje się przez sprawdzenie, że spełniają one warunek Cauchy'ego

$$\begin{aligned}
S^\lambda(t)x - S^\mu(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds} [S^\mu(t-s)S^\lambda(s)] \, ds \\
&= \int_0^t S^\mu(t-s)(A_\lambda - A_\mu)S^\lambda(s)x \, ds \\
&= \int_0^t S^\mu(t-s)S^\lambda(s)[A_\lambda - A_\mu]x \, ds,
\end{aligned}$$

a stąd

$$\|S^\lambda(t) - S^\mu(t)\| \leq \|A_\lambda x - A_\mu x\| M^2 t e^{\frac{w\mu}{\lambda-\mu}t}.$$

Jeżeli więc $x \in D(A)$, to warunek Cauchy'ego wynika z wyliczonych wcześniej własności aproksymacji Yosidy. Równość

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Ax \, ds \quad \text{dla } x \in D(A)$$

dla granicznej półgrupy, dowodzi się przez przejście graniczne.

Dla półgrupa przejścia (P_t) odpowiadających procesom Markowa, aproksymujące półgrupy P_t^λ mają ważną interpretację probabilistyczną. Ponieważ

$$P_t^\lambda = e^{tA_\lambda} = e^{t\lambda(\lambda R_\lambda - I)} = e^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda R_\lambda)^n \frac{(t\lambda)^n}{n!},$$

to półgrupy aproksymujące odpowiadają funkcjom przejścia *złożonych procesów Poissona* z miarą skoków λR_λ i intensywnością momentów skoku λ . Średni odstęp pomiędzy momentami skoku jest równy $\frac{1}{\lambda}$ i zmierza do zera, gdy λ zmierza do nieskończoności.

6.3 Półgrupy uogólnionych kontrakcji

Jeżeli istnieje taka stała ω , że

$$\|S(t)\| \leq e^{wt}, \quad t \geq 0, \quad (6.10)$$

to półgrupę $(S(t))$ nazywa się półgrupą uogólnionych kontrakcji. Charakteryzuje je następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.5 *Liniowy domknięty operator A z gęstą dziedziną generuje półgrupę uogólnionych kontrakcji spełniającą (6.10), wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\lambda > \omega$,*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq (\lambda - \omega)\|x\|, \quad x \in D(A), \quad (6.11)$$

$$\|(\lambda I - A^*)f\| \geq (\lambda - \omega)\|f\|, \quad f \in D(A^*). \quad (6.12)$$

Dowód. Udowodnimy jedynie, że sformułowane warunki są dostateczne. Przypomnijmy, że dziedziną $D(A^*)$ operatora sprzężonego A^* składa się z tych funkcjonałów $f \in E^*$ dla których funkcjonał liniowy $f(A(x))$, $x \in D(A)$, rozszerza się na całą przestrzeń do funkcjonału liniowego i ciągłego. Ten nowy funkcjonał jest z definicji równy A^*f . Niech $\lambda > \omega$ i $E_0 = (\lambda I - A)(D(A))$. Z (6.10) wynika, że E_0 jest domkniętą podprzestrzenią. Rzeczywiście niech $y_n = \lambda x_n - Ax_n$ i niech $y_n \rightarrow y_\infty$. Z (6.10) mamy, że ciąg (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego i dlatego $x_n \rightarrow x_\infty$. Z domkniętości operatora A wynika, że

$$x_\infty \in D(A) \quad \text{i} \quad y_\infty = \lambda x_\infty - Ax_\infty.$$

Dlatego $y_\infty \in E_0$. Co więcej $E_0 = E$, bo gdyby $E_0 \neq E$ to z twierdzenia Hahna–Banacha wynikałoby istnienie funkcjonału $f \in E^*$, $f \neq 0$, takiego że

$$f(\lambda x - Ax) = 0 \quad \text{dla dowolnego } x \in D(A).$$

Czyli $\lambda f(x) = f(Ax)$, $x \in D(A)$, a więc $f \in D(A^*)$ i $A^*f = \lambda f$. Wtedy z (6.11) wynika, że $f = 0$. Mamy więc $E_0 = E$. Dlatego operator $\lambda I - A$ jest liniowy, różnowartościowy na E , czyli operator

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda)$$

jest liniowym operatorem i z (6.10) mamy

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

Dlatego dla dowolnej liczby naturalnej m ,

$$\|R^m(\lambda)\| \leq \frac{1}{(\lambda - w)^m}$$

Wystarczy więc zastosować twierdzenie Hille’a–Yosidy. $\square$

Jako ważny wniosek mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.6 *Niech A będzie liniowym operatorem domkniętym, z gęstą dziedziną $D(A)$ w przestrzeni Hilberta H . Jeżeli dla pewnej liczby rzeczywistej w ,*

$$\langle Ax, x \rangle \leq w|x|^2, \quad x \in D(A), \quad (6.13)$$

$$\langle A^*y, y \rangle \leq w|y|^2, \quad y \in D(A^*), \quad (6.14)$$

to operator A generuje półgrupę uogólnionych kontrakcji, spełniającą (6.10).

Dowód. Wykażemy, że zachodzi na przykład (6.11). Niech $\lambda > w$ i $x \in D(A)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\lambda x - Ax\|^2 &= \|(\lambda - w)x + (wx - Ax)\|^2 \\ &= (\lambda - w)^2\|x\|^2 + \|wx - Ax\|^2 + 2(\lambda - w)\langle wx - Ax, x \rangle. \end{aligned}$$

Z (6.13) wynika, że

$$w\|x\|^2 - \langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

Dlatego zachodzi (6.11). $\square$

W szczególności jeżeli operator A jest samosprężony, taki że dla pewnego $w \in \mathbb{R}$,

$$\langle Ax, x \rangle \leq w|x|^2, \quad x \in D(A), \quad (6.15)$$

to operator A generuje C_0 -półgrupę, taką że

$$\|S(t)\| \leq e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Dlatego równanie ewolucyjne

$$y' = Ay, \quad y(0) = x$$

ma rozwiązanie dla dowolnego $x \in D(A)$.

Przykład 6. Niech operator $A = \frac{d^2}{d\xi^2}$ ma dziedzinę $D(A) \subset H = L^2(0, \pi)$ będącą zbiorem funkcji absolutnie ciągłych x , takich że pierwsza pochodna x' jest absolutnie ciągła, druga pochodna x'' należy do H oraz $x(0) = x(\pi) = 0$. Wtedy operator A jest samosprężony i $\langle Ax, x \rangle \leq 0$, $x \in D(A)$. Generuje więc on półgrupę kontrakcji.

Wykażemy jedynie, że operator A jest operatorem samosprężonym, czyli, że $D(A^*) = D(A)$ i $A^* = A$. W tym celu będzie nam potrzebny lemat.

Lemat 6.1 *Jeżeli funkcja $y \in L^1(a, b)$ i*

$$\int_a^b \frac{d^n x}{d\xi^n}(\xi) y(\xi) d\xi = 0 \quad \text{dla } x \in C_0^\infty(a, b),$$

to y jest wielomianem stopnia co najwyżej $n + 1$.

Dowód Lematu. Gdy $n = 0$, wtedy mamy

$$\int_a^b x(\xi) y(\xi) d\xi = 0,$$

najpierw, dla dowolnych funkcji $x \in C_0^\infty(a, b)$ i dlatego również dla dowolnych funkcji x ciągłych i ostatecznie dla dowolnych funkcji x ograniczonych. W szczególności przyjmijmy, że

$$x(\xi) = \begin{cases} \frac{y(\xi)}{|y(\xi)|}, & \text{gdy } |y(\xi)| \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } y(\xi) = 0. \end{cases}$$

Wtedy

$$\int_a^b \frac{|y(\xi)|^2}{|y(\xi)|} d\xi = \int_a^b |y(\xi)| d\xi = 0,$$

czyli $y = 0$. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla jakiegoś n i

$$\int_a^b \frac{d^{n+1}x}{d\xi^{n+1}}(\xi) y(\xi) d\xi = 0 \quad \text{dla } x \in C_0^\infty(a, b).$$

Niech $\phi_0 \in C_0^\infty(a, b)$ będzie funkcją, taką że $\int_a^b \phi_0(\xi) d\xi = 0$. Dla dowolnej funkcji $z \in C_0^\infty(a, b)$ zdefiniujmy x wzorem

$$x(\xi) = \int_a^\xi z(\eta) d\eta - \left(\int_a^\xi \phi_0(\eta) d\eta \right) \int_a^b z(\eta) d\eta.$$

Wtedy $x \in C_0^\infty(a, b)$. Mamy więc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \frac{d^{n+1}x}{d\xi^{n+1}}(\xi)y(\xi) d\xi = \int_a^b \frac{d^n}{d\xi^n}(x'(\xi))y(\xi) d\xi \\ &= \int_a^b \frac{d^n}{d\xi^n} \left(z(\xi) - \phi_0(\xi) \int_a^b z(\eta) d\eta \right) y(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

lub równoważnie

$$\int_a^b \frac{d^n z}{d\xi^n}(\xi)y(\xi) d\xi = \int_a^b \frac{d^n \phi_0}{d\xi^n}(\xi)y(\xi) d\xi \int_a^b z(\eta) d\eta.$$

Łatwo sprawdzamy przez indukcję, że dla $z \in C_0^\infty(a, b)$,

$$\int_a^b z(\eta) d\eta = \frac{1}{n!} \int_a^b \frac{d^n z}{d\xi^n}(\xi)(-\xi)^n d\xi.$$

Czyli

$$\int_a^b \frac{d^n z}{d\xi^n}(\xi) \left[y(\xi) - \frac{1}{n!}(-\xi)^n \int_a^b \frac{d^n \phi_0}{d\eta^n}(\eta)y(\eta) d\eta \right] d\xi = 0$$

i z założenia indukcyjnego wynika teza.

Dla dowodu samosprężoności operator A założmy, że $y \in D(A^*)$, czyli, że odwzorowanie $x \longrightarrow \langle Ax, y \rangle$ ma rozszerzenie do ciągłego funkcjonału

$$x \longrightarrow \langle x, A^*y \rangle.$$

Dlatego

$$\int_0^a x''(\xi)y(\xi) d\xi = \int_0^a x(\xi)z(\xi) d\xi.$$

Jeżeli $x(0) = 0$, to

$$x(\xi) = \int_0^\xi x'(s) ds = \int_0^\xi \left(x'(0) + \left[\int_0^s x''(t) dt \right] \right) ds.$$

Dlatego

$$\begin{aligned} \int_0^a x''(\xi)y(\xi) d\xi &= \int_0^a z(\xi) \left[x'(0)\xi + \int_0^a \int_0^a \mathbb{I}_{[0,\xi)}(s)\mathbb{I}_{[0,s]}(t)x''(t) ds dt \right] d\xi \\ &= x'(0) \int_0^a z(\xi)\xi d\xi \\ &\quad + \int_0^a x''(t) \left[\int_0^a \int_0^a \mathbb{I}_{[0,\xi)}(s)\mathbb{I}_{[0,s]}(t)z(\xi) d\xi ds \right] dt \\ &= x'(0) \int_0^a z(\xi)\xi d\xi + \int_0^a x''(t) \left[\int_t^a \left(\int_s^a z(\xi) d\xi \right) ds \right] dt. \end{aligned}$$

W szczególności, gdy $x \in C_0^\infty(0, a)$ to

$$\int_0^a x''(\xi) y(\xi) d\xi = \int_0^a x''(\xi) \int_\xi^a \left(\int_0^a z(t) dt \right) ds.$$

Z udowodnionego lematu mamy, że dla pewnych stałych γ, δ ,

$$y(\xi) = \int_\xi^a \left(\int_s^a z(t) dt \right) ds + \gamma + \delta\xi, \quad \xi \in [0, a].$$

Dlatego funkcja y spełnia wymagania sformułowane w definicji dziedziny $D(A)$, za wyjątkiem warunków brzegowych. Dla ich uzyskania, po podstawieniu, mamy

$$\int_0^a z''(\xi)(\gamma + \delta\xi) d\xi = \eta x'(0), \quad \eta = \int_0^a \left(\int_r^a z(s) ds \right) dr.$$

Przez bezpośredni rachunek otrzymujemy

$$\begin{aligned} x'(\xi)(\gamma + \delta\xi)|_0^a - \delta \int_0^a x'(\xi) d\xi &= x'(a)(\gamma + \delta a) - x'(0)\gamma - \delta(x(a) - x(0)) \\ &= x'(a)(\gamma + \delta a) - x'(0)\gamma = \eta x'(0). \end{aligned}$$

Czyli

$$x'(a)(\gamma + \delta a) = x'(0)(\eta + \gamma).$$

Z dowolności $x'(0)$, $x'(a)$, mamy

$$\gamma = -\eta, \quad \delta = \frac{\eta}{a}.$$

Ponieważ

$$y(\xi) = \int_\xi^a \left(\int_r^a z(s) ds \right) dr - \eta + \frac{\eta}{a}\xi, \quad \eta = \int_0^a \left(\int_r^a z(s) ds \right) dr,$$

dlatego $y(a) = 0$, $y(0) = 0$. Ostatecznie więc, gdy $y \in D(A^*)$ to $y \in D(A)$ i $z = Ay$.

6.4 Słabe rozwiązania równań semiliniowych

Równania

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F(y(t)), \quad y(0) = x, \quad (6.16)$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \quad y(0) = x \quad (6.17)$$

nie mają na ogół rozwiązań dla dowolnych warunków początkowych $x \in H$. Wprowadza się więc pojęcie słabego rozwiązania, wymagając by równanie było

spełnione, po obłożeniu go funkcjami próbnymi. Precyzyjna definicja wymaga pojęcia rdzenia operatora. *Rdzeń operatora* A to dowolny liniowy podzbiór $D \subset D(A)$ gęsty w normie generowanej przez A . Czyli, taki że dla dowolnego $x \in D(A)$ istnieje ciąg $x_n \rightarrow x$, taki że $x_n \in D$ i $Ax_n \rightarrow Ax$. Na przykład zbiór niezmienniczy dla $S(t)$, $t \geq 0$ i gęsty w E jest rdzeniem operatora A . Niech $D^* \subset D(A^*)$ będzie rdzeniem operatora sprzężonego $D(A^*)$. Ciągła funkcja y jest *slabym rozwiązaniem* równania (6.16) gdy dla dowolnego $z^* \in D^*$ mamy

$$\langle y(t), z^* \rangle = \langle x, z^* \rangle + \int_0^t \langle y(s), A^* z^* \rangle ds + \int_0^t \langle F(y(s)), z^* \rangle ds.$$

Twierdzenie 6.7 *Jeżeli $f(t)$, $t \geq 0$ jest funkcją całkowalną, taką że*

$$\langle y(t), z^* \rangle = \langle x, z^* \rangle + \int_0^t \langle y(s), A^* z^* \rangle ds + \int_0^t \langle f(s), z^* \rangle ds, \quad z^* \in D^*, \quad (6.18)$$

to

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Dlatego rozwiązania słabe równania (6.16) muszą spełniać równanie całkowe

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)F(y(s)) ds. \quad (6.19)$$

Z następnego twierdzenia wynikać będzie, że i na odwrót, każde rozwiązanie powyższego równania całkowego (6.19) jest również słabym rozwiązaniem równania (6.16). Potrzebny będzie lemat.

Lemat 6.2 *Jeżeli ciągła funkcja y spełnia warunek (6.18), to dla funkcji ζ klasy C^1 o wartościach w $D(A^*)$,*

$$\begin{aligned} \langle y(t), \zeta(t) \rangle = & \quad (6.20) \\ \langle x, \zeta(0) \rangle + \int_0^t \langle y(s), \zeta'(s) + A^* \zeta(s) \rangle ds + \int_0^t \langle f(s), \zeta(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Dowód. Załóżmy, że $\zeta(t) = x^* \phi(t)$, $x^* \in D^*$ i $\phi \in C^1[0, T]$. Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle y(t), x^* \phi(t) \rangle &= \frac{d}{dt} \phi(t) \langle y(t), x^* \rangle \\ &= \phi'(t) \langle y(t), x^* \rangle + \phi(t) \frac{d}{dt} \langle y(t), x^* \rangle \\ &= \phi'(t) \langle y(t), x^* \rangle + \phi(t) \langle y(t), A^* x^* \rangle + \langle f(t), x^* \rangle \phi(t). \end{aligned}$$

Dlatego

$$\langle y(t), \zeta(t) \rangle = \langle x, \zeta(0) \rangle + \int_0^t \langle f(s), \zeta(s) \rangle ds + \int_0^t \langle y(s), \zeta'(s) + A^* \zeta(s) \rangle ds.$$

Dowód Lematu 6.2 w ogólnym przypadku wynika natychmiast z następnego Lematu 6.3, w którym $C^1[0, T; E]$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych $f : [0, T] \rightarrow E$ z ciągłą pierwszą pochodną i z normą

$$\|f\|_1 = \sup_{0 \leq t \leq T} \left(|f(t)| + \left| \frac{df}{dt}(t) \right| \right).$$

Wystarczy w nim przyjąć, że przestrzeń Banacha E równa się $D(A^*)$ z normą

$$\|x^*\|_{D(A^*)} = \|x^*\| + \|A^* x^*\|, \quad x^* \in D(A^*).$$

Ponieważ wzór (6.20) zachodzi dla funkcji ξ ze zbioru liniowo gęstego w przestrzeni $C^1[0, T; D(A^*)]$, dlatego zachodzi dla wszystkich $\xi \in C^1[0, T; D(A^*)]$, przez oczywiste przejście graniczne. $\square$

Lemat 6.3 *Zbiór funkcji f postaci $f(t) = a\psi(t)$, $t \in [0, T]$, gdzie $a \in E_0$, $\psi \in C^1[0, T; E]$ oraz E_0 jest liniowo gęsty w E tworzy zbiór liniowo gęsty w przestrzeni $C^1[0, T; E]$.*

Dowód Lematu 6.3. Wystarczy udowodnić, że funkcje f postaci $f = a\psi$, gdzie $\psi \in C[0, T; R^1]$ oraz $a \in E_0$ są liniowo gęste w $C[0, T; E]$. Rzeczywiście, jeżeli $g \in C^1[0, T; E]$, to $g'(\cdot) \in C[0, T; E]$ i dlatego istnieje ciąg funkcji (f_n) postaci

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^n \psi_k^n(t), \quad t \in [0, T], \quad a_k^n \in E_0, \quad \psi_k^n \in C[0, T; R^1],$$

taki że

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |f_n(t) - g'(t)| \rightarrow 0.$$

Zdefiniujmy

$$g_n(t) = g(0) + \int_0^t f_n(s) ds = g(0) + \sum_{k=1}^{m_n} a_k^n \int_0^t \psi_k^n(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Wtedy funkcje g_n należą do zdefiniowanego w lemacie zbioru funkcji. Ponadto

$$\|g_n - g\|_1 \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |g_n(t) - g(t)| + \sup_{0 \leq t \leq T} |f_n(t) - g'(t)|$$

oraz

$$|g_n(t) - g(t)| = \left| \int_0^t [f_n(s) - g'(s)] ds \right| \leq T \sup_{0 \leq s \leq T} |f_n(s) - g'(s)|.$$

Stąd wynika sformułowany na początku dowodu fakt. Dla dowodu stwierdzenia o gęstości zauważmy, że jest on prawdziwy gdy E jest przestrzenią

skończenie wymiarową. Dla dowolnej jednak funkcji $f \in C[0, T; E]$ istnieje ciąg skończenie wymiarowych przestrzeni $E_n \subset \text{Lin } E_0$ i ciąg funkcji $(f_n) \subset C[0, T; E_n]$, taki że $f_n \rightarrow f$ jednostajnie. Kończy to dowód Lematu 6.3. $\square$

Zakończenie dowodu twierdzenia. Wystarczy we wzorze (6.20) przyjąć, że $\zeta(s) = S^*(t-s)x^*$, $x^* \in D(A^*)$. $\square$

Udowodnimy jeszcze zapowiedziane twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 6.8 *Jeżeli $f \in L^1[0, T; E]$, to funkcja*

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s) ds, \quad t \geq 0$$

jest słabym rozwiązaniem równania (6.17).

Dowód. Niech $z^* \in D(A^*)$. Wtedy

$$\frac{d}{ds} S^*(s)z^* = A^* S^*(s)z^*, \quad s \geq 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle A^* z^*, y(s) \rangle ds \\ &= \int_0^t \left\langle A^* z^*, \int_0^s S(s-\sigma)f(\sigma) d\sigma + S(s)x \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Tak więc po następujących elementarnych przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle A^* z^*, y(s) \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle S^*(s)A^* z^*, x \rangle ds + \int_0^t \left\langle A^* z^*, \int_0^s \mathbb{I}_{[0,s]}(\sigma)S(s-\sigma)f(\sigma) d\sigma \right\rangle ds \\ &= \int_0^t \left\langle \frac{d}{ds} S^*(s)z^*, x \right\rangle ds + \int_0^t \left\langle \int_\sigma^t S^*(s-\sigma)A^* z^* ds, f(\sigma) \right\rangle d\sigma \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} \langle S^*(s)z^*, x \rangle ds + \int_0^t \left\langle \int_\sigma^t \frac{d}{ds} S^*(s-\sigma)z^* ds, f(\sigma) \right\rangle d\sigma \\ &= \langle S^*(t)z^*, x \rangle - \langle z^*, x \rangle + \int_0^t \langle S^*(t-\sigma)z^* - z^*, f(\sigma) \rangle d\sigma \\ &= \langle S^*(t)z^*, x \rangle - \langle z^*, x \rangle + \left\langle z^*, \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma \right\rangle - \left\langle z^*, \int_0^t f(\sigma) d\sigma \right\rangle \\ &= \langle z^*, y(t) \rangle - \left\langle z^*, x + \int_0^t f(\sigma) d\sigma \right\rangle. \end{aligned}$$

A więc ostatecznie

$$\langle y(t), z^* \rangle = \langle x, z^* \rangle + \int_0^t \langle A^* z^*, y(s) \rangle ds + \int_0^t \langle f(s), z^* \rangle ds.$$

Kończy to dowód twierdzenia. $\square$

6.4.1 Słabe rozwiązania równań stochastycznych

Pojęcie słabego rozwiązania stochastycznych równań ewolucyjnych będzie dokładnie omówione w drugiej części wykładu. Tutaj ograniczymy się do kilku uwag wstępnych.

Niech L oznacza operator liniowy z pochodnymi cząstkowymi do rzędu 2, działający na funkcjach określonych na zbiorze $\Theta \subset \mathbb{R}$ a τ , tak zwany *operator brzegowy*, który przyporządkowuje liniowo funkcjom określonym na Θ , funkcje określone na brzeg $\partial\Theta$ zbioru Θ . Na przykład operator L może być laplasjanem $L = \Delta$ a τ obcięciem funkcji do brzegu lub wartością pochodnej normalnej funkcji w punktach brzegowych. Typowym stochastycznym równaniem ewolucyjnym jest następujące ogólne nieliniowe stochastyczne równanie dyfuzji

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi) = Lu(t, \xi) + f(u(t, \xi)) + g(u(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \quad t > 0, \xi \in \Theta,$$

z funkcją początkową ϕ i z *jednorodnym warunkiem brzegowym*

$$u(0, \xi) = \phi(\xi), \xi \in \Theta, \quad \tau u(t, \xi) = 0, \xi \in \partial\Theta.$$

Punktem wyjścia analizy ogólnego równania stochastycznego jest równanie liniowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(t, \xi) &= Ly(t, \xi), \quad t > 0, \xi \in \Theta, \\ y(0, \xi) &= \phi(\xi), \quad \xi \in \Theta, \\ \tau y(t, \xi) &= 0, \quad \xi \in \partial\Theta, \end{aligned}$$

które rozpatruje się w przestrzeni Hilberta H warunków początkowych. Przestrzeń H jest najczęściej przestrzenią Sobolewa $H = W^{2,m}(\Theta)$, na przykład $H = L^2(\Theta)$. Rozwiązanie, dla $t > 0$, ma najczęściej postać operatora całkowego, którego jądrem jest tak zwane *rozwiązanie podstawowe* $p(t, \xi, \eta)$, $t > 0, \xi, \eta \in \Theta$. Z drugiej strony, jeżeli równanie liniowe jest dobrze postawionym zagadnieniem Cauchy'ego, to rozwiązanie y definiuje półgrupę S operatorów liniowych na H . Tak więc

$$y(t) = S(t)\phi, \quad S(t)\phi(\xi) = \int_{\Theta} p(t, \xi, \eta)\phi(\eta) d\eta, \quad t > 0, \xi \in \Theta.$$

Generator A półgrupy S jest rozszerzeniem operatora L i jego dziedzina ma często postać

$$D(A) = \{\phi : \tau\phi = 0\} \cap W^{2,m}(\Theta).$$

Dziedzina operatora sprzężonego jest podobnej postaci

$$D(A^*) = \{\phi : \tau^*\phi = 0\} \cap W^{2,m^*}$$

dla pewnego operatora brzegowego τ^* i pewnej liczby m^* .

Założmy, że funkcja g występująca w równaniu stochastycznym jest równa 0, czyli, że mamy do czynienia z deterministycznym równaniem semiliniowym. Przyjmijmy, że liniowy zbiór D^* , jest gęsty w $D(A^*)$. Wtedy słabe rozwiązanie takiego równania jest funkcją $u(t)$, $t \geq 0$, o wartościach w H , taką że

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} u(t, \xi) \psi(\xi) d\xi &= \int_{\Theta} u(0, \xi) \psi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Theta} u(s, \xi) A^* \psi(\xi) d\xi ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Theta} f(u(s, \xi)) \psi(\xi) d\xi ds, \quad \psi \in D^*, \end{aligned}$$

a równoważne sformułowanie w postaci całkowej ma postać

$$\begin{aligned} u(t, \xi) &= \int_{\Theta} p(t, \xi, \eta) \phi(\eta) d\eta \\ &\quad + \int_0^t \left(\int_{\Theta} p(t-s, \xi, \eta) f(u(s, \eta)) d\eta \right) ds, \quad t \geq 0, \xi \in \Theta. \end{aligned}$$

Dla ogólnego równania nieliniowego i stochastycznego mamy odpowiednio

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} u(t, \xi) \psi(\xi) d\xi &= \int_{\Theta} u(0, \xi) \psi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Theta} u(s, \xi) A^* \psi(\xi) d\xi ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Theta} f(u(s, \xi)) \psi(\xi) d\xi ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Theta} g(u(s, \xi)) \psi(\xi) dW(s, \xi) d\xi \quad t > 0, \psi \in D^* \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} u(t, \xi) &= \int_{\Theta} p(t, \xi, \eta) \phi(\eta) d\eta + \int_0^t \left(\int_{\Theta} p(t-s, \xi, \eta) f(u(s, \eta)) d\eta \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Theta} p(t-s, \xi, \eta) g(u(s, \eta)) dW(s, \eta) d\eta, \quad t > 0, \xi \in \Theta. \end{aligned}$$

Ostatnie równanie, w abstrakcyjnej formie, zapisuje się następująco

$$u(t) = S(t)\phi + \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds + \int_0^t S(t-s)G(u(s))dW(s), \quad t \geq 0.$$

Pełne sformułowanie rozwiązania równania stochastycznego wymaga ogólnej definicji całki stochastycznej. Zauważmy, że w całce stochastycznej

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s), \quad t \geq 0,$$

występują procesy o wartościach operatorowych. Proces Wienera W przyjmuje wartości w jakiejś przestrzeni Hilberta U a $\Phi(t)$ to odwzorowanie liniowe z przestrzeni U w przestrzeń H . W wyniku otrzymuje się proces o wartościach w przestrzeni Hilberta H . W naszym przypadku, dla dowolnego $t > 0$,

$$\Phi(s) = S(t-s)G(u(s)), \quad s \in [0, t].$$

Literatura

1. J. Bertoin : *Lévy processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
2. P. Courrège : *Sur la forme integro-différentielle des operateurs de C_K^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum*, in Sémin. Théorie du Potentiel 1965/66, Exposé 2.
3. G. Da Prato, J. Zabczyk : *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, 1992.
4. G. Da Prato, J. Zabczyk : *Convergence to equilibrium for classical and quantum spin systems*, Probability Theory and Related Fields, 103(1995), 529- 552.
5. G. Da Prato, J. Zabczyk : *Ergodicity for infinite dimensional systems*, Cambridge University Press, 1996.
6. E. B. Davis : *One-parameter semigroups*, Academic Press, 1980.
7. K.-J. Engel, R. Nagel : *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer-Verlag, 2000.
8. N. Ikeda, S. Watanabe : *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North Holland - Kodanska, 1981.
9. K. Ito : *On stochastic differential equations*, Mem. Amer. Math. Soc. 4, 1-51, 1951.
10. P. Protter : *Stochastic integration and differential equations*, Springer-Verlag, 1995.
11. K.-I. Sato : *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
12. J. B. Walsh : *An introduction to stochastic partial differential equations*, LNiM 1180, Springer-Verlag, 1984.
13. J. Zabczyk : *Leverhulme lectures on stochastic evolution equations and applications*, Warwick Preprint: 8/2001.
14. B. Zegarliński : *The strong exponential decay to equilibrium for the stochastic dynamics associated to the unbounded spin systems on a lattice*, manuscript.

Równania z szumem ogólnym

Całki w przestrzeniach Banacha

7.1 Całka Bochnera

Jeżeli $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną i $X : \Omega \rightarrow E$ jest zmienną losową o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha, to $\mathbb{E} X$ interpretujemy jako *całkę Bochnera*. To znaczy, wymagamy, by $\mathbb{E} |X|_E < \infty$ i definiujemy

$$\mathbb{E} X = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} X_N,$$

gdzie $\{X_N\}$ jest ciągiem zmiennych losowych prostych, takich że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} |X - X_N|_E \rightarrow 0.$$

Zauważmy, że dla zmiennych prostych Z ,

$$|\mathbb{E} Z|_E \leq \mathbb{E} |Z|_E.$$

Stąd ciąg $\{\mathbb{E} X_N\}$ spełnia warunek Cauchy'ego

$$|\mathbb{E} X_N - \mathbb{E} X_M|_E \leq \mathbb{E} |X_N - X_M|_E \leq \mathbb{E} |X_N - X|_E + \mathbb{E} |X_M - X|_E \rightarrow 0$$

gdzie $N, M \rightarrow \infty$. Ciąg $\{\mathbb{E} X_N\}$ jest zbieżny i jego granica nie zależy od ciągu aproksymującego

$$|\mathbb{E} X_N - \mathbb{E} X'_N|_E \leq \mathbb{E} |X_N - X'_N|_E \leq \mathbb{E} |X_N - X|_E + \mathbb{E} |X - X'_N|_E \rightarrow 0,$$

gdzie $N \rightarrow \infty$.

Pozostaje do pokazania istnienie ciągu aproksymującego. Wybieramy zbiór gęsty $\{v_1, v_2, \dots\}$ w E . Dla dowolnych N i $\omega \in \Omega$ definiujemy $X_N(\omega)$ jako ten z wektorów $v_1, \dots, v_N$, który ma najmniejszy indeks i jest najbliższy $X(\omega)$. Wtedy

$$|X_N(\omega) - X(\omega)|_E \downarrow 0.$$

Ponieważ $\mathbb{E} |X|_E < \infty$, mamy $\mathbb{E} |X_N - X|_E < \infty$ dla dowolnego N i dlatego

$$\mathbb{E} |X_N - X|_E \rightarrow 0 \quad \text{gdzie } N \rightarrow \infty.$$

7.2 Warunkowa wartość oczekiwana

Lemat 7.1 *Jeżeli X jest całkowalna, to dla dowolnego σ -podciała $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ istnieje dokładnie jedna $\mathfrak{G}$ -mierzalna zmienna Z , taka że*

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Z d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathfrak{G}.$$

Dowód jedyności. Dla dowolnego $\psi \in E^*$,

$$\int_A \psi(X) d\mathbb{P} = \int_A \psi(Z) d\mathbb{P} = \int_A \psi(Z') d\mathbb{P},$$

czyli $\psi(Z) = \psi(Z')$, $\mathbb{P}$ -prawie wszędzie z jednoznaczności warunkowej wartości oczekiwanej dla przypadku rzeczywistego. Stąd $\psi(Z - Z') = 0$, $\mathbb{P}$ -prawie wszędzie i dlatego $Z - Z' = 0$, $\mathbb{P}$ -prawie wszędzie. Tutaj, korzystamy z faktu, że jeżeli $\psi(Y) = 0$, $\mathbb{P}$ -prawie wszędzie dla dowolnego $\psi \in E^*$, to $Y = 0$, $\mathbb{P}$ -prawie wszędzie. Istotnie, załóżmy, że $\mathbb{P}(|Y|_E > 0) > 0$. Istnieje punkt $a \neq 0$, taki że $\mathbb{P}(|Y - a|_E < \varepsilon) > 0$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i w szczególności

$$\mathbb{P}\left(|Y - a|_E < \frac{|a|_E}{3}\right) > 0.$$

Rozważmy $\psi \in E^*$ taki, że $\psi(a) = |a|_E$ oraz $|\psi|_{E^*} = 1$. Wtedy z dodatnim prawdopodobieństwem

$$|\psi(Y) - |a|_E|_E = |\psi(Y - a)|_E \leq |Y - a|_E < \frac{|a|_E}{3}.$$

Dlatego

$$|\psi(Y)| > \frac{2|a|_E}{3}$$

z dodatnim prawdopodobieństwem, co prowadzi do sprzeczności. $\square$

Dowód istnienia. Łatwo się pokazuje istnienie dla zmiennej losowej X prostej. Ponadto, dla X prostej zachodzi oszacowanie

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(X \mid \mathfrak{G})|_E \leq \mathbb{E}|X|_E.$$

Następnie dowodzi się istnienie przez aproksymację X ciągiem zmiennych losowych prostych. Można wziąć ciąg aproksymujący z konstrukcji całki Bochnera. $\square$

Lemat 7.2 *Jeżeli $\mathbb{E}|X|_E < \infty$, to*

$$|\mathbb{E}(X \mid \mathfrak{G})|_E \leq \mathbb{E}(|X|_E \mid \mathfrak{G}). \quad (7.1)$$

Dowód. Jeżeli

$$X = \sum_{j=1}^N x_j \chi_{A_j},$$

gdzie $A_1, \dots, A_N$ są rozłączne, to

$$\mathbb{E}(X \mid \mathfrak{G}) = \sum_{j=1}^N x_j \mathbb{E}(\chi_{A_j} \mid \mathfrak{G})$$

i wtedy

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(X \mid \mathfrak{G})|_E &\leq \sum_{j=1}^N |x_j|_E \mathbb{E}(\chi_{A_j} \mid \mathfrak{G}) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^N |x_j|_E \chi_{A_j} \mid \mathfrak{G} \right) \\ &\leq \mathbb{E}(|X|_E \mid \mathfrak{G}) \end{aligned}$$

oraz

$$\mathbb{E} |\mathbb{E}(X \mid \mathfrak{G})|_E \leq \mathbb{E} |X|_E.$$

Ogólnie, niech $\{X_N\}$ będzie ciągiem funkcji prostych takich, że $|X - X_N|_E \downarrow 0$. Wówczas $\mathbb{E} |X_N - X_M|_E \rightarrow 0$. Tak więc

$$\mathbb{E} |\mathbb{E}(X_N \mid \mathfrak{G}) - \mathbb{E}(X_M \mid \mathfrak{G})|_E \leq \mathbb{E} |X_N - X_M|_E.$$

Stąd ciąg $Z_N = \mathbb{E}(X_N \mid \mathfrak{G})$ jest zbieżny w $L^1(\Omega, \mathfrak{G}, \mathbb{P}; E)$ do pewnej zmiennej Z . Ponieważ

$$\int_A X_N d\mathbb{P} = \int_A Z_N d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathfrak{G},$$

to można przejść do granic. Otrzymujemy więc

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Z d\mathbb{P}$$

co dowodzi (7.1). $\square$

7.3 Martyngały

Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ będzie filtrowaną przestrzenią probabilistyczną. Proces $X(t)$, $t \geq 0$ o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha jest *martyngałem*, gdy

$$\mathbb{E}(X(t) \mid \mathfrak{F}_s) = X(s), \quad \forall t \geq s.$$

Lemat 7.3 *Jeżeli $X(t)$, $t \geq 0$, jest martyngealem, to $|X(t)|_E$, $t \geq 0$, jest podmartyngealem.*

Dowód.

$$\mathbb{E}(|X(t)|_E | \mathfrak{F}_s) \geq |\mathbb{E}(X(t) | \mathfrak{F}_s)|_E \geq |X(s)|_E.$$

□

Lemat 7.4 (nierówność Jensena) *Jeżeli ψ jest funkcją wypukłą, a Z rzeczywistą zmienną losową taką, że $\mathbb{E}|Z| < \infty$ oraz $\mathbb{E}|\psi(Z)| < \infty$, to dla dowolnego σ -podciała $\mathfrak{G}$ ciała $\mathfrak{F}$ zachodzi nierówność*

$$\psi(\mathbb{E}(Z | \mathfrak{G})) \leq \mathbb{E}(\psi(Z) | \mathfrak{G}), \quad \mathbb{P} - \text{prawie wszędzie.}$$

Dowód. Istnieją ciągi rzeczywiste $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, takie że

$$\psi(\xi) = \sup(a_n + b_n \xi) = \sup \psi_n(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Ze względu na liniowość i monotoniczność warunkowej wartości oczekiwanej otrzymujemy

$$\psi_n(\mathbb{E}(Z | \mathfrak{G})) = \mathbb{E}(\psi_n(Z) | \mathfrak{G}) \leq \mathbb{E}(\psi(Z) | \mathfrak{G}).$$

□

Lemat 7.5 *Jeżeli $Z(t)$, $t \geq 0$, jest podmartyngealem, a ψ jest funkcją rosnącą wypukłą, to $\psi(Z)$ jest również podmartyngealem.*

Dowód. Niech $Z(t)$, $t \geq 0$, będzie podmartyngealem, czyli

$$\mathbb{E}(Z(t) | \mathfrak{F}_s) \geq Z(s).$$

Jeżeli ψ rosnąca, to

$$\psi(\mathbb{E}(Z(t) | \mathfrak{F}_s)) \geq \psi(Z(s)).$$

Jeśli dodatkowo ψ jest wypukłą, to

$$\psi(\mathbb{E}(Z(t) | \mathfrak{F}_s)) \leq \mathbb{E}(Z(t) | \mathfrak{F}_s),$$

czyli

$$\psi(Z(s)) \leq \mathbb{E}(Z(t) | \mathfrak{F}_s), \quad t \geq s.$$

□

7.4 Własności martyngałów

Jako natychmiastowy wniosek z Lematów 7.3 i 7.5 mamy następujący fakt.

Lemat 7.6 (i) Jeżeli $X(t)$, $t \geq 0$, jest martingalem o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banach a E oraz $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją rosnącą i wypukłą, to $\psi(|X(t)|)$, $t \geq 0$, jest podmartingalem.

(ii) Jeżeli $X(t)$, $t \geq 0$, jest martingalem o wartościach w E , to dla $p \geq 1$, $|X(t)|_E^p$, $t \geq 0$ jest podmartingalem.

Przypomnijmy klasyczne maksymalne nierówności dla podmartingałůw z czasem dyskretnym.

Lemat 7.7 (nierówności Dooba) Jeżeli Z_n , $n = 1, \dots$ jest nieujemnym podmartingalem, to dla $p > 1$ i $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_n Z_n > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^p} \sup_n \mathbb{E} Z_n^p.$$

Ponadto

$$\left(\mathbb{E} \sup_n Z_n^p\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \sup_n (\mathbb{E} Z_n^p)^{1/p}.$$

Dla czasu ciągłego mamy następujące klasyczne nierówności.

Lemat 7.8 (nierówności Dooba dla czasu ciągłego) Jeżeli $X(t)$ jest ciągłym martingalem, $p > 1$, to

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \leq T} |X(t)| \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{t \leq T} \mathbb{E} |X(t)|^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} |X(T)|^p.$$

Dla całki stochastycznej względem d -wymiarowego procesu Wienera znane są następujące nierówności.

Lemat 7.9 Jeżeli

$$X(t) = \int_0^t \phi(s) dW(s), \quad t \geq 0,$$

gdzie $\phi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow M(d \times n)$ jest procesem adoptowalnym, to

$$\mathbb{E} |X(t)|_{\mathbb{R}^n} \leq (\mathbb{E} |X(t)|_{\mathbb{R}^n}^2)^{1/2} = \left(\mathbb{E} \int_0^t \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)}^2 ds \right)^{1/2}.$$

Ponadto dla $p > 1$ istnieje uniwersalna stała c_p , taka że

$$\mathbb{E} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \phi(s) dW(s) \right|_{\mathbb{R}^n}^p \leq c_p \mathbb{E} \left| \int_0^T \phi(s) dW(s) \right|_{\mathbb{R}^n}^p.$$

W szczególności

$$\mathbb{E} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \phi(s) dW(s) \right|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq c_2 \mathbb{E} \int_0^T \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)}^2 ds.$$

Całka stochastyczna w wymiarze skończonym

8.1 Całka stochastyczna względem rzeczywistego procesu Wienera

Założmy, że $\mathfrak{A} = (\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ jest filtrowaną przestrzenią probabilistyczną oraz niech W będzie rzeczywistym procesem Wienera na $\mathfrak{A}$.

Przypomnijmy, że $W(t)$, $t \geq 0$ jest procesem o ciągłych trajektoriach,

$$\mathbb{E} W(t)W(s) = t \wedge s, \quad t, s \geq 0.$$

Ponadto, rozkłady W są gaussowskie $\mathcal{L}(W(t)) = N_t$ i przyrosty $W(t) - W(s)$ i $W(s)$, $t \geq s \geq 0$ są niezależne.

Będziemy zakładali, że dla $t \geq 0$, $W(t)$ jest $\mathfrak{F}_t$ mierzalne oraz, że dla dowolnych $t \geq s \geq 0$, $W(t) - W(s)$ jest niezależne od $\mathfrak{F}_s$. W szczególności, przy odpowiednich założeniach całkowalności, dla dowolnej $\mathfrak{F}_s$ -mierzalnej zmiennej losowej Z i dla dowolnej funkcji mierzalnej ψ ,

$$\mathbb{E} Z \psi(W(t) - W(s)) = \mathbb{E} Z \mathbb{E} \psi(W(t) - W(s)).$$

Całkę Itô $\int_0^t \psi(s) dW(s)$ dla mierzalnego i adoptowalnego procesu $\psi(s)$, $s \geq 0$ definiuje się najpierw dla procesów prostych

$$\psi = \sum_i \psi(t_i) \chi_{[t_i, t_{i+1})},$$

gdzie $t_0 = 0$, $\{t_i\}$ ciąg rosnący oraz $\psi(t_i)$ jest $\mathfrak{F}_{t_i}$ -mierzalna i ograniczona dla $i = 0, 1, \dots$. Wtedy

$$\int_0^t \psi(s) dW(s) = \sum_k \psi(t_k) (W(t_{k+1} \wedge t) - W(t_k \wedge t)).$$

Wówczas mamy następującą tożsamość izometryczną

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \psi(s) dW(s) \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^t \psi^2(s) ds.$$

Ponadto zachodzi nierówność Barkholdera–Davisa–Gundy; dla $T > 0$, $p > 0$ istnieje $c_p > 0$, taka że

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \psi(s) dW(s) \right|^p \leq c_p \mathbb{E} \left(\int_0^T \psi^2(s) ds \right)^{p/2}.$$

Stąd całkę stochastyczną rozszerza się najpierw na procesy adaptowalne ψ , dla których

$$\mathbb{E} \int_0^T \psi^2(s) ds < \infty, \quad T > 0,$$

a następnie przez lokalizację

$$\int_0^t \psi(s) \chi_{[0, \tau_N)}(s) dW(s),$$

gdzie

$$\tau_N := \inf \{ t \geq 0 : \int_0^t \psi^2(s) ds \geq N \}, \quad N \in \mathbb{N},$$

na klasę wszystkich procesów adoptowalnych dla których

$$\mathbb{P} \left(\int_0^T \psi^2(s) ds < \infty \right) = 1, \quad T > 0.$$

Jeżeli

$$\mathbb{E} \int_0^T \psi^2(t) dt < \infty, \quad \forall T > 0,$$

to proces

$$\int_0^t \psi(s) dW(s), \quad t \geq 0$$

jest ciągłym $(\mathfrak{F}_t)$ -martyngałem całkownym z kwadratem.

8.2 d -Wymiarowy proces Wienera

Niech $W_1, \dots, W_d$ będą niezależnymi procesami Wienera określonymi na filtrowanej przestrzeni probabilistycznej $\mathfrak{A}$. Niech $\{\psi_i\}$ będą adoptowalnymi rzeczywistymi procesami spełniającymi

$$\mathbb{E} \int_0^T \psi_i^2(s) ds < \infty, \quad T \geq 0.$$

Wówczas

$$\mathbb{E} \left(\left[\int_s^t \psi_i(r) dW_i(r) \int_s^t \psi_j(r) dW_j(r) \right] \mid \mathfrak{F}_s \right) = 0, \quad i \neq j, \quad t > s.$$

Tak więc, dla adaptowalnego procesu ψ o wartościach macierzowych $M(d \times n)$ mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int_0^t \phi(s) dW(s) \right|_{\mathbb{R}^n}^2 &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t \sum_{j=1}^d \psi_{ij}(s) dW_j(s) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^d \mathbb{E} \int_0^t \psi_{ij}(s) dW_j(s) \int_0^t \psi_{ik}(s) dW_k(s) \\ &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \int_0^t \psi_{ij}^2(s) ds \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \|\psi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)}^2 ds. \end{aligned}$$

Poniżej przedstawimy metodę aproksymacji procesu adaptowalnego procesami prostymi. Jeżeli ψ ma ciągłe trajektorie i jest jednostajnie ograniczony, to ciąg aproksymujący $\{\psi_N\}$ wybieramy w następujący sposób

$$\psi_N = \sum_j \psi(t_j^N) \chi_{[t_j^N, t_{j+1}^N)},$$

gdzie $\{t_j^N\}$ jest zagęszczającym się ciągiem podziałów $[0, \infty)$. Wówczas mamy

$$\mathbb{E} \int_0^T (\psi_N(t) - \psi(t))^2 dt \rightarrow 0, \quad T \geq 0.$$

Jeżeli ψ adaptowalny i jednostajnie ograniczony to jako ciąg aproksymujący można wybrać ciąg

$$\psi_N = \phi_N(t) * \psi,$$

gdzie $\phi_N = N \chi_{[-1/N, 0]}$. Wynika to, patrz Lemat 2, z następującej nierówności Younga.

Lemat 8.1 (nierówność Younga) Dla dowolnych $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ splot $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ oraz

$$\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Dowód. Mamy

$$\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t-s)| |f(s)| ds \right)^2 dt.$$

Z nierówności Schwarz

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t-s)| |f(s)| ds \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t-s)|^2 |f(s)| ds \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} 1^2 |f(s)| ds \right)^{1/2}.$$

Stąd

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |g(t-s)| |f(s)| ds \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t-s)|^2 |f(s)| ds \right) \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Tak więc

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t-s)| |f(s)| ds \right)^2 dt \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

□

Lemat 8.2 Niech $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ i $\phi_N = N\chi_{[-1/N, 0]}$. To

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_N * \psi(t)|^2 dt \leq \int_{\mathbb{R}} \psi^2(t) dt$$

oraz

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_N * \psi(t) - \psi(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{gdy } N \rightarrow \infty.$$

Wniosek. Jeżeli

$$\mathbb{E} \int_0^T \psi^2(s) ds < \infty, \quad \forall T \geq 0,$$

to

$$\mathbb{E} \int_0^T |\phi_N * \psi(t) - \psi(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{gdy } N \rightarrow \infty.$$

Całka stochastyczna w przestrzeni Hilberta

W tym i następnych wykładach każda przestrzeń Hilberta będzie przestrzenią ośrodkową i rzeczywistą. Niech $\mathfrak{A} = (\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ będzie filtrowaną przestrzenią probabilistyczną oraz niech H będzie przestrzenią Hilberta.

Definicja 9.1 Niech Q będzie symetrycznym operatorem śladowym na H . Proces $W : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow H$ jest procesem Wienera w H z operatorem kowariancji Q , gdy:

- (i) W jest adaptowalny, mierzalny i o ciągłych trajektoriach w H ,
- (ii) $W(0) = 0$, W ma przyrosty niezależne i dla dowolnych $t > s \geq 0$, $W(t) - W(s)$ nie zależy od $\mathfrak{F}_s$,
- (iii) rozkład $\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = \mathcal{N}(0, (t - s)Q)$, $t > s \geq 0$.

Przypomnijmy, że element losowy X w H ma rozkład gaussowski $\mathcal{N}(0, Q)$ gdy dla dowolnych elementów $h_1, \dots, h_n \in H$ wektor losowy w $\mathbb{R}^n$,

$$(\langle X, h_1 \rangle_H, \dots, \langle X, h_n \rangle_H)$$

jest gaussowski oraz

$$\mathbb{E} \langle X, h \rangle_H \langle X, g \rangle_H = \langle Qh, g \rangle_H, \quad h, g \in H.$$

Niech W będzie procesem Wienera o wartościach w H i o operatorze kowariancji $Q \geq 0$. Operator Q musi być nieujemny, zwarty i o skończonym śladzie. Niech $\{\lambda_k\}$ i $\{e_k\}$ będą ciągami wartości własnych i wektorów własnych Q . Można zakładać, że ciąg $\{e_k\}$ tworzy bazę ortonormalną U . Z definicji procesu Wienera wynika, że procesy

$$W_k(t) = \left\langle W(t), \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\rangle_H, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9.1)$$

są dobrze zdefiniowane dla wszystkich k takich, że $\lambda_k > 0$. Dla k takich, że $\lambda_k = 0$, wprowadzamy sztucznie niezależne unormowane (standardowe)

procesy Wienera W_k . Zauważmy, że $\{W_k\}$ są niezależnymi standardowymi procesami Wienera. Jest tak dlatego, że dla dowolnych $h, g \in H$, $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{E} \langle W(t), h \rangle_H \langle W(s), g \rangle_H = s \wedge t \langle Qh, g \rangle_H.$$

W szczególności

$$\begin{aligned} \mathbb{E} W_k(t) W_l(s) &= s \wedge t \left\langle Q \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \frac{e_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right\rangle_H \\ &= s \wedge t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \cdot \lambda_k \langle e_k, e_l \rangle_H = s \wedge t \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}} \delta_{k,l} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{gdy } k \neq l \\ s \wedge t, & \text{gdy } k = l. \end{cases} \end{aligned}$$

Dla gaussowskich zmiennych losowych nieskorelowanie pociąga niezależność, dlatego procesy W_k , $k = 1, 2, \dots$, są niezależne. Ponieważ dla dowolnego $x \in H$,

$$x = \sum_k \langle x, e_k \rangle_H e_k,$$

to

$$W(t) = \sum_k \langle W(t), e_k \rangle_H e_k$$

i w konsekwencji

$$W(t) = \sum_k \sqrt{\lambda_k} \left\langle W(t), \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\rangle_H e_k = \sum_k \sqrt{\lambda_k} W_k(t) e_k.$$

Odwrotnie, jeżeli $\sum \lambda_k < \infty$ i $\{e_k\}$ jest bazą ortonormalną H , a $\{W_k\}$ jest ciągiem niezależnych unormowanych rzeczywistych procesów Wienera, to proces W zdefiniowany jak

$$W(t) = \sum_k \sqrt{\lambda_k} W_k(t) e_k, \quad t \geq 0, \quad (9.2)$$

jest procesem Wienera z operatorem kowariancji Q zadany wzorem

$$Qh = \sum_k \lambda_k \langle h, e_k \rangle_H e_k, \quad h \in H.$$

Twierdzenie 9.1 *Z prawdopodobieństwem 1 szereg definiujący proces W wzorem (9.2) jest zbieżny jednostajnie na dowolnym skończonym przedziale. Stąd w szczególności proces W ma ciągłe trajektorie w H .*

Z każdym procesem Wienera możemy związać podprzestrzeń $\mathcal{H}_W = Q^{1/2}H$ przestrzeni H , która staje się przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle h, g \rangle_{\mathcal{H}_W} = \langle Q^{-1/2}h, Q^{-1/2}g \rangle_H.$$

Przypomnijmy, że dla dowolnego operatora liniowego L przekształcającego przestrzeń Hilberta H w przestrzeń Hilberta U przez L^{-1} oznaczamy operator liniowy działający z $L(H) \subset U$ w H według wzoru

$$\text{dla } a \in L(H), \quad L^{-1}a = b,$$

gdzie b jest elementem zbioru $\{c : Lc = a\}$ o najmniejszej normie. Zauważmy, że wektory

$$f_k = \sqrt{\lambda_k} e_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

tworzą bazę ortonormalną $\mathcal{H}_W$,

$$\begin{aligned} \langle f_k, f_l \rangle_{\mathcal{H}_W} &= \langle Q^{-1/2}f_k, Q^{-1/2}f_l \rangle_H \\ &= \langle \sqrt{\lambda_k} Q^{-1/2}e_k, \sqrt{\lambda_l} Q^{-1/2}e_l \rangle_H \\ &= \langle e_k, e_l \rangle_H. \end{aligned}$$

Zupełność wynika z faktu, że $\mathcal{H}_W = Q^{-1/2}H$. Zauważmy, że

$$W(t) = \sum_k W_k f_k,$$

gdzie $\{f_k\}$ jest bazą ortonormalną $\mathcal{H}_W$. Ze względu na przestrzeń $\mathcal{H}_W$, proces Wienera ma identycznościowy operator kowariancji. Mówi się, że jest on ze względu na $\mathcal{H}_W$ *cylicydrycznym procesem Wienera*. Przestrzeń $\mathcal{H}_W$ nazywać będziemy *jądrem reprodukcijnym W* .

9.1 Całka jako izometria

Niech W będzie procesem Wienera na przestrzeni Hilberta U . Naszym celem jest zdefiniowanie

$$\int_0^t \phi(s) dW(s), \quad t \geq 0,$$

gdzie ϕ jest procesem o wartościach będących operatorami liniowymi (niekoniecznie ciągłymi) z przestrzeni U w przestrzeń Hilberta H .

Lemat 9.1 *Jeżeli ξ jest zmienną gaussowską w przestrzeni Hilberta U , $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}(0, Q)$, a Γ jest ciągłym operatorem liniowym z U w H , to $\Gamma\xi$ jest również zmienną gaussowską i $\mathcal{L}(\Gamma\xi) = \mathcal{N}(0, \Gamma Q \Gamma^*)$. Co więcej,*

$$\mathbb{E} |\Gamma\xi|_H^2 = \|\Gamma Q^{1/2}\|_{L_{(HS)}(U, H)}^2.$$

Dowód.

$$\mathbb{E} \langle \Gamma \xi, g \rangle_H \langle \Gamma \xi, h \rangle_H = \mathbb{E} \langle \xi, \Gamma^* g \rangle_U \langle \xi, \Gamma^* h \rangle_U = \langle Q \Gamma^* g, \Gamma^* h \rangle_U = \langle \Gamma Q \Gamma^* g, h \rangle_H.$$

Niech $\{e_k\}$ będzie bazą ortonormalną U wektorów własnych Q . Wówczas $f_k = Q^{1/2}e_k$ jest bazą ortonormalną $\mathcal{H} = Q^{1/2}U$. Tak więc

$$\begin{aligned} \text{Tr } \Gamma Q \Gamma^* &= \text{Tr } \Gamma^* \Gamma Q = \text{Tr } Q^{1/2} \Gamma^* \Gamma Q^{1/2} = \sum_k \left\langle \Gamma^* \Gamma Q^{1/2} e_k, Q^{1/2} e_k \right\rangle_U \\ &= \sum_k \langle \Gamma^* \Gamma f_k, f_k \rangle_U = \sum_k |\Gamma f_k|_H^2 = \|\Gamma\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}, H)}^2. \end{aligned}$$

□

Lemat 9.2 *Niech ϕ będzie operatorem liniowym ograniczonym z U w H , wtedy*

$$\mathbb{E} |\phi W(t)|_H^2 = t \|\phi\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2,$$

gdzie $\mathcal{H}_W = Q^{1/2}U$ jest jądrem reprodukcyjnym W .

Stąd łatwo dowodzimy, że procesy całkwalne powinny przyjmować wartości w $L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)$. Jeżeli ϕ jest adaptowalny i mierzalny oraz

$$\mathbb{E} \int_0^T \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds < \infty,$$

to

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t \phi(s) dW(s) \right|_H^2 = \mathbb{E} \int_0^t \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds < \infty, \quad t \leq T.$$

Ogólnie definiujemy całkę dla procesów mierzalnych i adaptowalnych spełniających

$$\mathbb{P} \left(\int_0^T \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds < \infty \right) = 1, \quad T \geq 0$$

9.2 Wzór Itô

Wzór Itô pełni w teorii całki stochastycznej szczególną rolę. Nam posłuży do dowodu nierówności Burkholdera–Davisa–Gundy’ego.

Twierdzenie 9.2 *Niech W będzie procesem Wienera na przestrzeni Hilberta U z operatorem kowariancji Q . Załóżmy, że z jest procesem Itô, to jest*

$$dz(t) = \psi(t)dt + \phi(t)dW(t), \quad t \geq 0,$$

gdzie ψ i ϕ są mierzalnymi i adaptowalnymi procesami o wartościach odpowiednio przestrzeni Hilberta H i przestrzeni operatorów $L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)$, gdzie

$\mathcal{H}_W = Q^{1/2}U$ jest jądrem reprodukcyjnym W . Zakładamy, że dla wszystkich $T > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\int_0^T |\psi(t)|_H dt < \infty \right) = 1 = \mathbb{P} \left(\int_0^T \|\phi(t)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 dt < \infty \right).$$

Wówczas dla $f \in C^2(H; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} df(z(t)) &= \langle Df(z(t)), dz(t) \rangle_H + \frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathcal{H}_W} [\phi^*(t) D^2 f(z(t)) \phi(t)] dt \\ &= \left\{ \langle Df(z(t)), \psi(t) \rangle_H + \frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathcal{H}_W} [\phi^*(t) D^2 f(z(t)) \phi(t)] \right\} dt \\ &\quad + \langle Df(z(t)), \phi(t) dW(t) \rangle_H. \end{aligned}$$

W tezie twierdzenia

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_W} [\phi^*(t) D^2 f(z(t)) \phi(t)]$$

jest śladem operatora $\phi^*(t) D^2 f(z(t)) \phi(t)$ rozumianego jako operator z jądra reprodukcyjnego $\mathcal{H}_W$ procesu Wienera W w przestrzeń H . Ślad ten jest identyczny z

$$\text{Tr} \left[\left(\phi(t) Q^{1/2} \right)^* D^2 f(z(t)) \left(\phi(t) Q^{1/2} \right) \right]$$

traktowanego jako operator z U w H . Dowód wzoru Itô dla procesów przyjmujących wartości w przestrzeni Hilberta można znaleźć w [9], str. 105.

Ponieważ $\phi(t)$ traktowany jako operator z $\mathcal{H}_W$ w H jest Hilberta-Schmidta, lub równoważnie $\phi(t) Q^{1/2}$ jest operatorem Hilberta-Schmidta z U w H , dlatego powyższe ślady są skończone przy (minimalnym) założeniu, że $D^2 f(z(t))$ jest operatorem ograniczonym z H w H .

W zastosowaniach potrzebny będzie nam następujący lemat dotyczący pochodnej funkcji $f(x) = |x|^p$, gdy $p > 2$. Jego prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Lemat 9.3 Dla dowolnego $p > 2$ funkcja $F : H \ni x \rightarrow |x|^p \in \mathbb{R}$ jest klasy $C^2(H; \mathbb{R})$ oraz

$$Df(x) = p|x|^{p-2}x, \quad D^2 f(x) = p|x|^{p-2}I + p(p-2)|x|^{p-4}x \otimes x,$$

gdzie $a \otimes b$ oznacza operator przyporządkowujący y element $a\langle b, y \rangle_H$. Ponadto zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned} \|D^2 f(x)\|_{L(H, H)} &\leq p|x|^{p-2} + p(p-2)|x|^{p-4}|x|^2 \\ &\leq (p + p(p-2))|x|^{p-2} \\ &\leq p(p-1)|x|^{p-2}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 9.3 (nierówność Burkholdera–Davisa–Gundy’ego) *Założmy, że W jest procesem Wienera w U z jądrem reprodukcyjnym $\mathcal{H}_W$. Niech $p \geq 1$, H przestrzeń Hilberta oraz niech*

$$\phi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)$$

będzie procesem mierzalnym i adaptowanym spełniającym warunek

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \|\phi(t)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 dt \right)^{p/2} < \infty, \quad \forall T \geq 0.$$

Wówczas dla dowolnego $T > 0$,

$$\mathbb{E} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \phi(s) dW(s) \right|_H^p \leq c_p \mathbb{E} \left(\int_0^T \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds \right)^{p/2}$$

z uniwersalną (niezależną od ϕ i W) stałą c_p .

Dowód. Rozpatrzmy jedynie przypadek $p \geq 2$. Proces

$$Z(t) = \int_0^t \phi(s) dW(s), \quad t \geq 0$$

jest ciągłym martyngałem całkowalnym z kwadratem. Stąd $|Z(t)|_H^p$, $t \geq 0$ jest ciągłym podmartyngałem. Z nierówności Dooba dla ciągłych podmartyngałów otrzymujemy

$$\mathbb{E} \sup_{t \leq T} |Z(t)|_H^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} |Z(T)|_H^p, \quad T > 0.$$

W szczególności gdy $p = 2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \phi(s) dW(s) \right|_H^2 &\leq 4 \mathbb{E} \left| \int_0^T \phi(s) dW(s) \right|_H^2 \\ &\leq 4 \mathbb{E} \int_0^T \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds. \end{aligned}$$

Gdy $p > 2$, to stosując wzór Itô do Z i $f(x) = |x|^p$ otrzymujemy

$$|Z(t)|_H^p = p |Z(t)|_H^{p-2} \langle Z(t), \phi(t) dW(t) \rangle_H + \frac{1}{2} \text{Tr} [\phi^*(t) D^2 f(Z(t)) \phi(t)] dt.$$

Nasze założenie całkowalności gwarantuje, że proces

$$p \int_0^t |Z(s)|_H^{p-2} \langle Z(s), \phi(s) dW(s) \rangle_H$$

jest martyngałem i dlatego jego wartość oczekiwana jest równa 0. Stąd

$$\mathbb{E} |Z(t)|_H^p = \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \text{Tr } \phi^*(s) D^2 f(Z(s)) \phi(s) ds.$$

Ale

$$\begin{aligned} & \left| \text{Tr } \phi^*(s) D^2 f(Z(s)) \phi(s) ds \right| \\ & \leq \|\phi^*(s)\|_{L_{(HS)}(H, \mathcal{H}_W)} \|D^2 f(Z(s))\|_{L(H, H)} \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)} \\ & \leq \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 p(p-1) |Z(s)|_H^{p-2}, \end{aligned}$$

Czyli

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |Z(t)|_H^p & \leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E} \int_0^t |Z(s)|_H^{p-2} \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds \\ & \leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{u \leq t} |Z(u)|_H^{p-2} \int_0^t \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds \right] \\ & \quad \text{(stosując nierówność Höldera)} \\ & \leq \frac{p(p-1)}{2} \left(\mathbb{E} \sup_{u \leq t} |Z(u)|^p \right)^{(p-2)/p} \\ & \quad \times \left(\mathbb{E} \left(\int_0^t \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds \right)^{p/2} \right)^{2/p} \\ & \quad \text{(z nierówności Dooba)} \\ & \leq \frac{p(p-1)}{2} \left(\left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} |Z(t)|_H^p \right)^{(p-2)/p} \\ & \quad \times \left(\mathbb{E} \left(\int_0^t \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds \right)^{p/2} \right)^{2/p}. \end{aligned}$$

Po uproszczeniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (\mathbb{E} |Z(t)|_H^p)^{1 - \frac{p-2}{p}} \\ & \leq \left(\frac{p(p-1)}{2} \right) \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p(p-1)}{2}} \left(\mathbb{E} \left(\int_0^t \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds \right)^{p/2} \right)^{2/p}. \end{aligned}$$

Stąd teza ze stałą

$$c_p = \left[\frac{p(p-1)}{2} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p(p-1)}{2}} \right]^{\frac{p}{2}}.$$

□

Uwaga. Dla $1 < p < 2$ z nierówności Dooba otrzymujemy następujący wariant nierówności Burkholdera–Davisa–Gundy’ego. Mianowicie stosując najpierw nierówność Dooba a potem Höldera otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \phi(s) dW(s) \right|_H^p &\leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} \left| \int_0^T \phi(s) dW(s) \right|_H^p \\
 &\leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \left(\mathbb{E} \left| \int_0^T \phi(s) dW(s) \right|_H^2 \right)^{p/2} \\
 &\leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \left(\mathbb{E} \int_0^T \|\phi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds \right)^{p/2}.
 \end{aligned}$$

Słabe i całkowite rozwiązania stochastycznych równań ewolucyjnych

Niech A będzie generatorem C_0 -półgrupy $S(t)$, $t \geq 0$ na przestrzeni Hilberta H . Niech W będzie proces Wienera na przestrzeni Hilberta U z operatorem kowariancji Q i jądrem reprodukcyjnym $\mathcal{H}_W = Q^{1/2}(U)$. W równaniu

$$dX = (AX + F(X)) dt + G(X)dW(t), \quad X(0) = x \in H, \quad (10.1)$$

F jest odwzorowaniem z H w H , a G odwzorowaniem z H w przestrzeń operatorów liniowych niekoniecznie ograniczonych z U w H . Operatory $F(x)$, $G(x)$ nie muszą być określone dla wszystkich $x \in H$.

Progresywnie mierzalny proces $X(t)$, $t \geq 0$ o wartościach w H nazywa się *słabym rozwiązaniem* równania (10.1), gdy dla dowolnego $a \in D(A^*)$ i dowolnego $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \langle a, X(t) \rangle_H &= \langle a, X(0) \rangle_H + \int_0^t \langle A^* a, X(s) \rangle ds + \int_0^t \langle a, F(X(s)) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \langle a, G(X(s)) dW(s) \rangle_H. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Wszystkie całki występujące w (10.2) powinny być dobrze określone.

Progresywnie mierzalny proces $X(t)$, $t \geq 0$ o wartościach w H nazywa się *rozwiązaniem całkowym* równania (10.1), gdy dla dowolnego $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} X(t) &= S(t)X(0) + \int_0^t S(t-s)F(X(s))ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)G(X(s))dW(s). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Oczywiście tak jak dla (10.2) wszystkie całki występujące w (10.3) powinny mieć dobry sens, a równość jest rozumiana jako równość $\mathbb{P}$ -prawie wszędzie.

Metatwierdzenie. *Klasa rozwiązań słabych jest identyczna z klasą rozwiązań całkowych.*

Jest to metatwierdzenie, bo założenia dotyczące współczynników nie są w nim precyzyjnie sformułowane. Dowód równoważności dla konkretnych klas równań przebiega zawsze w ten sam sposób, który można naszkicować następująco.

Dowód, że słabe jest całkowe. Pokażemy, że jeżeli X jest rozwiązaniem słabym, to X jest rozwiązaniem całkowym. Dowód przebiega w dwóch krokach.

Krok 1. Jeżeli progresywnie mierzalny proces $X(t)$, $t \geq 0$, spełnia dla dowolnego $a \in D(A^*)$ równanie

$$\begin{aligned} \langle a, X(t) \rangle_H &= \langle a, X(0) \rangle_H + \int_0^t \langle A^* a, X(s) \rangle_H ds \\ &\quad + \int_0^t \langle a, \psi(s) \rangle_H ds + \int_0^t \langle a, \phi(s) dW(s) \rangle_H, \end{aligned}$$

to dla dowolnego odwzorowania $\zeta(s)$, $s \geq 0$, należącego do $C^1([0, \infty); D(A^*))$ mamy

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t), X(t) \rangle_H &= \langle \zeta(0), X(0) \rangle_H + \int_0^t \langle A^* \zeta(s) + \zeta'(s), X(s) \rangle_H ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \zeta(s), \psi(s) \rangle_H ds + \int_0^t \langle \zeta(s), \phi(s) dW(s) \rangle_H. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Dowód równości (10.4) przeprowadzamy najpierw dla specjalnych odwzorowań $z(s) = g(s)a$, $s \geq 0$, gdzie $a \in D(A^*)$, a $g \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}^1)$. W tym celu stosujemy wzór Itô do iloczynu $g(s)$, $s \geq 0$ i procesu $\langle a, X(s) \rangle_H$, $s \geq 0$. Mianowicie

$$\begin{aligned} d\langle z(s), X(s) \rangle_H &= dg(s)\langle a, X(s) \rangle_H \\ &= g'(s)\langle a, X(s) \rangle_H ds + g(s)d\langle a, X(s) \rangle_H \\ &= g'(s)\langle a, X(s) \rangle_H ds + g(s)[\langle A^* a, X(s) \rangle_H ds \\ &\quad + \langle a, \psi(s) \rangle_H ds + \langle a, \phi(s) dW(s) \rangle_H] \\ &= \langle A^* z(s) + z'(s), X(s) \rangle_H ds + \langle z(s), \psi(s) \rangle_H ds \\ &\quad + \langle z(s), \phi(s) dW(s) \rangle_H. \end{aligned}$$

Następnie stosujemy lemat mówiący, że dla dowolnego $T > 0$ odwzorowania postaci $g(s)a$, $s \in [0, T]$, gdzie $a \in D(A^*)$, a $g \in C^1([0, T])$, są liniowo gęste w przestrzeni $C^1([0, T]; D(A^*))$. W końcu przechodząc do granicy pokazujemy (10.4) dla wszystkich odwzorowań $z \in C^1([0, T]; D(A^*))$.

Krok 2. Dla ustalonego $t > 0$ i $a \in D(A^*)$ definiujemy $z(s) = S^*(t-s)a$, $s \in [0, t]$. Wtedy $z'(s) = -A^*z(s)$, $s \in [0, t]$. Stąd

$$\begin{aligned}\langle a, X(t) \rangle_H &= \langle S^*(t)a, X(0) \rangle_H + \int_0^t \langle S^*(t-s)a, \psi(s) \rangle_H ds \\ &\quad + \int_0^t \langle S^*(t-s)a, \phi(s) dW(s) \rangle_H.\end{aligned}$$

Czyli

$$\begin{aligned}\langle a, X(t) \rangle &= \left\langle a, S(t)X(0) + \int_0^t S(t-s)\psi(s)ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t S(t-s)\phi(s)dW(s) \right\rangle.\end{aligned}\tag{10.5}$$

Ponieważ równość (10.5) zachodzi dla elementów $a \in D(A^*)$, a więc dla zbioru gęstego, to zachodzi dla wszystkich a , a stąd

$$X(t) = S(t)X(0) + \int_0^t S(t-s)\psi(s)ds + \int_0^t S(t-s)\phi(s)dW(s).$$

□

Dowód, że całkowe jest słabym. Pokazujemy, że jeżeli X jest rozwiązaniem całkowym, to X jest rozwiązaniem słabym.

Korzystamy ze stochastycznego twierdzenia Fubiniego. Niech $(E, \mathcal{E})$ będzie przestrzenią mierzalną i niech μ będzie skończoną miarą na E . Niech $\mathcal{H}_W$ będzie jądrem reprodukcijnym W , a H przestrzenią Hilberta.

Twierdzenie 10.1 (stochastyczne twierdzenie Fubiniego) *Załóżmy, że dla $t \geq 0$, $x \in E$, $\phi(t, x) \in L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)$ i*

$$\int_E \left(\mathbb{E} \int_0^T \|\phi(s, x)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds \right)^{1/2} \mu(dx) < \infty, \quad \forall T > 0$$

oraz, że ϕ jako odwzorowanie z $[0, \infty) \times E \times \Omega$ w $L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)$ jest progresywnie mierzalne. Wtedy dla $T \geq 0$,

$$\int_E \left(\underbrace{\int_0^T \phi(s, x) dW(s)}_{\text{całka Itô}} \right) \mu(dx) = \int_0^T \left(\underbrace{\int_E \phi(s, x) \mu(dx)}_{\text{całka Bochnera}} \right) dW(s).$$

Dowód stochastycznego twierdzenia Fubiniego można znaleźć w książce [9]. Stosujemy powyższe twierdzenie dla $E = [0, T]$, μ miary Lebesgue'a i

$$\phi(r, s) = \chi_{[0, s]}(r) S(s-r)\phi(r).$$

Założmy dla uproszczenia oznaczeń, że

$$X(t) = \int_0^t S(t-s)\phi(s)dW(s).$$

Niech $a \in D(A^*)$. Wtedy

$$\int_0^t \langle A^*a, X(s) \rangle_H ds = \int_0^t \left\langle A^*a, \int_0^s \chi_{[0,s]}(r)S(s-r)\phi(r)dW(r) \right\rangle_H ds$$

i ze stochastycznego twierdzenia Fubiniego mamy

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle A^*a, X(s) \rangle_H ds \\ &= \left\langle A^*a, \int_0^t \left(\int_0^s \chi_{[0,s]}(r)S(s-r)\phi(r)dW(r) \right) ds \right\rangle_H \\ &= \left\langle A^*a, \int_0^t \left(\int_0^s \chi_{[0,s]}(r)S(s-r)ds \right) \phi(r)dW(r) \right\rangle_H. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle A^*a, X(s) \rangle_H ds \\ &= \left\langle A^*a, \int_0^t \left(\int_0^s \chi_{[0,s]}(r)S(s-r)ds \right) \phi(r)dW(r) \right\rangle_H \\ &= \int_0^t \left\langle \int_0^s \chi_{[0,s]}(r)S^*(s-r)A^*ads, \phi(r)dW(r) \right\rangle_H \\ &= \int_0^t \left\langle \int_r^s S^*(s-r)A^*ads, \phi(r)dW(r) \right\rangle_H \\ &= \int_0^t \left\langle \int_r^s \left(\frac{d}{ds}S^*(s-r)a \right) ds, \phi(r)dW(r) \right\rangle_H \\ &= \int_0^t \langle S^*(t-r)a - a, \phi(r)dW(r) \rangle_H \\ &= \left\langle a, \int_0^t S(t-r)\phi(r)dW(r) \right\rangle_H - \left\langle a, \int_0^t \phi(r)dW(r) \right\rangle_H. \end{aligned}$$

Czyli

$$\int_0^t \langle A^*a, X(s) \rangle_H ds = \langle a, X(t) \rangle_H - \left\langle a, \int_0^t \phi(r)dW(r) \right\rangle_H$$

i dlatego

$$\langle a, X(t) \rangle_H = \int_0^t \langle A^*a, X(s) \rangle_H ds + \int_0^t \langle a, \phi(s)dW(s) \rangle_H.$$

□

Elementy faktoryzacji

Metoda faktoryzacji pozwala dowodzić istnienie ciągłych wersji procesów stochastycznych. Wykorzystuje on własności tak zwanych operatorów Liouville’a–Riemanna.

11.1 Wymiar skończony

Kluczowym faktem dla metody faktoryzacji jest własność półgrupowa operatorów Liouville’a–Riemanna I_α . Mianowicie, dla $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ i funkcji f położmy

$$I_\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{a(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Twierdzenie 11.1 *Dla dowolnych $\alpha, \beta > 0$ i $a \in \mathbb{R}$ mamy*

$$I_{\alpha+\beta} = I_\alpha I_\beta.$$

W szczególności dla $\alpha \in (0, 1)$,

$$I_1 = I_\alpha I_{1-\alpha}.$$

Twierdzenie wynika z następującego lematu.

Lemat 11.1 *Dla $\alpha > 0$, $\beta > 0$,*

$$\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (11.1)$$

gdzie

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0.$$

Dowód. Rozpatrzmy tak zwany rozkład gamma $f_{\alpha,\beta}$,

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0.$$

Zauważmy, że

$$f_{\alpha,\beta} * f_{\alpha,\gamma} = f_{\alpha,\beta+\gamma}, \quad (11.2)$$

gdzie $*$ oznacza operację splotu. Jeżeli f i g są gęstościami miar probabilistycznych na $(0, \infty)$, to $f * g$ jest również gęstością miary probabilistycznej. Ponadto

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy, \quad x > 0. \quad (11.3)$$

Dla dowodu (11.2) startujemy z (11.3),

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta} * f_{\alpha,\gamma}(x) &= \frac{\alpha^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} e^{-\alpha x} \int_0^x (x-y)^{\beta-1} y^{\gamma-1} dy \\ &= \frac{\alpha^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} e^{-\alpha x} x x^{\beta-1+\gamma-1} \int_0^x (1-v)^{\beta-1} v^{\gamma-1} dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma)} e^{-\alpha x} x^{\beta+\gamma-1} \alpha^{\beta+\gamma} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^1 (1-v)^{\beta-1} v^{\gamma-1} dv \\ &= f_{\alpha,\beta+\gamma}(x) \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^1 (1-v)^{\beta-1} v^{\gamma-1} dv. \end{aligned}$$

Prawa strona (11.4) jest gęstością miary probabilistycznej i $f_{\alpha,\beta+\gamma}$ jest gęstością miary probabilistycznej, dlatego zachodzą (11.1) i (11.2). $\square$

Lemat 11.2 Niech $\frac{1}{p} < \alpha < 1$. Istnieje stała $c = c_{\alpha,p}$ taka, że dla $f \in L^p(0,1)$,

$$|I_\alpha f(t) - I_\alpha f(s)| \leq c |t-s|^{\alpha-\frac{1}{p}} |f|_{L^p(0,1)}, \quad t, s \in (0,1).$$

Dowód. Niech $0 \leq s \leq t \leq 1$ i dla uproszczenia rachunków przyjmijmy, że $a = 0$ i, że w definicji I_α nie występuje stała $1/\Gamma(\alpha)$. Wtedy

$$\begin{aligned} I_\alpha f(t) - I_\alpha f(s) &= \int_s^t (t-v)^{\alpha-1} f(v) dv + \int_0^s ((t-v)^{\alpha-1} - (s-v)^{\alpha-1}) f(v) dv \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Niech q będzie takie, że $1/p + 1/q = 1$. Dla J_1 mamy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \int_s^t |t-v|^{\alpha-1} |f(v)| dv \leq \left(\int_s^t (t-v)^{(\alpha-1)q} dv \right)^{1/q} \left(\int_s^t |f(v)|^p dv \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_0^{t-s} u^{(\alpha-1)q} du \right)^{1/q} |f|_{L^p(0,1)} \\ &\leq (t-s)^{\alpha-\frac{1}{p}} |f|_{L^p(0,1)}. \end{aligned}$$

Aby oszacować J_2 , zauważmy, że

$$|J_2|^q \leq \left(\int_0^s ((s-v)^{\alpha-1} - (t-v)^{\alpha-1})^q dv \right) |f|_{L^p(0,1)}^q.$$

Dla $a > b$ i $q > 1$ mamy

$$(a-b)^q \leq a^q - b^q.$$

Dlatego

$$\begin{aligned} |J_2|^q &\leq \int_0^s \left((s-v)^{(\alpha-1)q} - (t-v)^{(\alpha-1)q} \right) dv |f|_{L^p(0,1)}^q \\ &\leq \left(\frac{(t-s)^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} + \frac{s^{(\alpha-1)q+1} - t^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right) |f|_{L^p(0,1)}^q \\ &\leq \frac{(t-s)^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} |f|_{L^p(0,1)}^q, \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

11.2 Wymiar nieskończony

Niech $S(t)$, $t \geq 0$, będzie C_0 -półgrupą na ośrodkowej przestrzeni Banacha E . Połóżmy

$$\begin{aligned} I_\alpha f(t) &= \int_0^t (t-v)^{\alpha-1} S(t-v) f(v) dv \\ &= \int_0^t v^{\alpha-1} S(v) f(t-v) dv, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Używając symbolicznego zapisu $e^{At} = S(t)$, definicja I_α pokrywa się z dokładnością do czynnika $1/\Gamma(\alpha)$ z definicją operatora Liouville'a-Riemanna wprowadzoną w poprzednim paragrafie.

Twierdzenie 11.2 *Jeżeli $\alpha > \frac{1}{p}$ i $f \in L^p(0, T; E)$, to $I_\alpha f \in C([0, T]; E)$.*

Dowód. Zauważmy, że dla $t \in (0, T]$,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t (t-v)^{\alpha-1} S(t-v) f(v) dv \right|_E \\ &\leq \left(\int_0^t (t-v)^{(\alpha-1)q} dv \right)^{1/q} \left(\int_0^t |S(t-v) f(v)|_E^p dv \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\frac{t^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right)^{1/q} M |f|_{L^p(0, T; E)} \\ &\leq C T^{\alpha-1} |f|_{L^p(0, T; E)}. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Niech $0 \leq s \leq t \leq T$. Wtedy

$$\begin{aligned} & I_\alpha f(t) - I_\alpha f(s) \\ &= \int_s^t v^{\alpha-1} S(v) f(t-v) dv + \int_0^s v^{\alpha-1} S(v) (f(t-v) - f(s-v)) dv. \end{aligned}$$

Dlatego, dla pewnej stałej $M_T > 0$,

$$\begin{aligned} |I_\alpha f(t) - I_\alpha f(s)|_E &\leq M_T \left(\int_s^t v^{(\alpha-1)q} dv \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(0,T;E)} \\ &+ M_T \left(\int_0^s v^{(\alpha-1)q} dv \right)^{1/q} \left(\int_0^s |f(t-v) - f(s-v)|_E^p dv \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Twierdzenie zachodzi więc, gdy $(\alpha-1)q > -1$ i f jest funkcją ciągłą. Jeżeli $f \in L^p(0, T; E)$, to istnieje ciąg $f_n \in C([0, T]; E)$ taki, że $f_n \rightarrow f$ w $L^p(0, T; E)$. Stąd na podstawie (11.4), dla pewnego $C > 0$,

$$|I_\alpha f_n(t) - I_\alpha f(t)|_E = |I_\alpha(f_n - f)(t)| \leq C \|f_n - f\|_{L^p(0,T;E)}, \quad t \in (0, T].$$

Tak więc funkcja $I_\alpha f$ jest ciągłą jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych. $\square$

Przechodzimy do dowodu ciągłości procesu

$$Y(t) = \int_0^t S(t-s) G(X(s)) dW(s), \quad t \geq 0,$$

gdzie X jest rozwiązaniem równania stochastycznego ewolucyjnego z dyfuzją G . Niech

$$Y_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} S(t-s) G(X(s)) dW(s), \quad t \geq 0.$$

Wtedy

$$Y(t) = I_\alpha Y_\alpha(t), \quad t \geq 0.$$

Jeżeli proces Y_α ma trajektorie należące do przestrzeni $L^p(0, T; H)$ z p takim, że $\frac{1}{p} < \alpha < 1$, to proces Y ma ciągłą modyfikację na podstawie powyższego twierdzenia. W szczególności, jeżeli

$$\mathbb{E} \int_0^T |Y_\alpha(t)|_H^p dt = \int_0^T (\mathbb{E} |Y_\alpha(t)|_H^p) dt < \infty.$$

Twierdzenie 11.3 *Jeżeli dla pewnego $p > 2$,*

$$\int_0^T \mathbb{E} |X(t)|^p dt < \infty \quad i \quad \|G(x)\|_{L(HS)(\mathcal{H}_W, H)} \leq c(1 + |x|), \quad x \in H,$$

to proces Y ma ciągłą wersję.

Dowód. Jeżeli $p > 2$, to na podstawie nierówności Burkholdera–Davisa–Gundy’ego, dla pewnych stałych c, c_1 ,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \mathbb{E} |Y_\alpha(t)|^p dt \\
& \leq c \int_0^T \mathbb{E} \left(\int_0^t |(t-s)^\alpha S(t-s)G(X(s))|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H)}^2 ds \right)^{p/2} dt \\
& \leq c_1 \mathbb{E} \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-2\alpha} (1 + |x(s)|^2) ds \right)^{p/2} dt \\
& \leq c_1 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(\int_0^t \sigma^{-2\alpha} d\sigma \right)^{p/2} (1 + |x(s)|^2)^{p/2} ds \right],
\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej nierówności wykorzystaliśmy nierówność Younga dla spłotów¹. Z założeń wynika, że

$$\mathbb{E} \int_0^T |Y_\alpha(t)|^p dt < +\infty$$

a stąd teza. $\square$

¹ Jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^p)$, $p > 1$, to $f * g \in L^p(\mathbb{R}^1)$ i $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Postać abstrakcyjna stochastycznego równania ewolucyjnego

Najbliższe kilka rozdziałów poświęcone będą:

- (i) istnieniu, jedyności rozwiązań stochastycznych równań ewolucyjnych z regularnymi współczynnikami,
- (ii) przykładom, to jest stochastycznemu równaniu ciepła, równaniom falowym, równaniom na całej przestrzeni, równaniom z opóźnieniem, równaniom z szumem na brzegu,
- (iii) regularności rozwiązań po czasie i zmiennej przestrzennej.

Będziemy badali równania, które można zapisać w poniższej postaci.

12.1 Równanie abstrakcyjne

$$dX = (AX + F(X))dt + G(X)dW, \quad X(0) = x_0. \quad (12.1)$$

W równaniu (12.1), A z dziedziną $D(A)$ jest generatorem C_0 -półgrupy S działającej na przestrzeni Hilberta $(H, |\cdot|_H)$, W jest cylindrycznym procesem Wienera na przestrzeni Hilberta U określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ z filtracją $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$. Będziemy zakładali, że warunek początkowy x_0 należy do H oraz, że odwzorowania $F : D(F) \rightarrow H$ i $G : D(G) \rightarrow L(U, H)$ spełniają warunki:

(F) $D(F)$ jest gęsty w H oraz istnieje funkcja $a : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ spełniająca $\int_0^T a(t)dt < \infty$ dla $\forall T < \infty$ taka, że dla $\forall t > 0$ i $\forall x, y \in D(F)$,

$$|S(t)F(x)|_H \leq a(t) (1 + |x|_H),$$

$$|S(t)(F(x) - F(y))|_H \leq a(t) |x - y|_H.$$

(G) $D(G)$ jest gęsty w H oraz istnieje funkcja $b : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ spełniająca $\int_0^T b^2(t)dt < \infty$ dla $\forall T < \infty$ taka, że dla $\forall t > 0$ i $\forall x, y \in D(G)$,

$$\|S(t)G(x)\|_{L_{(HS)}(U, H)} \leq b(t) (1 + |x|_H),$$

$$\|S(t)(G(x) - G(y))\|_{L_{(HS)}(U, H)} \leq b(t) |x - y|_H.$$

Uwaga. Ponieważ dziedziny $D(F)$ i $D(G)$ są gęste w H , warunki (F) i (G) implikują, że dla dowolnego $t > 0$ odwzorowania $S(t)F$ i $S(t)G$ rozszerzają się jednoznacznie do ciągłych odwzorowań H odpowiednio w H i $L(U, H)$. Rozszerzenia te oznaczать będziemy również przez $S(t)F$ i $S(t)G$. Oczywiście dla $\forall t > 0$ i $\forall x, y \in H$,

$$\begin{aligned} |S(t)F(x)|_H &\leq a(t) (1 + |x|_H), \\ |S(t)(F(x) - F(y))|_H &\leq a(t) |x - y|_H \end{aligned} \quad (12.2)$$

oraz

$$\begin{aligned} \|S(t)G(x)\|_{L(HS)(U, H)} &\leq b(t) (1 + |x|_H), \\ \|S(t)(G(x) - G(y))\|_{L(HS)(U, H)} &\leq b(t) |x - y|_H. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Uwaga. Oczywiście z ograniczoności $\|S(t)\|_{L(H, H)}$ dla $t \in [0, T]$, $T < \infty$ wynika, że jeżeli $F : H \rightarrow H$ i $G : H \rightarrow L(HS)(U, H)$ są lipschitzowskie to warunki (F) i (G) są spełnione.

Sformułujemy teraz precyzyjną definicję rozwiązania równania (12.1). Będzie to tak zwane *mild solution*, które zwykle jest również rozwiązaniem słabym w sensie równań cząstkowych.

Definicja 12.1 *Mierzalny, $(\mathfrak{F}_t)$ -adaptowany proces $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow H$ jest rozwiązaniem równania (12.1) gdy:*

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |X(t)|_H^2 < \infty, \quad \forall T < \infty, \quad (12.4)$$

$$\begin{aligned} X(t) &= S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)F(X(s))ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)G(X(s))dW(s), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Oczywiście równość (12.5) rozumiemy $\mathbb{P}$ -prawie wszędzie, to znaczy, że przy dowolnym ustalonym t istnieje zbiór $\Omega_t \in \mathfrak{F}_t$, pełnej miary, to jest $\mathbb{P}(\Omega_t) = 1$ taki, że równość (12.5) zachodzi dla wszystkich $\omega \in \Omega_t$.

Uwaga. Całki występujące w (12.5) są dobrze określone. Pierwszą rozumiemy jako całkę Bochnera. Przypomnijmy, że jest ona dobrze zdefiniowana gdy odwzorowanie podcałkowe jest mierzalne i

$$I_F(t) := \int_0^t |S(t-s)F(X(s))|_H ds < \infty, \quad \forall t < \infty. \quad (12.6)$$

Mierzalność wynika z ciągłości $S(t-s)F$. Oszacowanie (12.6) pokazuje się w następujący sposób

$$\begin{aligned} \mathbb{E} I_F(t) &\leq \mathbb{E} \int_0^t a(t-s) (1 + |X(s)|_H) ds \\ &\leq \left(1 + \sup_{s \in [0, t]} \mathbb{E} |X(s)|_H \right) \int_0^t a(t-s) ds < \infty. \end{aligned}$$

Aby całka stochastyczna w (12.5) była dobrze określona, potrzeba by przy ustalonym t proces $S(t-s)G(X(s))$, $s \in [0, t]$ był mierzalny, adoptowalny oraz by

$$I_G(t) := \mathbb{E} \int_0^t \|S(t-s)G(X(s))\|_{L_{(HS)}(U,H)}^2 ds < \infty. \quad (12.7)$$

Mierzalność i adoptowalność są oczywiste. Oszacowanie (12.7) wynika z (G) i (12.4) w następujący sposób

$$\begin{aligned} I_G(t) &\leq \mathbb{E} \int_0^t b^2(t-s) (1 + |X(s)|)^2 ds \\ &\leq 2 \left(1 + \sup_{s \in [0,t]} \mathbb{E} |X(s)|_H^2 \right) \int_0^t b^2(s) ds < \infty. \end{aligned}$$

Zanim sformułujemy główne twierdzenie o istnieniu rozwiązania dla (12.1) postaramy się zrozumieć postać warunków (F) i (G). W poniższym przykładzie pokażemy, że “zwykły” warunek Lipschitza na G może nie być spełniony nawet w typowych i naturalnych przypadkach.

12.2 Przykłady

Stochastyczne równanie ciepła na odcinku (0,1) z warunkiem brzegowym Dirichleta. Rozważmy następujący problem Cauchego

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, \xi) = \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}(t, \xi) + f(X(t, \xi)) + g(X(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \\ \quad \quad \quad t > 0, \xi \in (0, 1), \\ X(t, 0) = 0 = X(t, 1), \quad t > 0, \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \end{cases} \quad (12.8)$$

w którym $\partial W / \partial t$ jest tak zwanym *białym szumem* na $[0, \infty) \times (0, 1)$ oraz f i g są lipschitzowskimi funkcjami na $\mathbb{R}$.

Przyjmijmy następujące oznaczenia: dla $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\psi : D(\psi) \rightarrow \mathbb{R}$ niech N_h będzie operatorem Nemytskiego odpowiadającym h oraz niech M_ψ będzie operatorem mnożenia przez ψ , to znaczy

$$N_h(\psi)(\xi) := h(\psi(\xi)), \quad \xi \in D(\psi)$$

oraz

$$M_\psi \varphi = \psi \varphi,$$

dla dowolnej funkcji φ określonej na $D(\psi)$. W końcu niech $\mathbb{M}$ będzie odwzorowaniem przyporządkującym funkcji ψ operator mnożenia, to jest

$$\mathbb{M}\psi = M_\psi.$$

Równanie (12.8) rozumiemy jako równanie (12.1) z $H = U = L^2(0, 1)$ oraz $F = N_f$ i $G = \mathbb{M} N_g$, to znaczy

$$F(\psi)(\xi) = f(\psi(\xi)),$$

$$G(\psi)[\varphi](\xi) := (G(\psi)\varphi)(\xi) = g(\psi(\xi))\varphi(\xi), \quad \psi, \varphi \in L^2(0, 1), \xi \in (0, 1).$$

Operator A definiujemy jako *operator Laplace'a z warunkiem brzegowym Dirichleta*, to jest

$$A\psi(\xi) = \frac{d^2\psi}{d\xi^2}(\xi), \quad \psi \in D(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1).$$

Przypomnijmy, że dla danego obszaru $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ oraz $m \in \mathbb{N}$ i $p \in [1, \infty)$ definiujemy *przestrzeń Sobolewa* $W^{m,p}(\mathcal{O})$ jako przestrzeń wszystkich dystrybucji $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, których pochodne dystrybucyjne $D^\alpha \psi$ rzędu $|\alpha| \leq m$ są funkcjami sumowalnymi z p -tą potęgą. Na $W^{m,p}(\mathcal{O})$ definiujemy normę

$$|\psi|_{W^{m,p}(\mathcal{O})} := \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{\mathcal{O}} |D^\alpha \psi(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p}.$$

Przestrzeń $W_0^{m,p}(\mathcal{O})$ definiuje się jako domknięcie $C_0^\infty(\mathcal{O})$ w $W^{m,p}(\mathcal{O})$. Zwykle będziemy używać oznaczeń $H^m(\mathcal{O}) = W^{m,2}(\mathcal{O})$ oraz $H_0^m(\mathcal{O}) = W_0^{m,2}(\mathcal{O})$.

Wiemy więc jak (12.8) interpretuje się przez (12.1). Sprawdźmy czy $F = N_f : H \rightarrow H$ i $G = \mathbb{M} N_g : H \rightarrow L(H, H)$ są lipschitowskie.

Lipschitzowskość F jako odwzorowanie z $L^2(0, 1)$ w $L^2(0, 1)$ jest oczywista. Istotnie F przeprowadza całą przestrzeń $L^2(0, 1)$ w siebie bo dla $\psi \in L^2(0, 1)$ i $\xi \in (0, 1)$, $|F(\psi)(\xi)| \leq L(1 + |\psi(\xi)|)$. Odwzorowanie F jest lipschitzowskie bo dla dowolnych $\psi, \varphi \in L^2(0, 1)$ mamy

$$|F(\psi) - F(\varphi)|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 |f(\psi(\xi)) - f(\varphi(\xi))|^2 d\xi \leq L \int_0^1 |\psi(\xi) - \varphi(\xi)|^2 d\xi.$$

Sprawdzamy teraz czy $G(\psi) \in L(L^2(0, 1), L^2(0, 1))$ dla $\psi \in L^2(0, 1)$. Ponieważ

$$\sup_{|\psi|_{L^2(0,1)} \leq 1} |G(\psi)\varphi|_{L^2(0,1)}^2 = \sup_{|\varphi|_{L^2(0,1)}} \int_0^1 |g(\psi(\xi))\varphi(\xi)|^2 d\xi,$$

mamy $G(\psi) \in L(L^2(0, 1), L^2(0, 1))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N_g(\psi) \in L^\infty(0, 1)$. Tak więc $G : L^2(0, 1) \rightarrow L(L^2(0, 1), L^2(0, 1))$ wtedy i tylko wtedy, gdy g jest ograniczone.

Zadanie. Pokazać, że nawet ograniczoność g nie daje

$$G : L^2(0, 1) \rightarrow L_{(HS)}(L^2(0, 1), L^2(0, 1)). \quad (12.9)$$

Co więcej zachodzi (12.9) wtedy i tylko wtedy, gdy $g = 0$.

Pokażemy teraz, że lipschitzowskość g pociąga za sobą (G) . Zauważmy, że

$$G : L^\infty(0, 1) \rightarrow L(L^2(0, 1), L^2(0, 1)).$$

Tak więc G jest gęsto określone. Ustalmy teraz $t > 0$. Sprawdźmy, że

$$S(t)G(u) \in L_{(HS)}(L^2(0, 1), L^2(0, 1)) \quad \forall u \in L^2(0, 1).$$

Skorzystamy z następującej reprezentacji S ,

$$S(t)\psi = \sum_n e^{-\pi^2 n^2 t} \langle \psi, e_n \rangle_{L^2(0,1)} e_n, \quad (12.10)$$

gdzie

$$e_n(\xi) = \sqrt{2} \sin(\pi n \xi), \quad \xi \in (0, 1), \quad n \in \mathbb{N}$$

jest ortonormalną bazą $L^2(0, 1)$ złożoną z wektorów własnych A . Teraz niech $\{f_j\}$ będzie dowolną ortonormalną bazą $L^2(0, 1)$. Wówczas, stosując (12.10), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_j |S(t)G(\psi)f_j|_{L^2(0,1)}^2 &= \sum_j \left| \sum_n e^{-\pi^2 n^2 t} \langle G(\psi)f_j, e_n \rangle_{L^2(0,1)} e_n \right|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \sum_j \sum_n e^{-2\pi^2 n^2 t} \langle G(\psi)f_j, e_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \sum_n \sum_j e^{-2\pi^2 n^2 t} \langle f_j, G(\psi)e_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \sum_n e^{-2\pi^2 n^2 t} |G(\psi)e_n|_{L^2(0,1)}^2 = I(t, \psi). \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z tożsamości Plancherela. Teraz, ponieważ funkcja $\xi \mapsto \sin \xi$ jest ograniczona, mamy

$$I(t, \psi) = \sum_n e^{-2\pi^2 n^2 t} \int_0^1 |g(\psi(\xi))e_n(\xi)|^2 d\xi \leq 2 \sum_n e^{-2\pi^2 n^2 t} \int_0^1 |g(\psi(\xi))|^2 d\xi.$$

Ponieważ g jest lipschitzowska istnieje stała L taka, że

$$|g(x)| \leq L(1 + |x|) \quad \text{i} \quad |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Tak więc, ponieważ $\psi \in L^2(0, 1)$,

$$\int_0^1 |g(\psi(\xi))|^2 d\xi \leq L^2 \int_0^1 (1 + |\psi(\xi)|)^2 d\xi \leq 2L^2 (1 + |\psi|_{L^2(0,1)}^2) < \infty.$$

W konsekwencji, mamy

$$\sum_j |S(t)G(\psi)f_j|_{L^2(0,1)}^2 \leq 4L^2 \sum_n e^{-2\pi^2 n^2 t} (1 + |\psi|_{L^2(0,1)}^2).$$

To samo rozumowanie prowadzi do następującego oszacowania zachodzącego dla dowolnych $\psi, \varphi \in L^2(0, 1)$ i $t > 0$,

$$\sum_j |S(t)(G(\psi) - G(\varphi))f_j|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2L^2 \sum_n e^{-2\pi^2 n^2 t} |\psi - \varphi|_{L^2(0,1)}^2.$$

Tak więc zachodzą oszacowania występujące w warunku (G) z funkcją

$$b(t) = 2L \left(\sum_n e^{-2\pi^2 n^2 t} \right)^{1/2}, \quad t > 0.$$

Oczywiście $\int_0^\infty b^2(t)dt < \infty$ ponieważ $\sum n^{-2} < \infty$.

Stochastyczne równanie ciepła na odcinku (0,1) z warunkiem brzegowym Neumanna. Rozważmy następujący problem Cauchego z *jednorodnym warunkiem brzegowym Neumanna*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, \xi) = \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}(t, \xi) + f(X(t, \xi)) + g(X(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \\ \quad t > 0, \xi \in (0, 1), \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \\ \frac{\partial X}{\partial \xi}(t, 0) = 0 = \frac{\partial X}{\partial \xi}(t, 1), \quad t > 0 \end{cases}$$

z białym szumem $\partial W/\partial t$ na $[0, \infty) \times (0, 1)$. Jak w przypadku równania z warunkiem brzegowym Dirichleta, równanie z warunkiem brzegowym Neumanna interpretujemy jako (12.1) z $H = U = L^2(0, 1)$ oraz z operatorami $F = N_f$ i $G = \mathbb{M}N_g$. Operator A definiujemy jako operator Laplace'a z warunkiem brzegowym Neumanna, to znaczy

$$A\psi(\xi) = \frac{d^2\psi}{d\xi^2}(\xi), \quad D(A) = \left\{ \psi \in H^2(0, 1) : \frac{d\psi}{d\xi}(0) = 0 = \frac{d\psi}{d\xi}(1) \right\}.$$

Operator A jest samosprężony na $L^2(0, 1)$, z ortonormalną bazą wektorów własnych

$$e_n(\xi) = \sqrt{2} \cos(\pi n \xi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wiedząc to można pokazać w sposób analogiczny jak dla równania z warunkiem brzegowym Dirichleta, że lipschitzowskość f i g implikuje warunki (F) i (G).

Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności

Podamy teraz podstawowe twierdzenie o istnieniu, jedyności i ciągłej zależności od warunku początkowego rozwiązań równania

$$dX = (AX + F(X))dt + G(X)dW, \quad X(0) = x_0. \quad (13.1)$$

Przypomnijmy, że warunki (F) i (G) zostały wprowadzone w poprzednim rozdziale.

Twierdzenie 13.1 *Założmy, że spełnione są założenia (F) i (G) . Wówczas:*

- (i) *dla dowolnego warunku początkowego $x_0 \in H$ istnieje z dokładnością do modyfikacji dokładnie jedno rozwiązanie równania (13.1),*
- (ii) *dla dowolnego $T < \infty$ istnieje stała L , taka że dla dowolnych $x_0, x_1 \in H$ i rozwiązań $X(\cdot, x_0)$ i $X(\cdot, x_1)$ startujących odpowiednio z x_0 i x_1 zachodzi*

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |X(t, x_0) - X(t, x_1)|_H^2 \leq L |x_0 - x_1|_H^2.$$

Dowód (i). Dla $T < \infty$ oznaczmy przez $\mathcal{X}_T$ przestrzeń wszystkich mierzalnych i adoptowalnych procesów $Y : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow H$, takich że

$$\|Y\|_T := \left(\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |Y(t)|_H^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Dla $\beta \in \mathbb{R}$ i $Y \in \mathcal{X}_T$ niech

$$\|Y\|_{T, \beta} := \left(\sup_{t \in [0, T]} e^{-\beta t} \mathbb{E} |Y(t)|_H^2 \right)^{1/2}.$$

Oczywiście $(\mathcal{X}_T, \|\cdot\|_T)$ jest przestrzenią Banacha, $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{T, 0}$ oraz normy $\|\cdot\|_{T, \beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$ są równoważne.

Zauważmy, że na mocy (F) i (G) , dla $Y \in \mathcal{X}_T$ i $t \in [0, T]$ całki

$$\begin{aligned} I_F(t)(t) &:= \int_0^t S(t-s)F(Y(s))ds, \\ J_G(t) &:= \int_0^t S(t-s)G(Y(s))dW(s) \end{aligned} \quad (13.2)$$

są dobrze określone.

Zadanie. Pokazać, że dla dowolnego $Y \in \mathcal{X}_T$, procesy $I_F(Y)$ i $J_G(Y)$ dane przez (13.2) są mieralne i adoptowalne. W tym celu można aproksymować $I_F(Y)$ i $J_G(Y)$ przez $S(1/n)I_F(Y)$ i $S(1/n)J_G(Y)$.

Dzięki zasadzie kontrakcji Banacha wystarczy pokazać, że dla dowolnego $T < \infty$ istnieje $\beta \in \mathbb{R}$ oraz stała $K_{\beta,T} < 1$ takie, że

$$\begin{aligned} &\|I_F(Y) + J_G(Y) - I_F(Z) - J_G(Z)\|_{T,\beta} \\ &\leq K_{\beta,T}\|Y - Z\|_{T,\beta}, \quad Y, Z \in \mathcal{X}_T. \end{aligned} \quad (13.3)$$

W tym celu ustalmy $Y, Z \in \mathcal{X}_T$. Wówczas

$$\begin{aligned} &\|I_F(Y) + J_G(Y) - I_F(Z) - J_G(Z)\|_{T,\beta}^2 \\ &\leq 2\|I_F(Y) - I_F(Z)\|_{T,\beta}^2 + 2\|J_G(Y) - J_G(Z)\|_{T,\beta}^2. \end{aligned}$$

Następnie, dzięki (F),

$$\begin{aligned} \|I_F(Y) - I_F(Z)\|_{T,\beta}^2 &= \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} \mathbb{E} \left| \int_0^t S(t-s) [F(Y(s)) - F(Z(s))] ds \right|_H^2 \\ &\leq \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} \mathbb{E} \left(\int_0^t a(t-s) |Y(s) - Z(s)|_H ds \right)^2. \end{aligned}$$

Stosując nierówność Schwarz'a otrzymamy

$$\begin{aligned} &\int_0^t a(t-s) |Y(s) - Z(s)|_H ds \\ &\leq \left(\int_0^T a(s) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^T |Y(s) - Z(s)|_H^2 a(t-s) ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Tak więc, ze stałą $c_1 = \left(\int_0^T a(s) ds \right)^{1/2}$, mamy

$$\begin{aligned} \|I_F(Y) - I_F(Z)\|_{T,\beta}^2 &\leq c_1 \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} \int_0^t a(t-s) \mathbb{E} |Y(s) - Z(s)|_H^2 ds \\ &\leq c_1 \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} \int_0^t a(t-s) e^{\beta s} e^{-\beta s} \mathbb{E} |Y(s) - Z(s)|_H^2 ds \\ &\leq c_1 \|Y - Z\|_{T,\beta}^2 \sup_{t \in [0,T]} \int_0^t a(t-s) e^{-\beta(t-s)} ds. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\|I_F(Y) - I_F(Z)\|_{T,\beta}^2 \leq C_{1,\beta,T} \|Y - Z\|_{T,\beta}^2$$

ze stałą

$$C_{1,\beta,T} = \left(\int_0^T a(s) ds \right)^{1/2} \int_0^T a(s) e^{-\beta s} ds.$$

Podobnie, stosując najpierw tożsamość izometryczną dla całki stochastycznej, a następnie warunek (G) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \|J_G(Y) - J_G(Z)\|_{T,\beta}^2 \\ &= \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} \mathbb{E} \left| \int_0^t S(t-s) (G(Y(s)) - G(Z(s))) dW(s) \right|_H^2 \\ &\leq \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} \mathbb{E} \int_0^t \|S(t-s) (G(Y(s)) - G(Z(s)))\|_{L_{(HS)}(U,H)}^2 ds \\ &\leq \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} \int_0^t b^2(t-s) \mathbb{E} |Y(s) - Z(s)|_H^2 ds \\ &\leq \|Y - Z\|_{T,\beta}^2 \int_0^T e^{-\beta s} b^2(s) ds. \end{aligned}$$

Tak więc mamy (13.3) ze stałą

$$K_{\beta,T} = \left(2 C_{1,\beta,T} + 2 \int_0^T e^{-\beta s} b^2(s) ds \right)^{1/2}.$$

Wystarczy więc zauważyć, że dla β dostatecznie dużego $K_{\beta,T} < 1$. $\square$

Dowód (ii). Używając oznaczeń z dowodu pierwszej części twierdzenia oraz (13.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \|X(\cdot, x_0) - X(\cdot, x_1)\|_{\beta,T}^2 \\ &\leq 2 \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} |S(t)(x_0 - x_1)|_H^2 \\ &\quad + 2 \|I_F(X(\cdot, x_0)) + J_G(X(\cdot, x_0)) - I_F(X(\cdot, x_1)) - J_G(\cdot, x_1)\|_{T,\beta}^2 \\ &\leq 2 \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} \|S(t)\|_{L(H,H)}^2 |x_0 - x_1|_H^2 + 2 K_{\beta,T}^2 \|X(\cdot, x_0) - X(\cdot, x_1)\|_{T,\beta}^2. \end{aligned}$$

Dobierając β dostatecznie duże otrzymamy $2 K_{\beta,T}^2 < 1/2$. Wtedy

$$\|X(\cdot, x_0) - X(\cdot, x_1)\|_{\beta,T}^2 \leq 4 \sup_{t \in [0,T]} e^{-\beta t} \|S(t)\|_{L(H,H)}^2 |x_0 - x_1|_H^2,$$

co kończy dowód części (ii) twierdzenia. $\square$

Stochastyczne równanie ciepła na odcinku (0,1) z warunkiem brzegowym Dirichleta. Powróćmy do przykładu omawianego na poprzednim wykładzie. Tak więc dla zadanych $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz cylindrycznego procesu Wienera na $L^2(0, 1)$ rozważmy następujący problem Cauchygo:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, \xi) = \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}(t, \xi) + f(X(t, \xi)) + g(X(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \\ \quad t > 0, \xi \in (0, 1), \\ X(t, 0) = X(t, 1) = 0, \quad t > 0, \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \end{cases} \quad (13.4)$$

Przypomnijmy, że równanie to interpretujemy jako równanie (13.1) na przestrzeni Hilberta $L^2(0, 1)$ z

$$A\psi(\xi) = \frac{d^2\psi}{d\xi^2}(\xi), \quad \psi \in D(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$$

oraz

$$F(\psi)(\xi) = f(\psi(\xi)), \quad G(\psi)[\varphi](\xi) = g(\psi(\xi))\varphi(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \psi, \varphi \in L^2(0, 1).$$

Na poprzednim wykładzie pokazaliśmy, że jeżeli f i g są lipschitzowskie, to odpowiadające im współczynniki F i G równania (13.1) spełniają założenia (F) i (G). Tak więc z Twierdzenia 13.1 wynika następujący rezultat o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań stochastycznego równania ciepła (13.4).

Twierdzenie 13.2 *Załóżmy, że f i g są lipschitzowskimi odwzorowaniami $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ oraz, że W jest cylindrycznym procesem Wienera na $L^2(0, 1)$. Wówczas:*

- (i) *dla dowolnego warunku początkowego $x_0 \in L^2(0, 1)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $X(t, \xi, x_0)$, $t \geq 0$, $\xi \in (0, 1)$ równania (13.4),*
- (ii) *dla dowolnego $T < \infty$ istnieje stała L taka, że dla dowolnych $x_0, x_1 \in L^2(0, 1)$ oraz rozwiązań $X(\cdot, \cdot, x_0)$ i $X(\cdot, \cdot, x_1)$ startujących z x_0 i x_1 mamy*

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \int_0^1 |X(t, \xi, x_0) - X(t, \xi, x_1)|^2 d\xi \leq L |x_0 - x_1|_{L^2(0, 1)}^2.$$

Stochastyczne równanie ciepła na odcinku (0,1) z warunkiem brzegowym Neumanna. Twierdzenie 13.1 o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań stochastycznego równania ewolucyjnego stosuje się również do przypadku równania ciepła z warunkami brzegowymi Neumanna

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, \xi) = \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}(t, \xi) + f(X(t, \xi)) + g(X(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \\ \quad t > 0, \xi \in (0, 1), \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \\ \frac{\partial X}{\partial \xi}(t, 0) = 0 = \frac{\partial X}{\partial \xi}(t, 1), \quad t > 0 \end{cases} \quad (13.5)$$

z białym szumem $\partial W / \partial t$ na $[0, \infty) \times (0, 1)$ i lipschitzowskimi f i g , patrz poprzedni wykład. Mamy więc następujący rezultat.

Twierdzenie 13.3 Załóżmy, że f i g są lipschitzowskimi odwzorowaniami $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ oraz, że W jest cylindrycznym procesem Wienera na $L^2(0, 1)$. Wówczas:

- (i) dla dowolnego warunku początkowego $x_0 \in L^2(0, 1)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $X(t, \xi, x_0)$, $t \geq 0$, $\xi \in (0, 1)$ równania (13.5),
(ii) dla dowolnego $T < \infty$ istnieje stała L taka, że dla dowolnych $x_0, x_1 \in L^2(0, 1)$ oraz rozwiązań $X(\cdot, \cdot, x_0)$ i $X(\cdot, \cdot, x_1)$ startujących z x_0 i x_1 mamy

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \int_0^1 |X(t, \xi, x_0) - X(t, \xi, x_1)|^2 d\xi \leq L \|x_0 - x_1\|_{L^2(0, 1)}^2.$$

Stochastyczne równanie z opóźnieniem. Rozważmy równanie z opóźnieniem

$$\begin{cases} dx(t) = \left(\int_{-h}^0 \mu(d\sigma) x(t + \sigma) + f(x(t)) \right) dt + g(x(t)) dW(t), \\ t \geq 0 \\ x(\sigma) = \psi(\sigma), \sigma \in (-h, 0], \end{cases} \quad (13.6)$$

w którym $h > 0$, μ jest miarą na $(-h, 0]$ o wartościach macierzowych $M(n \times n)$, W jest d -wymiarowym procesem Wienera, a f i g są lipschitzowskimi odwzorowaniami $\mathbb{R}^d$ w odpowiednio $\mathbb{R}^d$ i $M(n \times d)$.

Równanie to interpretujemy jako (13.1) na przestrzeni stanów

$$H =: \begin{pmatrix} L^2(-h, 0; \mathbb{R}^n) \\ \mathbb{R}^d \end{pmatrix}$$

z operatorem

$$A \begin{pmatrix} \psi \\ v \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \int_{-h}^0 \mu(d\sigma) \psi(\sigma) \\ \psi(0) \end{pmatrix},$$

gdzie dziedzina A równa jest

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi \\ v \end{pmatrix} : \psi \in H^2(-h, 0; \mathbb{R}^d) \text{ i } v = \psi(0) \right\},$$

z $U = \mathbb{R}^d$ oraz odwzorowaniami nieliniowymi

$$F \begin{pmatrix} \psi \\ v \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{F}(\psi) \\ v \end{pmatrix} \quad \text{ i } \quad G \begin{pmatrix} \psi \\ v \end{pmatrix} u =: \begin{pmatrix} \tilde{G}(\psi)u \\ v \end{pmatrix},$$

gdzie $\tilde{F}(\psi)(\sigma) = f(\psi(\sigma))$ i $\tilde{G}(\psi)(\sigma) = g(\psi(\sigma))$. Wówczas $(A, D(A))$ generuje C_0 -półgrupę na H . Łatwo sprawdzić, że lipschitzowskość f i g gwarantuje lipschitzowskość F i G , a w konsekwencji warunki (F) i (G) . Tak więc mamy następujący wniosek z Twierdzenia 13.1.

Twierdzenie 13.4 Załóżmy, że f i g są lipschitzowskimi odwzorowaniami $\mathbb{R}^d$ odpowiednio w $\mathbb{R}^d$ i $M(n \times d)$ oraz, że W jest d -wymiarowym procesem Wienera. Wówczas:

- (i) dla dowolnego warunku początkowego $x_0 \in H$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $X(\cdot, x_0)$, $t \geq 0$, równania (13.6),
(ii) dla dowolnego $T < \infty$ istnieje stała L taka, że dla dowolnych $x_0, x_1 \in H$ oraz rozwiązań $X(\cdot, x_0)$ i $X(\cdot, x_1)$ startujących z x_0 i x_1 mamy

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |X(t, x_0) - X(t, x_1)|_H^2 \leq L |x_0 - x_1|_H^2.$$

13.1 Uwagi bibliograficzne

Abstrakcyjne twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań ewolucyjnych można znaleźć między innymi w [9, 10, 26]. Stochastyczne równania paraboliczne są badane w [5, 3, 20, 26, 33].

Stochastyczne równanie falowe

14.1 Twierdzenie Lumera–Phillipsa

Rozdział ten poświęcony jest stochastycznemu równaniu falowemu. Zaczniemy od podania pewnego ogólnego faktu dotyczącego generatora półgrupy kontrakcji na przestrzeni Hilberta.

Niech $(H, |\cdot|_H)$ będzie ośrodkową rzeczywistą przestrzenią Hilberta oraz niech $(A, D(A))$ będzie ujemnie określonym operatorem samosprężonym na H . Przypomnijmy, że ujemność A oznacza, że $\langle Ax, x \rangle_H \leq 0$ dla każdego $x \in D(A)$. Niech

$$\mathcal{H} := \begin{pmatrix} D((-A)^{1/2}) \\ H \end{pmatrix}.$$

Wówczas $\mathcal{H}$ z iloczynem skalarnym

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} := \langle (-A)^{1/2}x, (-A)^{1/2}u \rangle_H + \langle y, v \rangle_H$$

jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Niech

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad D(\mathcal{A}) := \begin{pmatrix} D(A) \\ D((-A)^{1/2}) \end{pmatrix}.$$

Lemat 14.1 $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ generuje C_0 -półgrupę kontrakcji na $\mathcal{H}$.

Lemat jest wnioskiem z następującego twierdzenia. Jego sformułowanie w postaci ogólniejszej bo obejmującej przypadek generatora na przestrzeni Banacha można znaleźć w książce Pazy'ego ([25], str. 13).

Twierdzenie 14.1 (Lumera–Phillipsa) Niech $(T, D(T))$ będzie operatorem na przestrzeni Hilberta $(U, |\cdot|_U)$. Załóżmy, że T jest gęsto określony, to jest $\overline{D(T)} = U$ oraz dysypatywny, to jest $\langle Tx, x \rangle_U \leq 0$ dla $x \in D(T)$. Wówczas, jeżeli dla pewnego $\lambda > 0$ obraz $\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ jest równy całej przestrzeni U to $(T, D(T))$ generuje C_0 -półgrupę kontrakcji na U .

Dowód Lematu 14.1. Pokażemy, że spełnione są założenia twierdzenia Lumera-Phillipsa. Dziedzina $D(\mathcal{A})$ jest gęsta w $\mathcal{H}$ bo $D((-A)^{1/2})$ jest gęsty w H . W celu wykazania, że $\mathcal{A}$ jest dysypatywny ustalmy

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} D(A) \\ D((-A)^{1/2}) \end{pmatrix} = D(\mathcal{A}).$$

Wówczas,

$$\langle \mathcal{A}z, z \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ Ax \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle (-A)^{1/2} x, (-A)^{1/2} x \right\rangle_H + \langle Ax, y \rangle_H = 0.$$

Pokażemy teraz, że $\text{Im}(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. W tym celu należy pokazać, że dla dowolnych $x \in D((-A)^{1/2})$ oraz $y \in H$ istnieją $u \in D((-A)^{1/2})$ oraz $v \in H$, takie że

$$(I - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

to jest

$$u - v = x \quad \text{oraz} \quad v - Av = y.$$

Ponieważ A jest ujemnie określony $(I - A)$ jest odwracalny. Tak więc równość zachodzi dla

$$v = (I - A)^{-1} y \quad \text{oraz} \quad u = x + A(I - A)^{-1} y.$$

□

14.2 Przykłady

Stochastyczne równanie falowe z procesem Wienera o nuklearnej kowariancji. Rozważmy problem Cauchego dla równania falowego na odcinku $(0, 1)$ z zerowymi warunkami brzegowymi.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(t, \xi) = \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}(t, \xi) + f(X(t, \xi)) + g(X(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \\ \quad \quad \quad t > 0, \xi \in (0, 1), \\ X(t, 0) = X(t, 1) = 0, \quad t > 0, \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \\ \frac{\partial X}{\partial t}(0, \xi) = y_0(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \end{cases} \quad (14.1)$$

W równaniu (14.1) zakładamy, że W jest procesem Wienera na $L^2(0, 1)$ z nuklearnym operatorem kowariancji, a f i g są lipschitzowskimi funkcjami z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.

Naszym pierwszym celem jest zapisanie (14.1) w postaci abstrakcyjnej z odpowiednio dobranymi współczynnikami. W tym celu oznaczmy przez A operator Laplace'a z warunkiem brzegowym Dirichleta, to jest

$$A\psi(\xi) = \frac{d^2\psi}{d\xi^2}(\xi), \quad D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

oraz połóżmy

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ \frac{\partial X}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Wówczas

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(t, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial t} \\ \frac{\partial Y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \end{pmatrix}.$$

Tak więc będziemy traktować równanie (14.1) jako równanie

$$dZ = (\mathcal{A}Z + \mathcal{F}(Z))dt + \mathcal{G}(Z)dW, \quad Z(0) = z_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (14.2)$$

na przestrzeni Hilberta

$$\mathcal{H} := \begin{pmatrix} D((-A)^{1/2}) \\ L^2(0,1) \end{pmatrix}$$

z operatorem

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad D(\mathcal{A}) := \begin{pmatrix} D(A) \\ D((-A)^{1/2}) \end{pmatrix}$$

oraz z $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ zdefiniowanymi w następujący sposób

$$\mathcal{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(x) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ G(x)\psi \end{pmatrix},$$

$$F(x)(\xi) = f(x(\xi)), \quad G(x)[\psi](\xi) = g(x(\xi))\psi(\xi).$$

Tutaj ψ należy do jądra reprodukcyjnego U procesu Wienera, to jest do tej podprzestrzeni $L^2(0,1)$, na której W jest cylindryczny. Przypomnijmy, że

$$U = Q^{1/2} (L^2(0,1)),$$

gdzie Q jest operatorem kowariancji W .

Na mocy Lematu 14.1, $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ generuje C_0 -półgrupę na $\mathcal{H}$. Pokażemy, że $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ i $\mathcal{G} : \mathcal{H} \rightarrow L_{(HS)}(U, \mathcal{H})$ są lipschitzowskie. Biorąc pod uwagę fakt, że $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ nie zależą od drugiej współrzędnej y , wystarczy pokazać, że odwzorowania

$$F : D((-A)^{1/2}) \rightarrow L^2(0,1)$$

oraz

$$G(\cdot)Q^{1/2} : D((-A)^{1/2}) \rightarrow L_{(HS)}(L^2(0,1), L^2(0,1))$$

są lipschitzowskie. Ponieważ F jako odwzorowanie z $L^2(0,1)$ w $L^2(0,1)$ jest lipschitzowskie, jest ono lipschitzowskie z $D((-A)^{1/2})$ w $L^2(0,1)$ jako, że $D((-A)^{1/2})$ wkłada się w sposób ciągły w $L^2(0,1)$. Aby pokazać lipschitzowskość współczynnika dyfuzji ustalmy ortonormalną bazę $\{e_n\}$ przestrzeni $L^2(0,1)$. Wówczas dla dowolnego $x \in L^2(0,1)$,

$$\begin{aligned} \sum_n |G(x)Q^{1/2}e_n|_{L^2(0,1)}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^1 |g(x(\xi)) (Q^{1/2}e_n)(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq |g(x)|_{L^\infty(0,1)}^2 \|Q^{1/2}\|_{L_{(HS)}(L^2(0,1), L^2(0,1))}^2. \end{aligned}$$

Podobnie dla $x, y \in L^2(0,1)$,

$$\begin{aligned} \sum_n |(G(x) - G(y))Q^{1/2}e_n|_{L^2(0,1)}^2 \\ \leq |g(x) - g(y)|_{L^\infty(0,1)}^2 \|Q^{1/2}\|_{L_{(HS)}(L^2(0,1), L^2(0,1))}^2. \end{aligned}$$

Tak więc dowód lipschitzowskości $G(\cdot)Q^{1/2}$ będzie zakończony gdy pokażemy, że odwzorowanie

$$D((-A)^{1/2}) \ni x \rightarrow N_g(x) \in L^\infty(0,1)$$

jest dobrze określone i lipschitzowskie. Wiadomo, że $D((-A)^{1/2}) = H_0^1(0,1)$. Następnie $H_0^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$. Wynika to z faktu, że dla $\psi \in H_0^1(0,1)$ mamy

$$\psi(\xi) = \int_0^\xi \psi'(\eta) d\eta, \quad \text{gdzie } \psi' \in L^2(0,1).$$

Teraz lipschitzowskość g implikuje lipschitzowskość odwzorowania

$$C([0,1]) \ni x \rightarrow N_g(x) \in C([0,1]) \hookrightarrow L^\infty(0,1).$$

Pokazaliśmy więc, że dla równania (14.1) spełnione są założenia twierdzenia o istnieniu i jedności rozwiązań stochastycznego równania ewolucyjnego. Tak więc z ogólnego twierdzenia wnioskujemy następujący fakt.

Twierdzenie 14.2 *Załóżmy, że f i g są lipschitzowskimi odwzorowaniami $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ oraz, że W jest procesem Wienera na $L^2(0,1)$ z nuklearnym operatorem kowariancji. Niech A będzie operatorem Laplace'a na $L^2(0,1)$ z warunkiem brzegowym Dirichleta. Wówczas dla dowolnego warunku początkowego*

$$z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} = \begin{pmatrix} D((-A)^{1/2}) \\ L^2(0,1) \end{pmatrix}$$

istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (14.1), rozumiane jako rozwiązanie równania ewolucyjnego (14.2). Ponadto dla dowolnego $T < \infty$ istnieje

stała L , taka że dla dowolnych $z_0, z_1 \in \mathcal{H}$ rozwiązania $Z(\cdot, z_0)$ i $Z(\cdot, z_1)$ starujące z z_0 i z_1 spełniają

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |Z(t, z_0) - Z(t, z_1)|_{\mathcal{H}}^2 \leq L |z_0 - z_1|_{\mathcal{H}}^2.$$

Stochastyczne równanie falowe na $(0, 1)$ z cylindrycznym procesem Wienera na $L^2(0, 1)$. Rozważmy problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(t, \xi) = \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}(t, \xi) + f(X(t, \xi)) + g(X(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \\ \quad \quad \quad t > 0, \xi \in (0, 1), \\ X(t, 0) = X(t, 1) = 0, \quad t > 0, \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \\ \frac{\partial X}{\partial t}(0, \xi) = y_0(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \end{cases} \quad (14.3)$$

Równanie (14.3) różni się od (14.1) tylko tym, że teraz W jest cylindrycznym procesem Wienera na $L^2(0, 1)$. Nietrudno pokazać, że w tym przypadku założenie (G) nie jest spełnione dla $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ zdefiniowanych jak w przykładzie równania z szumem o nuklearnej kowariancji. Pokażemy, że rozwiązanie istnieje na innej większej przestrzeni stanów $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{H}$. Ponieważ problem (14.3), jak i (14.1) jest nieliniowy, X musi przyjmować wartości funkcyjne. Tak więc będziemy poszukiwać rozwiązania na przestrzeni

$$\mathcal{K} = \left(\begin{matrix} L^2(0, 1) \\ H \end{matrix} \right),$$

gdzie H jest tak dobraną przestrzenią Hilberta dystrybucji aby

$$L^2(0, 1) = D((-A)^{1/2})$$

dla operatora Laplace'a A na H .

W celu zdefiniowania H przypomnijmy, że

$$e_n(\xi) = \sqrt{2} \sin(\pi n \xi), \quad n \in \mathbb{N}, \xi \in (0, 1)$$

jest ortonormalną bazą $L^2(0, 1)$ złożoną z wektorów własnych operatora Laplace'a z warunkiem brzegowym Dirichleta. Ponadto $\{-\lambda_n\}$, gdzie $\lambda_n = \pi^2 n^2$ jest odpowiadającym $\{e_n\}$ ciągiem wartości własnych. Zdefiniujemy H jako odpowiednią przestrzeń szeregów formalnych $\sum_n \gamma_n e_n$. Mianowicie kładziemy

$$H = \left\{ \sum_n \gamma_n e_n : \sum_n \lambda_n^{-1} \gamma_n^2 < \infty \right\}.$$

Wówczas H z iloczynem skalarnym

$$\left\langle \sum_n \gamma_n e_n, \sum_n \beta_n e_n \right\rangle_H := \sum_n \lambda_n^{-1} \gamma_n \beta_n$$

jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Na H definiujemy operator A kładąc

$$A \sum_n \gamma_n e_n = \sum_n \gamma_n A e_n = - \sum_n \lambda_n \gamma_n e_n.$$

Oczywiście

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ \sum_n \gamma_n e_n : -A \sum_n \gamma_n e_n \in H \right\} \\ &= \left\{ \sum_n \gamma_n e_n : \sum_n \lambda_n \gamma_n e_n \in H \right\} \\ &= \left\{ \sum_n \gamma_n e_n : \sum_n \lambda_n \gamma_n^2 < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Nietrudno pokazać, że tak zdefiniowany operator jest samosprężony i ujemnie określony. Ponieważ

$$(-A)^{1/2} e_n = \lambda_n^{1/2} e_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

mamy

$$\begin{aligned} D((-A)^{1/2}) &= \left\{ \sum_n \gamma_n e_n : (-A)^{1/2} \sum_n \gamma_n e_n \in H \right\} \\ &= \left\{ \sum_n \gamma_n e_n : \sum_n \gamma_n (-A)^{1/2} e_n \in H \right\} \\ &= \left\{ \sum_n \gamma_n e_n : \sum_n \gamma_n \lambda_n^{1/2} e_n \in H \right\} \\ &= \left\{ \sum_n \gamma_n e_n : \sum_n \gamma_n^2 < \infty \right\} \\ &= L^2(0, 1). \end{aligned}$$

Jak w poprzednim przykładzie będziemy zakładali, że $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są lipschitzowskie. Traktujemy (14.3) jako równanie (14.2) na $\mathcal{K}$. Pokażemy, że odpowiadające f i g odwzorowania $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ są lipschitzowskie odpowiednio z $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ oraz $\mathcal{K} \rightarrow L_{(HS)}(L^2(0, 1), \mathcal{K})$. Lipschitzowskość $\mathcal{F}$ wynika z lipschitzowskości

$$F(x)(\xi) = f(x(\xi))$$

z $L^2(0, 1)$ w $L^2(0, 1)$. Aby pokazać lipschitzowskość $\mathcal{G}$ wystarczy pokazać lipschitzowskość odwzorowania

$$G(x)[\psi](\xi) = g(x(\xi))\psi(\xi), \quad x, \psi \in L^2(0, 1), \quad \xi \in (0, 1)$$

z przestrzeni $L^2(0, 1)$ w $L_{(HS)}(L^2(0, 1), H)$. Niech $x \in L^2(0, 1)$. Niech $\{e_n\}$ będzie orthonormalną bazą $L^2(0, 1)$ wektorów własnych A . Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_n |G(x)e_n|_H^2 &= \sum_n \left| \sum_k \langle G(x)e_n, e_k \rangle_{L^2(0,1)} e_k \right|_H^2 \\ &= \sum_n \sum_k \lambda_k^{-1} \langle G(x)e_n, e_k \rangle_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \sum_n \sum_k \lambda_k^{-1} \langle e_n, G(x)e_k \rangle_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \sum_k \lambda_k^{-1} |G(x)e_k|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq 2 \sum_k \lambda_k^{-1} \int_0^1 |g(x(\xi))|^2 d\xi, \end{aligned}$$

ponieważ $|e_k(\xi)| \leq \sqrt{2}$, $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in (0, 1)$. Podobnie dla $x, y \in L^2(0, 1)$,

$$\sum_n |(G(x) - G(y))e_n|_H^2 \leq 2 \sum_k \lambda_k^{-1} \int_0^1 |g(x(\xi)) - g(y(\xi))|^2 d\xi.$$

Tak więc lipschitzowskość G wynika z lipschitzowskości g oraz z sumowalności szeregu $\sum \lambda_n^{-1}$. W konsekwencji, z twierdzenia o istnieniu i jedności rozwiązań stochastycznego równania ewolucyjnego wnioskujemy następujący fakt.

Twierdzenie 14.3 *Założmy, że f i g są lipschitzowskimi odwzorowaniami $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ oraz, że W jest cylindrycznym procesem Wienera na $L^2(0, 1)$. Wówczas dla dowolnego warunku początkowego $z_0 \in \mathcal{K}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (14.3) przyjmujące wartości w $\mathcal{K}$.*

14.3 Uwagi bibliograficzne

Więcej informacji o stochastycznym równaniu falowym można znaleźć między innymi w [6, 7, 9, 10, 17, 18, 27, 31, 33].

Równania z szumem na brzegu

15.1 Abstrakcyjne sformułowanie

Rozdział poświęcony będzie równaniu rzędu drugiego z niejednorodnymi warunkami brzegowymi. Załóżmy, że $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ jest obszarem ograniczonym,

$$A = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(\xi) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha}, \quad \xi \in \overline{\mathcal{O}}$$

jest operatorem rzędu drugiego na $\mathcal{O}$ oraz

$$\tau = \sum_{|\alpha| \leq 1} b_\alpha(\xi) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \eta^\alpha}, \quad \xi \in \overline{\mathcal{O}}$$

jest operatorem rzędu pierwszego.

Będziemy badali następujący problem

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, \xi) = AX(t, \xi) + f(X(t, \xi)), & t > 0, \xi \in \mathcal{O}, \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), & \xi \in \mathcal{O}, \\ \tau X(t, \eta) = \dot{W}(t, \eta) = \frac{\partial W}{\partial t}(t, \eta), & t > 0, \eta \in \partial\mathcal{O}, \end{cases} \quad (15.1)$$

gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską, $x_0 \in L^2(\mathcal{O})$, a W jest procesem Wienera (cylindrycznym lub z nuklearnym operatorem kowariancji) na $L^2(\mathcal{O})$. Pokażemy, że (15.1) można będzie traktować jako stochastyczne równanie cząstkowe z jednorodnym warunkiem brzegowym i odpowiednio dobranym współczynnikiem dyfuzji.

Będziemy zakładali następujące warunki na A , τ oraz obszar $\mathcal{O}$.

- (i) Operator A z dziedziną $D = \{\psi \in H^2(\mathcal{O}) : \tau\psi = 0\}$ generuje C_0 -półgrupę S na $L^2(\mathcal{O})$. Aby uniknąć omyłek będziemy oznaczać przez A_0 restrykcję A do $D(A_0) = D$, a więc i generator półgrupy S .

(ii) Istnieją $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz ciągle operator liniowy $D_{\tau,\lambda} \in L(L^2(\partial\mathcal{O}), L^2(\mathcal{O}))$,
takie że

$$\text{Im } D_{\tau,\alpha} \subset H^2(\mathcal{O})$$

oraz dowolnego $\psi \in L^2(\mathcal{O})$, $v = D_{\tau,\alpha}\psi$ jest rozwiązaniem problemu

$$Av(\xi) = \lambda v(\xi), \quad \xi \in \mathcal{O} \quad \text{oraz} \quad \tau v(\eta) = \psi(\eta), \quad \eta \in \partial\mathcal{O}.$$

Wyprowadzimy równanie stochastyczne na X zastępując najpierw proces $\dot{W}$ o wartościach dystrybucyjnych przez proces V regularny po zmiennych t i η .
Założmy, że Z jest rozwiązaniem problemu

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t}(t, \xi) = AZ(t, \xi) + f(Z(t, \xi)), & t > 0, \xi \in \mathcal{O}, \\ Z(0, \xi) = x_0(\xi), & \xi \in \mathcal{O}, \\ \tau Z(t, \eta) = V(t, \eta), & t > 0, \eta \in \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Wówczas

$$Y := Z - D_{\tau,\lambda}V$$

spełnia

$$\tau Y(t, \eta) = \tau Z(t, \eta) - \tau D_{\tau,\lambda}V(t, \eta) = 0, \quad \eta \in \partial\mathcal{O}, \quad t > 0.$$

Ponadto

$$Y(0, \xi) = x_0(\xi) - D_{\tau,\lambda}V(0, \xi), \quad \xi \in \mathcal{O}$$

oraz, dla $t > 0$ i $\xi \in \mathcal{O}$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t}(t, \xi) &= \frac{\partial Z}{\partial t}(t, \xi) - \frac{\partial D_{\tau,\lambda}V}{\partial t}(t, \xi) \\ &= AZ(t, \xi) + f(Z(t, \xi)) - AD_{\tau,\lambda}V(t, \xi) + \lambda D_{\tau,\lambda}V(t, \xi) \\ &\quad - \frac{\partial D_{\tau,\lambda}V}{\partial t}(t, \xi) \\ &= A_0Y(t, \xi) + f(Z(t, \xi)) + \lambda D_{\tau,\lambda}V(t, \xi) - \frac{\partial D_{\tau,\lambda}V}{\partial t}(t, \xi). \end{aligned}$$

Więc Y jest rozwiązaniem problemu

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t}(t, \xi) = A_0Y(t, \xi) + f(Z(t, \xi)) + \lambda D_{\tau,\lambda}V(t, \xi) - \frac{\partial D_{\tau,\lambda}V}{\partial t}(t, \xi), & t > 0, \xi \in \mathcal{O}, \\ Y(0, \xi) = x_0(\xi) - D_{\tau,\lambda}V(0, \xi), & \xi \in \mathcal{O}, \\ \tau Y(t, \eta) = 0, & t > 0, \eta \in \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Spełnia więc równanie całkowe

$$\begin{aligned} Y(t) &= S(t)(x_0 - D_{\tau,\lambda}V(0)) \\ &\quad + \int_0^t S(t-s) \left\{ F(Z(s)) + \lambda D_{\tau,\lambda}V(s) - \frac{\partial D_{\tau,\lambda}V}{\partial s}(s) \right\} ds, \end{aligned}$$

gdzie

$$F(z)(\xi) = f(z(\xi)), \quad z \in L^2(\mathcal{O}), \quad \xi \in \mathcal{O}.$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} & - \int_0^t S(t-s) \frac{\partial D_{\tau,\lambda} V}{\partial s}(s) ds \\ & = -D_{\tau,\lambda} V(t) + S(t) D_{\tau,\lambda} V(0) - \int_0^t A_0 S(t-s) D_{\tau,\lambda} V(s) ds. \end{aligned}$$

Tak więc Z spełnia

$$Z(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)F(Z(s))ds + \int_0^t (\lambda - A_0) S(t-s) D_{\tau,\lambda} V(s) ds.$$

Wstawiając teraz $V = \dot{W}$ otrzymujemy równanie całkowe na rozwiązanie stochastycznego problemu (15.1),

$$X(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)F(X(s))ds + \int_0^t (\lambda - A_0) S(t-s) D_{\tau,\lambda} dW(s). \quad (15.2)$$

Tak więc nieformalnie X jest rozwiązaniem stochastycznego równania ewolucyjnego

$$dX = (A_0 X + F(X)) dt + (\lambda - A_0) D_{\tau,\lambda} dW.$$

Tutaj źródłem nieformalności jest fakt, że operator $(\lambda - A_0) D_{\tau,\lambda}$ jest nieciągły z $L^2(\partial\mathcal{O})$ w $L^2(\mathcal{O})$.

Mamy następujące twierdzenie dotyczące istnienia rozwiązań (15.1).

Twierdzenie 15.1 *Niech W będzie procesem Wienera na $L^2(\partial\mathcal{O})$ z jądrem reprodukcyjnym U , oraz niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją lipschitzowską. Jeżeli*

$$\int_0^t \|(\lambda - A_0) S(s) D_{\tau,\lambda}\|_{L_{(HS)}(U, L^2(\mathcal{O}))}^2 ds < \infty \quad \text{dla } t > 0, \quad (15.3)$$

to dla dowolnego $x_0 \in L^2(\mathcal{O})$ istnieje dokładnie jeden proces mierzalny adoptowalny X o wartościach w $L^2(\mathcal{O})$, taki że dla każdego $T < \infty$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |X(t)|_{L^2(\mathcal{O})}^2 = \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \int_{\mathcal{O}} |X(t, \xi)|^2 d\xi < \infty, \quad (15.4)$$

który spełnia równanie całkowe (15.2). Proces X nazywamy rozwiązaniem problemu (15.1).

Zauważmy, że (15.3) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby całka stochastyczna

$$I(t) = \int_0^t (\lambda - A_0) S(t-s) D_{\tau,\lambda} dW(s), \quad t \in [0, \infty)$$

występująca w (15.2) była dobrze zdefiniowanym mierzalnym i adoptowalnym procesem w $L^2(\mathcal{O})$ spełniającym

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |I(t)|_{L^2(\mathcal{O})}^2 < \infty \quad \text{dla } T < \infty.$$

Tak więc twierdzenie dowodzi się prosto używając metody punktu stałego Banacha w przestrzeniach $\mathcal{X}_T$, $T < \infty$, procesów mierzalnych, adoptowalnych i spełniających (15.4).

15.2 Przykłady

Stochastyczne równanie ciepła na odcinku. Załóżmy, że $\mathcal{O} = (0, 1)$. Wówczas $\partial\mathcal{O} = \{0, 1\}$. Tak więc $L^2(\mathcal{O})$ identyfikujemy z $\mathbb{R}^2$, a każdy proces Wienera W na $L^2(\partial\mathcal{O})$ jest postaci $W = (W_0, W_1)$, gdzie W_0, W_1 są dwoma zależnymi lub niezależnymi rzeczywistymi procesami Wienera. Dla danej funkcji lipschitzowskiej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, oraz warunku początkowego $x_0 \in L^2(0, 1)$, szukamy rozwiązań *problemu brzegowego Dirichleta*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, \xi) = \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}(t, \xi) + f(X(t, \xi)), & t > 0, \xi \in (0, 1), \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), & \xi \in (0, 1), \\ X(t, 0) = \dot{W}_0(t), \quad X(t, 1) = \dot{W}_1(t), & t > 0 \end{cases} \quad (15.5)$$

oraz *problemu brzegowego Neumanna*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, \xi) = \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}(t, \xi) + f(X(t, \xi)), & t > 0, \xi \in (0, 1), \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), & \xi \in (0, 1), \\ \frac{\partial X}{\partial \xi}(t, 0) = \dot{W}_0(t), \quad \frac{\partial X}{\partial \xi}(t, 1) = \dot{W}_1(t), & t > 0. \end{cases} \quad (15.6)$$

Oznaczmy przez τ_D i τ_N odpowiednie operatory brzegowe, to jest

$$\tau_D v = (v(0), v(1)) \quad \text{oraz} \quad \tau_N v = \left(\frac{dv}{d\xi}(0), \frac{dv}{d\xi}(1) \right).$$

Dla problemu Dirichleta przyjmijmy $\lambda = 0$. Wówczas $D_{\tau_D} = D_{\tau_D, 0}$ wyliczamy następująco. Dla zadanego $w = (w_0, w_1) \in \mathbb{R}^2$, $v = D_{\tau_D} w$ jest rozwiązaniem problemu

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2}(\xi) = 0 \quad \text{dla } \xi \in (0, 1) \quad \text{oraz} \quad v(0) = w_0, \quad v(1) = w_1.$$

Oczywiście, każde rozwiązanie równania

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2}(\xi) = 0 \quad \text{dla } \xi \in (0, 1)$$

jest funkcją afiniczną. Tak więc

$$D_{\tau_D}(w)(\xi) = w_0 + (w_1 - w_0)\xi, \quad \xi \in (0, 1).$$

Inaczej

$$\begin{aligned} D_{\tau_D}(w) &= w_0\psi_0 + (w_1 - w_0)\psi_1, \\ \psi_0(\xi) &= 1, \quad \psi_1(\xi) = \xi, \quad \xi \in (0, 1). \end{aligned} \quad (15.7)$$

Dla problemu Neumanna wybieramy $\lambda = 1$. Wówczas $D_{\tau_N} = D_{\tau_N,1}$ wyliczamy w podobny sposób jak D_{τ_D} . Mianowicie, dla zadanego $w = (w_0, w_1) \in \mathbb{R}^2$, $v = D_{\tau_N}w$ jest rozwiązaniem problemu

$$\frac{d^2v}{d\xi^2}(\xi) = v(\xi) \quad \text{dla } \xi \in (0, 1) \quad \text{oraz} \quad \frac{dv}{d\xi}(0) = w_0, \quad \frac{dv}{d\xi}(1) = w_1.$$

Ponieważ każde rozwiązanie równania

$$\frac{d^2v}{d\xi^2}(\xi) = v(\xi) \quad \text{dla } \xi \in (0, 1)$$

jest funkcją postaci $a\varphi_0 + b\varphi_1$, gdzie

$$\varphi_0(\xi) = e^{-\xi} \quad \text{oraz} \quad \varphi_1(\xi) = e^{\xi} \quad \xi \in (0, 1), \quad (15.8)$$

otrzymujemy

$$D_{\tau_N}(w) = \frac{ew_0 - w_1}{e^{-1} - e}\varphi_0 + \frac{e^{-1}w_0 - w_1}{e^{-1} - e}\varphi_1. \quad (15.9)$$

Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 15.2 (i) Dla problemu brzegowego Dirichleta warunek (15.3) jest spełniony wtedy i tylko wtedy gdy $W = 0$. Tak więc problem (15.5) nie ma rozwiązań w $L^2(0, 1)$ gdy $W \neq 0$.

(ii) Dla problemu brzegowego Neumanna warunek (15.3) zachodzi dla dowolnego procesu Wienera. Tak więc dla problemu (15.6) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie będące procesem w $L^2(0, 1)$.

Dowód (i). Niech A_D będzie operatorem Laplace'a z warunkami brzegowymi Dirichleta, oraz niech S_D będzie półgrupą generowaną przez A_D . Tak więc A_0 w abstrakcyjnym sformułowaniu zastępujemy przez A_D .

Założmy, że $W \neq 0$. Wówczas jądro reprodukcyjne U procesu W jest niezerową podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$. Istnieje więc $w = (w_0, w_1) \in U$ taki, że $|w|_U = 1$. Ponieważ

$$l(t) := \int_0^t |A_D S_D(s) D_{\tau_D} w|_{L^2(0,1)}^2 ds \leq \int_0^t \|A_D S_D(s) D_{\tau_D}\|_{L_{(HS)}(U, L^2(0,1))}^2 ds$$

wystarczy pokazać, że $l(t) = \infty$ dla $t > 0$. Z (15.7) otrzymujemy

$$l(t) = \int_0^t |A_D S_D(s) (w_0 \psi_0 + (w_1 - w_0) \psi_1)|_{L^2(0,1)}^2 ds.$$

Niech $\{e_n\}$, $e_n(\xi) = \sqrt{2} \sin(\pi n \xi)$ będzie ortonormalną bazą wektorów własnych A_D . Wówczas dla dowolnego $\psi \in L^2(0,1)$,

$$\begin{aligned} \int_0^t |A_D S_D(s) \psi|_{L^2(0,1)}^2 ds &= \sum_n \int_0^t \langle A_D S_D(s) \psi, e_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 ds \\ &= \sum_n \int_0^t \langle \psi, A_D S_D(s) e_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 ds \\ &= \sum_n \langle \psi, e_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 \int_0^t e^{-2\pi^2 n^2 s} \pi^4 n^4 ds \\ &= \sum_n \langle \psi, e_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 \pi^2 n^2 \frac{1}{2} (1 - e^{-2\pi^2 n^2 t}). \end{aligned}$$

Tak więc $l(t) < \infty$ dla każdego, lub co jest równoważne dla pewnego $t > 0$, wtedy i tylko wtedy gdy

$$l := \sum_n \pi^2 n^2 \langle w_0 \psi_0 + (w_1 - w_0) \psi_1, e_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 < \infty.$$

Ponieważ, $\{-\lambda_n\}$, $\lambda_n = \pi^2 n^2$ jest ciągiem wartości własnych A_D , otrzymujemy

$$\begin{aligned} l &= \left| (-A_D)^{1/2} (w_0 \psi_0 + (w_1 - w_0) \psi_1) \right|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= |w_0 \psi_0 + (w_1 - w_0) \psi_1|_{D((-A_D)^{1/2})}^2. \end{aligned}$$

Ponieważ, patrz [9], str. 401, $D((-A_D)^{1/2}) = H_0^1(0,1)$, wystarczy pokazać, że

$$w_0 \psi_0 + (w_1 - w_0) \psi_1 \notin H_0^1(0,1).$$

Wynika to z faktu, że funkcje z $H_0^1(0,1)$ zerują się na brzegu odcinka $(0,1)$, a

$$w_0 \psi_0(0) + (w_1 - w_0) \psi_1(0) = w_0 \quad \text{oraz} \quad w_0 \psi_0(1) + (w_1 - w_0) \psi_1(1) = w_1.$$

Oczywiście, używając elementarnych rachunków, można również pokazać, że $l = \infty$. $\square$

Dowód (ii). Niech A_N oznacza operator Laplace'a z warunkiem brzegowym Neumanna oraz niech S_N będzie półgrupą generowaną przez A_N . Niech $\epsilon_0 = (1,0)$, $\epsilon_1 = (0,1)$. Ponieważ jądro reprodukcyjne U procesu W jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$ istnieje stała C taka, że

$$\begin{aligned} J(t) &:= \int_0^t \|A_N S_N(s) D_{\tau_N}\|_{L_{(HS)}(U, L^2(0,1))}^2 ds \\ &\leq C \sum_{i=0,1} \int_0^t |A_N S_N(s) D_{\tau_N} \epsilon_i|_{L^2(0,1)}^2 ds. \end{aligned}$$

Mamy pokazać, że $J(t) < \infty$ dla $t > 0$. Biorąc pod uwagę (15.9) wystarczy pokazać, że

$$\int_0^t |A_N S_N(s) \varphi_i|_{L^2(0,1)}^2 ds < \infty, \quad i = 0, 1, \quad t > 0,$$

gdzie φ_i , $i = 0, 1$ są dane przez (15.8). Rozumując jak w dowodzie pierwszej części twierdzenia wystarczy pokazać, że

$$\sum_n \pi^2 n^2 \langle \varphi_i, f_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 < \infty, \quad i = 0, 1, \quad (15.10)$$

gdzie $f_n(\xi) = \sqrt{2} \cos(\pi n \xi)$, $n \in \mathbb{N}$ jest bazą ortonormalną $L^2(0, 1)$ złożoną z wektorów własnych A_N . Oczywiście $\{-n\pi\}$ jest ciągiem odpowiadających wartości własnych. Używając elementarnych rachunków można sprawdzić, że zachodzi (15.10). Można też użyć następujących argumentów. Oszacowania (15.10) są równoważne stwierdzeniu, że

$$\varphi_0, \varphi_1 \in D((-A_N)^{1/2}).$$

Ponieważ, patrz [9], str.401, $D((-A_N)^{1/2}) = H^1(0, 1)$ wystarczy pokazać, że

$$\varphi_0, \varphi_1 \in H^1(0, 1).$$

Wynika to z faktu, że φ_0, φ_1 są funkcjami gładkimi i w $H^1(0, 1)$ nie mamy ukrytego warunku brzegowego. $\square$

15.3 Uwagi bibliograficzne

Rozdział oparty był na Rozdziale 13 książki [10]. Równania z niejednorodnymi warunkami brzegowymi Dirichleta i Neumanna są badane w [32]. Więcej na temat równań z szumem na brzegu można znaleźć w [22].

Procesy Wienera w przestrzeni dystrybucji

Przykłady rozważane w poprzednich rozdziałach poświęcone były równaniom w obszarze ograniczonym (przeważnie w $(0, 1)$). W przypadku równań na nieograniczonym obszarze występują pewne specyficzne trudności. Mianowicie całka stochastyczna jest dobrze określona gdy jej integrant jest procesem o wartościach w przestrzeni operatorów Hilberta–Schmidta. Było to zagwarantowane przez założenie nuklearności operatora kowariancji procesu W lub przez założenie

$$\int_0^1 \|S(t)\|_{L_{(HS)}(L^2, L^2)}^2 dt < \infty.$$

Gdy obszar jest nieograniczony to S nie jest nawet zwarta. Więc

$$S(t) \notin L_{(HS)}(L^2, L^2).$$

Z drugiej strony okazuje się, że założenie nuklearności szumu jest nienaturalne. W szczególności eliminuje wszystkie procesy stacjonarne po zmiennej przestrzennej.

Będziemy zajmowali się procesem Wienera W o wartościach dystrybucyjnych. W tym celu przypomnijmy najpierw podstawowe pojęcia teorii dystrybucji i analizy harmonicznej.

16.1 Podstawowe oznaczenia

Przez $S(\mathbb{R}^d)$ i $S(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ oznaczać będziemy przestrzenie funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych, o wartościach odpowiednio rzeczywistych i zespolonych, takich że

$$p_n(\psi) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha| \leq n} (1 + |\xi|^2)^n \left| \frac{\partial^{|\alpha|} \psi}{\partial \xi^\alpha}(\xi) \right| < \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Na $S(\mathbb{R}^d)$ i $S(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ rozważamy topologię zadaną przez rodzinę $\{p_n; n \in \mathbb{N}\}$. Następnie *przestrzeń dystrybucji temperowanych* $S'(\mathbb{R}^d)$ i $S'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ to przestrzenie dualne odpowiednio do $S(\mathbb{R}^d)$ i $S(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$. Przez $\langle \zeta, \psi \rangle$ będziemy oznaczać wartość dystrybucji ζ na funkcji próbnej ψ . Każdą miarą borelowską zespoloną lub rzeczywistą μ na $\mathbb{R}^d$ o wariancji $\|\mu\|$ taką, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-n} \|\mu(d\xi)\| < \infty \quad \text{dla pewnego } n \in \mathbb{N}$$

utożsamiamy z dystrybucją kładąc

$$\langle \mu, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) \mu(d\xi).$$

Miarę tą nazywamy *miarą temperowaną*. Oczywiście każda funkcja mierzalna ζ o wzroście co najwyżej wielomianowym jest gęstością miary temperowanej. Wtedy ζ traktujemy jako miarę temperowaną, a więc element $S'(\mathbb{R}^d)$, lub gdy ζ jest o wartościach zespolonych $S'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$. Ponadto

$$\langle \zeta, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) \zeta(\xi) d\xi.$$

Przez $\mathcal{F}\psi$ lub $\widehat{\psi}$ będziemy oznaczać transformacje Fouriera funkcji próbnej ψ ,

$$\mathcal{F}\psi(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \eta \xi} \psi(\xi) d\xi,$$

gdzie

$$\xi \eta = \sum_{i=1}^d \xi_i \eta_i, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^d.$$

Następnie definiujemy $\mathcal{F}\zeta$ dla dystrybucji ζ , kładąc

$$\langle \mathcal{F}\zeta, \psi \rangle = \langle \zeta, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle, \quad \psi \in S(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}),$$

gdzie

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \eta \xi} \psi(\xi) d\xi$$

jest transformacją odwrotną do $\mathcal{F}$. Wiadomo, że $\mathcal{F}$ jest bijekcją na $S(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, oraz izomertią na $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$.

16.2 Proces Wienera o wartościach dystrybucyjnych

Założmy, że

$$\mathfrak{A} = (\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$$

jest filtrowaną przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 16.1 *Proces $W : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow S'(\mathbb{R}^d)$ jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- (i) *W jest mierzalny, to znaczy dla dowolnego $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$, $t \rightarrow \langle W(t), \psi \rangle$ jest mierzalnym procesem o wartościach rzeczywistych.*
- (ii) *W jest gaussowski, to znaczy dla dowolnych $N \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_N \in [0, \infty)$ oraz $\psi_1, \dots, \psi_N \in S(\mathbb{R}^d)$, wektor losowy*

$$(\langle W(t_1), \psi_1 \rangle, \dots, \langle W(t_N), \psi_N \rangle)$$

jest gaussowski w $\mathbb{R}^N$.

- (iii) *Dla dowolnej funkcji próbnej $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$ proces $t \rightarrow \langle W(t), \psi \rangle$ jest rzeczywistym procesem Wienera względem filtracji $(\mathfrak{F}_t)$.*

Lemat 16.1 *Niech W będzie procesem Wienera w $S'(\mathbb{R}^d)$. Wówczas istnieje ciągła symetryczna i dodatnio określona forma dwuliniowa $Q : S(\mathbb{R}^d) \times S(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, taka że*

$$\mathbb{E} \langle W(t), \psi \rangle \langle W(s), \varphi \rangle = t \wedge s Q(\psi, \varphi), \quad \forall \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Dowód. Niech $\Gamma : [0, \infty) \times [0, \infty) \times S(\mathbb{R}^d) \times S(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dane formułą

$$\Gamma(t, s, \psi, \varphi) := \mathbb{E} \langle W(t), \psi \rangle \langle W(s), \varphi \rangle, \quad t, s \geq 0, \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Oczywiście przy ustalonych t i s , Γ jest formą dwuliniową na $S(\mathbb{R}^d)$. Mamy pokazać, że

$$\Gamma(t, s, \psi, \varphi) = t \wedge s Q(\psi, \varphi)$$

z formą Q spełniającą tezę lematu. Ustalmy $\psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ oraz $t \geq s \geq 0$. Ponieważ

$$\mathbb{E} \langle W(t) - W(s), \psi \rangle \langle W(s), \varphi \rangle = \mathbb{E} (\mathbb{E} (\langle W(t) - W(s), \psi \rangle \langle W(s), \varphi \rangle \mid \mathfrak{F}_s)) = 0,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \langle W(t), \psi \rangle \langle W(s), \varphi \rangle &= \mathbb{E} \langle W(t) - W(s) + W(s), \psi \rangle \langle W(s), \varphi \rangle \\ &= \mathbb{E} \langle W(s), \psi \rangle \langle W(s), \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{4} \{ \mathbb{E} \langle W(s), \psi + \varphi \rangle^2 - \mathbb{E} \langle W(s), \psi - \varphi \rangle^2 \} \\ &= \frac{s}{4} \{ \mathbb{E} \langle W(1), \psi + \varphi \rangle^2 - \mathbb{E} \langle W(1), \psi - \varphi \rangle^2 \} \\ &= \frac{s}{4} \{ \Gamma(1, \psi + \varphi) - \Gamma(1, \psi - \varphi) \}. \end{aligned}$$

Tak więc wystarczy zauważyć, że

$$Q(\psi, \varphi) = \frac{1}{4} \{ \Gamma(1, \psi + \varphi) - \Gamma(1, \psi - \varphi) \}$$

ma żądane własności. $\square$

Formę Q występującą w tezie lematu nazywać będziemy *formą kowariancji W* .

16.3 Jednorodny proces Wienera

Definiujemy grupę translacji $\{\tau_x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ przestrzeni $S(\mathbb{R}^d)$ kładąc

$$\tau_x \psi(\xi) = \psi(x + \xi), \quad \psi \in S(\mathbb{R}^d), \quad x, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Następnie rozszerzamy $\{\tau_x\}$ na $S'(\mathbb{R}^d)$ kładąc

$$\langle \tau_x \zeta, \psi \rangle = \langle \zeta, \tau_{-x} \psi \rangle, \quad \psi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Definicja 16.2 *Proces Wienera W o wartościach w $S'(\mathbb{R}^d)$ jest jednorodny gdy dla dowolnego $t \geq 0$, rozkład $\mathcal{L}(W(t))$ w $S'(\mathbb{R}^d)$ jest niezmienniczy ze względu na grupę translacji $\{\tau_x\}$, to znaczy, gdy dla dowolnego zbioru borelowskiego $\mathcal{X} \subset S'(\mathbb{R}^d)$ zachodzi*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(W(t))(\mathcal{X}) &:= \mathbb{P}(W(t) \in \mathcal{X}) = \mathbb{P}(W(t) \in \tau_x^{-1} \mathcal{X}) = \mathcal{L}(W(t))(\tau_x^{-1} \mathcal{X}) \\ &=: \tau_x * \mathcal{L}(W(t))(\mathcal{X}), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Mamy następującą charakteryzację jednorodnego procesu Wienera w terminach jego formy kowariancji.

Lemat 16.2 *Niech W będzie procesem Wienera w $S'(\mathbb{R}^d)$ o formie kowariancji Q . Wówczas W jest jednorodny wtedy i tylko wtedy gdy Q jest niezmienniczy ze względu na grupę $\{\tau_x\}$, to znaczy gdy*

$$Q(\psi, \varphi) = Q(\tau_x \psi, \tau_x \varphi), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Dowód. Ustalmy $\psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ oraz $x \in \mathbb{R}^d$. Jeżeli W jest jednorodny, to

$$\begin{aligned} Q(\psi, \varphi) &= \mathbb{E} \langle W(1), \psi \rangle \langle W(1), \varphi \rangle = \int_{S'(\mathbb{R}^d)} \langle \zeta, \psi \rangle \langle \zeta, \varphi \rangle \mathcal{L}(W(1))(d\zeta) \\ &= \int_{S'(\mathbb{R}^d)} \langle \zeta, \psi \rangle \langle \zeta, \varphi \rangle \tau_x * \mathcal{L}(W(1))(d\zeta) = \mathbb{E} \langle W(1), \tau_x \psi \rangle \langle W(1), \tau_x \varphi \rangle \\ &= Q(\tau_x \psi, \tau_x \varphi), \end{aligned}$$

co dowodzi konieczności warunku. Aby pokazać jego dostateczność, założmy teraz, że Q jest niezmienniczy ze względu na translacje. Wówczas dla dowolnych $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ oraz $\psi_1, \dots, \psi_n$ rozkłady N -wymiarowych wektorów

$$(\langle W(t), \psi_1 \rangle, \dots, \langle W(t), \psi_N \rangle)$$

oraz

$$(\langle W(t), \tau_x \psi_1 \rangle, \dots, \langle W(t), \tau_x \psi_N \rangle)$$

są identyczne. Istotnie, są one gaussowskie oraz mają tę samą macierz kowariancji $\{q_{i,j}\}$;

$$q_{i,j} = Q(\psi_i, \psi_j) = Q(\tau_x \psi_i, \tau_x \psi_j).$$

To implikuje równość rozkładów $\mathcal{L}(W(t))$ i $\tau_x * \mathcal{L}(W(t))$. $\square$

Dowód następującego faktu można znaleźć w książce Gelfanda–Vilenkina [14], p. 169.

Twierdzenie 16.1 Niech $Q : S(\mathbb{R}^d) \times S(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas Q jest ciągłą dwuliniową symetryczną formą nieujemnie określoną wtedy i tylko wtedy gdy istnieje nieujemna symetryczna miara temperowana μ na $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$, taka że

$$Q(\psi, \varphi) = \langle \mathcal{F}\mu, \psi * \varphi_{(s)} \rangle, \quad \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d), \quad (16.1)$$

gdzie

$$\varphi_{(s)}(\xi) := \varphi(-\xi), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^d), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

a $*$ oznacza operator splotu

$$\psi * \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Niech W będzie jednorodnym procesem Wienera w $S'(\mathbb{R}^d)$. Wówczas, z Lematu 16.1 jego forma kowariancji Q spełnia (16.1) z odpowiednią miarą nieujemną μ . Będziemy ją nazywali *miarą spektralną* W , a $\Gamma := \mathcal{F}\mu$ jego *kowariancją*.

Przykład 1. Załóżmy, że miara spektralna procesu W jest równa δ_0 . Wówczas $\mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^{-d/2}$. Co utożsamiamy z gęstością $\mathcal{F}\delta_0$ względem miary Lebesgue'a $d\xi$. Tak więc dla dowolnych funkcji próbnych mamy

$$\begin{aligned} Q(\psi, \varphi) &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\eta - \xi) \varphi_{(s)}(\eta) d\eta d\xi \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) d\xi \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Zauważmy więc, że proces W ma postać

$$W(t, \xi) = (2\pi)^{-d/4} \beta(t), \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

gdzie β jest jednowymiarowym (rzeczywistym) procesem Wienera na $\mathfrak{A}$.

Przykład 2. Niech teraz μ będzie równa d -wymiarowej mierze Lebesgue'a $d\xi$. Wówczas $\mathcal{F}\mu = (2\pi)^{d/2} \delta_0$. Tak więc

$$\begin{aligned} Q(\psi, \varphi) &= (2\pi)^{d/2} \psi * \varphi_{(s)}(0) = (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(0 - \eta) \varphi_{(s)}(\eta) d\eta \\ &= (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-\eta) \varphi(-\eta) d\eta = (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\eta) \varphi(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Tak więc $(2\pi)^{-d/4} W$ jest cylindrycznym procesem Wienera na $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Przykład 3. Załóżmy, że miara spektralna μ procesu W jest skończona. Wówczas jego kowariancja $\Gamma = \mathcal{F}\mu$ jest funkcją ograniczoną jednostajnie ciągłą i ograniczoną na $\mathbb{R}^d$. Ponadto

$$Q(\psi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(\xi) \psi(\xi - \eta) \varphi(-\eta) d\xi d\eta = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(\xi - \eta) \psi(\xi) \varphi(\eta) d\xi d\eta.$$

Z twierdzenia poniżej wynika, że W można traktować W jako pole losowe na $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, stacjonarne po zmiennej przestrzennej.

Twierdzenie 16.2 *Jeżeli miara spektralna μ procesu W jest skończona, to W można identyfikować z polem losowym $W(t, \xi)$, $t \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ to znaczy*

$$\langle W(t), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} W(t, \xi) \psi(\xi) d\xi, \quad t \geq 0, \psi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Ponadto pole W ma następujące własności:

(i) W jest gaussowskie, to jest dla dowolnych $N \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_N \in [0, \infty)$ oraz $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}^d$ wektor losowy

$$(W(t_1, \xi_1), \dots, W(t_N, \xi_N))$$

jest gaussowski w $\mathbb{R}^N$.

(ii) Dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^d$ proces $t \rightarrow W(t, \xi)$ jest procesem Wienera.

(iii) Dla dowolnych $t, s \geq 0$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E} W(t, \xi) W(s, \eta) = t \wedge s \Gamma(\xi - \eta),$$

gdzie $\Gamma = \mathcal{F}\mu$.

Dowód. Rozważmy aproksymacje δ_0 przez ciąg $\{\rho_n\} \subset S(\mathbb{R}^d)$, taki że

$$\rho_n(\xi) = \rho_n(-\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \rho_n \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(\xi) d\xi = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

oraz

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} (\Gamma * \rho_n) * \rho_m(0) = \Gamma(0) \quad (16.2)$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi) - \rho_n * \psi(\xi)| d\xi = 0, \quad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^d). \quad (16.3)$$

Wówczas

$$W_n(t, \xi) := \langle W(t), \tau_{-\xi} \rho_n \rangle, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Ponieważ W jest gaussowski, pola $\{W_n\}$ są gaussowskie na $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$. Ponadto

$$\begin{aligned} \mathbb{E} W_n(t, \xi) W_m(t, \xi) &= \mathbb{E} \langle W(t), \tau_{-\xi} \rho_n \rangle \langle W(t), \tau_{-\xi} \rho_m \rangle \\ &= \langle \Gamma, (\tau_{-\xi} \rho_n) * (\tau_{-\xi} \rho_m)_{(s)} \rangle. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |W_n(t, \xi) - W_m(t, \xi)|^2 &= \mathbb{E} |W_n(t, \xi)|^2 - 2\mathbb{E} W_n(t, \xi) W_m(t, \xi) + \mathbb{E} |W_m(t, \xi)|^2 \\ &= \langle \Gamma, (\tau_{-\xi} \rho_n) * (\tau_{-\xi} \rho_n)_{(s)} \rangle + \langle \Gamma, (\tau_{-\xi} \rho_m) * (\tau_{-\xi} \rho_m)_{(s)} \rangle \\ &\quad - 2 \langle \Gamma, (\tau_{-\xi} \rho_n) * (\tau_{-\xi} \rho_m)_{(s)} \rangle. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}
 \langle \Gamma, (\tau_{-\xi} \rho_n) * (\tau_{-\xi} \rho_m)_{(s)} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(\eta - \lambda) (\tau_{-\xi} \rho_n)(\eta) (\tau_{-\xi} \rho_m)(\lambda) d\eta d\lambda \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(\eta - \lambda) \rho_n(-\xi + \eta) \rho_m(-\xi + \lambda) d\eta d\lambda \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(\eta - \lambda) \rho_n(\eta) \rho_m(\lambda) d\eta d\lambda \\
 &= (\Gamma * \rho_n) * \rho_m(0),
 \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |W_n(t, \xi) - W_m(t, \xi)|^2 \\
 = (\Gamma * \rho_n) * \rho_n(0) + (\Gamma * \rho_m) * \rho_m(0) - 2 (\Gamma * \rho_n) * \rho_m(0).
 \end{aligned}$$

Tak więc, z (16.2) wynika, że $\{W_n(t, \xi)\}$ jest ciągiem Cauchego. Mamy

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left| \langle W(t), \psi \rangle - \int_{\mathbb{R}^d} W_n(t, \xi) \psi(\xi) d\xi \right|^2 \\
 = \mathbb{E} \left\langle W(t), \psi - \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) d\xi \tau_{-\xi} \rho_n \right\rangle^2.
 \end{aligned}$$

Stąd, ponieważ

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left| \langle W(t), \psi \rangle - \int_{\mathbb{R}^d} W_n(t, \xi) \psi(\xi) d\xi \right|^2 \\
 = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(\eta - \lambda) \left[\psi(\eta) - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(\eta - \xi) \psi(\xi) d\xi \right] \\
 \times \left[\psi(\lambda) - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(\lambda - \xi) \psi(\xi) d\xi \right] d\eta d\lambda \\
 \leq \| \Gamma \|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \psi(\eta) - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(\eta - \xi) \psi(\xi) d\xi \right| d\eta \right)^2 \\
 \leq \| \Gamma \|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\eta) - \rho_n * \psi(\xi)| d\eta \right)^2,
 \end{aligned}$$

z (16.3) wnioskujemy, że granica $W(t, \xi)$ ciągu $\{W_n(t, \xi)\}$ spełnia

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left| \langle W(t), \psi \rangle - \int_{\mathbb{R}^d} W(t, \xi) \psi(\xi) d\xi \right|^2 \\
 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \langle W(t), \psi \rangle - \int_{\mathbb{R}^d} W_n(t, \xi) \psi(\xi) d\xi \right|^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Pole W jest gaussowskie ponieważ dla ustalonych N , $t_1, \dots, t_N \in [0, \infty)$, oraz $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ wektory gaussowskie

$$(W_n(t_1, \xi_1), \dots, W_n(t_n, \xi_n)), \quad n \in \mathbb{N}$$

zbiegają w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ do $(W(t_1, \xi_1), \dots, W(t_n, \xi_n))$. Ponadto dla ustalonego $x \in \mathbb{R}^d$, $t \rightarrow W(t, \xi)$ jest adoptowalnym martyngalem całkwalnym z kwadratem z kowariancją

$$\begin{aligned} \langle\langle W(\cdot, \xi) \rangle\rangle(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle\langle W_n(\cdot, \xi) \rangle\rangle(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} |W_n(t, \xi)|^2 \\ &= t \lim_{n \rightarrow \infty} (\Gamma * \rho_n) * \rho_n(0) = t \Gamma(0). \end{aligned}$$

Tak więc dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^d$, $W(\cdot, \xi)$ jest procesem Wienera. Dowód będzie więc zakończony jak pokażemy własność (iii). W tym celu ustalmy $t, s \in [0, \infty)$ oraz $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$. Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbb{E} W(t, \xi) W(s, \eta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} W_n(t, \xi) W_n(s, \eta) \\ &= t \wedge s \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \langle W(1), \tau_{-\xi} \rho_n \rangle \langle W(1), \tau_{-\eta} \rho_n \rangle \\ &= t \wedge s \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Gamma, \tau_{-\xi} \rho_n * (\tau_{-\eta} \rho_n)_{(s)} \rangle \\ &= t \wedge s \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(u-v) \rho_n(u-\xi) \rho_n(v-\eta) du dv \\ &= t \wedge s \Gamma(\xi - \eta). \end{aligned}$$

□

16.4 Jądro reprodukcyjne procesu Wienera

Naszym celem będzie wyreprezentowanie procesu Wienera w $S'(\mathbb{R}^d)$ jako procesu cylindrycznego na odpowiednio dobranej przestrzeni Hilberta. Wygodnie będzie wprowadzić następującą definicję.

Definicja 16.3 Jądrem reprodukcyjnym procesu Wienera W o wartościach w $S'(\mathbb{R}^d)$ jest ośrodkowa, rzeczywista przestrzeń Hilberta $(\mathcal{H}_W, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_W})$ spełniająca następujące warunki:

- (i) $\mathcal{H}_W \subset S'(\mathbb{R}^d)$,
- (ii) dla dowolnej ortonormalnej bazy $\{e_m\}$ przestrzeni $\mathcal{H}_W$ istnieje ciąg niezależnych standartowych rzeczywistych procesów Wienera $\{W_m\}$, taki że

$$W(t) = \sum_m W_m(t) e_m, \quad t \geq 0,$$

gdzie zbieżność szeregu rozumiemy w następujący sposób

$$\forall \psi \in S(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \langle W(t), \psi \rangle - \sum_{m=1}^n W_m(t) \langle e_m, \psi \rangle \right|^2 = 0.$$

Uwaga. W Twierdzeniu 3 poniżej pokażemy, że dla dowolnego procesu Wienera W istnienie jego jądro reprodukcyjne. Zauważmy teraz, że dla zadanego W istnieje co najwyżej jedno jądro reprodukcyjne.

Pierwszy rezultat pokazuje, jak skonstruować jądro reprodukcyjne dowolnego procesu Wienera.

Twierdzenie 16.3 *Niech W będzie procesem Wienera w $S'(\mathbb{R}^d)$ z formą kowariancji Q . Niech $\mathcal{H}_W$ będzie przestrzenią wszystkich $\zeta \in S'(\mathbb{R}^d)$, takich że*

$$|\zeta|_{\mathcal{H}_W} := \sup_{\psi \in S(\mathbb{R}^d); Q(\psi, \psi) \neq 0} \frac{|\langle \zeta, \psi \rangle|}{\sqrt{Q(\psi, \psi)}} < \infty. \quad (16.4)$$

Wówczas

$$\langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{H}_W} = \frac{1}{4} \{ |\zeta + \xi|_{\mathcal{H}_W}^2 - |\zeta - \xi|_{\mathcal{H}_W}^2 \} \quad (16.5)$$

jest iloczynem skalarnym na $\mathcal{H}_W$, $|\cdot|_{\mathcal{H}_W}$ jest odpowiadającą mu normą i przestrzeń $(\mathcal{H}_W, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_W})$ jest jądrem reprodukcyjnym W .

Dowód. Na $S(\mathbb{R}^d)$ wprowadzimy relacje równoważności

$$\psi \approx \varphi \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad Q(\psi - \varphi, \psi - \varphi) = 0.$$

Zauważmy, że gdy $\psi \approx \varphi$ to

$$Q(\psi, \psi) = Q(\varphi, \varphi) = Q(\varphi, \psi) = Q(\psi, \varphi). \quad (16.6)$$

Istotnie, z nierówności Schwarza otrzymujemy

$$|Q(\psi - \varphi, \varphi)| \leq (Q(\psi - \varphi, \psi - \varphi))^{1/2} (Q(\varphi, \varphi))^{1/2} = 0.$$

Tak więc $Q(\psi - \varphi, \varphi) = 0$. Podobnie $Q(\psi - \varphi, \psi) = 0$. Co daje (16.6). Na $\mathcal{V}_0 := S(\mathbb{R}^d)/\approx$ rozważmy iloczyn skalarny

$$\langle [\psi], [\varphi] \rangle_{\mathcal{V}} =: Q(\psi, \varphi).$$

Jest on dobrze zdefiniowany dzięki własności (16.6). Zauważmy, że przestrzeń prehilbertowska $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}})$ jest ośrodkowa. Ośrodkowość $\mathcal{V}$ wynika z ośrodkowości $S(\mathbb{R}^d)$ w następujący sposób. Niech S_0 będzie przeliczalnym gęstym podzbiorem $S(\mathbb{R}^d)$. Wówczas

$$Z = \{[\psi] : \psi \in S_0\}$$

jest gęstym przeliczalnym podzbiorem $\mathcal{V}_0$. Istotnie dla danego $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$ istnieje ciąg $\{\psi_n\} \subset S_0$, taki że $\psi_n \rightarrow \psi$ w $S(\mathbb{R}^d)$. Ponieważ Q jest ciągle na $S(\mathbb{R}^d) \times S(\mathbb{R}^d)$ otrzymujemy

$$||[\psi_n] - [\psi]|_{\mathcal{V}}|^2 = ||\psi_n - \psi||_{\mathcal{V}}^2 = Q(\psi_n - \psi, \psi_n - \psi) \rightarrow 0.$$

Niech $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}})$ będzie uzupełnieniem $\mathcal{V}_0$ do (ośrodkowej) przestrzeni Hilberta. Pokażemy, że $\mathcal{H}_W$ z normą $|\cdot|_{\mathcal{H}_W}$ jest izometryczna z $\mathcal{V}$ z normą zadaną przez iloczyn skalarny na $\mathcal{V}$. Wtedy oczywiście (16.5) definiuje iloczyn skalarny na $\mathcal{H}_W$, oraz $(\mathcal{H}_W, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_W})$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. W tym celu zauważmy, że

$$\forall \zeta \in \mathcal{H}_W, \forall \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \quad \psi \approx \varphi \text{ implikuje } \langle \zeta, \psi \rangle = \langle \zeta, \varphi \rangle.$$

W tym celu wystarczy pokazać, że dla dowolnej $\zeta \in \mathcal{H}_W$, $\psi \in [0]$ pociąga $\langle \zeta, \psi \rangle = 0$. To wynika z oszacowania

$$|\langle \zeta, \psi \rangle| \leq C Q(\psi, \psi)^{1/2}.$$

Tak więc

$$\mathcal{H}_W \times \mathcal{V}_0 \ni (\zeta, [\psi]) = \langle \zeta, \psi \rangle \in \mathbb{R}^d$$

jest dobrze określoną formą dwuliniową. Jest ona ciągła bo

$$|\langle \zeta, [\psi] \rangle| = |\langle \zeta, \psi \rangle| \leq |\zeta|_{\mathcal{H}_W} Q(\psi, \psi)^{1/2} = |\zeta|_{\mathcal{H}_W} |[\psi]|_{\mathcal{V}}.$$

Z tego wynika, że $(\cdot, \cdot)$ rozszerza się jednoznacznie do dwuliniowej ciągłej formy na $\mathcal{H}_W \times \mathcal{V}$. Teraz możemy skonstruować izometryczny izomorfizm $j : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}_W$ spełniający

$$(jw, v) = \langle v, w \rangle_{\mathcal{V}}, \quad \forall w, v \in \mathcal{V}.$$

Po pierwsze określamy $j : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{H}_W$ formułą

$$\langle j[\psi], \varphi \rangle = Q(\psi, \varphi), \quad \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Oczywiście $j[\psi]$ nie zależy od wyboru reprezentanta z $[\psi]$. Jest więc dobrze określone na $\mathcal{V}_0$. Oczywiście jest o wartościach w $\mathcal{H}_W$ oraz jest liniowe. Ponadto

$$(j[\psi], [\varphi]) = \langle [\psi], [\varphi] \rangle_{\mathcal{V}}, \quad \forall \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$$

wynika z faktu, że

$$Q(\psi, \varphi) = \langle [\psi], [\varphi] \rangle_{\mathcal{V}}, \quad \forall \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Pokazaliśmy więc, że obraz $j(\mathcal{V})$ jest przestrzenią dualną do $\mathcal{V}$ z formą dualną $(\cdot, \cdot)$. Aby pokazać, że $\mathcal{H}_W = j(\mathcal{V})$ wystarczy wykazać, że każdy element $\zeta \in \mathcal{H}_W$ można utożsamić przez $(\cdot, \cdot)$ z funkcjonałem liniowym na $\mathcal{V}$. Jest to natychmiastowa konsekwencja ciągłości $(\cdot, \cdot)$ z $\mathcal{H}_W \times \mathcal{V}$.

Wiemy więc, że $(\mathcal{H}_W, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_W})$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Pokażemy, że dla dowolnej ortonormalnej bazy $\{e_n\}$ przestrzeni $\mathcal{H}_W$ istnieje ciąg niezależnych standartowych rzeczywistych procesów Wienera $\{W_n\}$ określony na tej samej przestrzeni probabilistycznej $\mathfrak{A}$ co W taki, że dla dowolnych $t \geq 0$ i $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle W(t), \psi \rangle = \sum_n W_n(t) \langle e_n, \psi \rangle,$$

gdzie szereg zbiega w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. W tym celu zauważmy, że ponieważ $\mathcal{V}_0$ jest gęste w $\mathcal{V}$ istnieje ciąg $\{\phi_n\} \subset S(\mathbb{R}^d)$ taki, że $\{[\phi_n]\}$ jest ortonormalną bazą $\mathcal{V}$. Niech

$$f_n = j[\phi_n] \quad \text{oraz} \quad W_n(t) = \langle W(t), \phi \rangle, \quad t \geq 0.$$

Wówczas $\{f_n\}$ jest ortonormalną bazą $\mathcal{H}_W$ i, z definicji procesu Wienera w $S'(\mathbb{R}^d)$, $\{W_n\}$ jest ciągiem rzeczywistych procesów Wienera określonych na $\mathfrak{A}$. Są one standardowe i niezależne bowiem

$$\begin{aligned} \mathbb{E} W_n(t) W_m(t) &= \mathbb{E} \langle W(t), \phi_n \rangle \langle W(t), \phi_m \rangle = t Q(\phi_n, \phi_m) = t \langle [\phi_n], [\phi_m] \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= t \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Ponadto dla dowolnych $t \geq 0$ i $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$

$$\langle W(t), \psi \rangle = \sum_n W_n(t) \langle f_n, \psi \rangle.$$

Istotnie, mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \langle W(t), \psi \rangle - \sum_{j=1}^n W_j(t) \langle f_n, \psi \rangle \right|^2 &= \mathbb{E} \left| \left\langle W(t), \psi - \sum_{j=1}^n \langle f_n, \psi \rangle \phi_n \right\rangle \right|^2 \\ &= Q \left(\psi - \sum_{j=1}^n \langle f_n, \psi \rangle \phi, \psi - \sum_{j=1}^n \langle f_n, \psi \rangle \phi_n \right) \\ &= \left\langle [\psi] - \sum_{j=1}^n \langle f_n, \psi \rangle [\phi_n], [\psi] - \sum_{j=1}^n \langle f_n, \psi \rangle [\phi_n] \right\rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \left| [\psi] - \sum_{j=1}^n \langle [\phi_n], [\psi] \rangle_{\mathcal{V}} [\phi_n] \right|_{\mathcal{V}}^2, \end{aligned}$$

co zbiega do 0, gdy $n \rightarrow \infty$. Niech $\{e_n\}$ będzie teraz jakąś inną ortonormalną bazą $\mathcal{H}_W$. Musimy znaleźć ciąg niezależnych procesów Wienera $\{\tilde{W}_n\}$, taki że dla dowolnych $t \geq 0$ i $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle W(t), \psi \rangle = \sum_n \tilde{W}_n(t) \langle e_n, \psi \rangle, \quad (16.7)$$

gdzie szereg zbiega w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Dla $t \geq 0$, kładziemy

$$\tilde{W}_n(t) = \sum_j W_j(t) \langle e_n, f_j \rangle_{\mathcal{H}_W}. \quad (16.8)$$

Zauważmy, że szereg w (16.8) zbiega w $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ oraz $\{\tilde{W}_n\}$ są niezależnymi standardowymi procesami Wienera. Istotnie, z niezależności $\{W_j\}$ mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sum_j W_j(t) \langle e_n, f_j \rangle_{\mathcal{H}_W} \sum_k W_k(t) \langle e_m, f_k \rangle_{\mathcal{H}_W} \\
= \sum_k \langle e_n, f_k \rangle_{\mathcal{H}_W} \langle e_m, f_k \rangle_{\mathcal{H}_W} = \langle e_n, e_m \rangle_{\mathcal{H}_W} = \delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

Pokazujemy teraz (16.7). Dla ustalonych t i ψ mamy

$$\begin{aligned}
\sum_n \tilde{W}_n(t) \langle e_n, \psi \rangle &= \sum_n \sum_j W_j(t) \langle e_n, f_j \rangle_{\mathcal{H}_W} \langle e_n, \psi \rangle \\
&= \sum_j W_j(t) \sum_n \langle e_n, f_j \rangle_{\mathcal{H}_W} \langle e_n, \psi \rangle \\
&= \sum_j W_j(t) \left\langle \sum_n \langle e_n, f_j \rangle_{\mathcal{H}_W} e_n, \psi \right\rangle \\
&= \sum_j W_j(t) \langle f_j, \psi \rangle = \langle W(t), \psi \rangle,
\end{aligned}$$

przy czym sprawdzenie odpowiednich zbieżności pozostawiamy czytelnikowi. $\square$

Uwaga. Zauważmy, że jądro reprodukcyjne procesu Wienera jest wyznaczone jednoznacznie przez jego formę kowariancji. Jeżeli $(\mathcal{H}_W, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_W})$ jest jądrem reprodukcyjnym procesu Wienera W o formie kowariancji Q oraz $\{\tilde{W}_n\}$ jest ciągiem niezależnych standardowych rzeczywistych procesów Wienera określonych na filtrowanej przestrzeni probabilistycznej $\tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, (\tilde{\mathfrak{F}}_t), \tilde{\mathbb{P}})$, to dla dowolnej ortonormalnej bazy $\{e_n\}$ przestrzeni $\mathcal{H}_W$ szereg

$$\sum_n \tilde{W}_n(t) e_n, \quad t \geq 0$$

definiuje proces Wienera $\tilde{W}$ na $S'(\mathbb{R}^d)$, określony na $\tilde{\mathfrak{A}}$ o formie kowariancji Q . Oczywiście rozkłady W i $\tilde{W}$ na $[0, \infty) \times S'(\mathbb{R}^d)$ są jednakowe.

W teorii całki stochastycznej względem procesu Wienera o wartościach w $S'(\mathbb{R}^d)$ bardzo przydatny okaże się następujący lemat.

Lemat 16.3 *Niech W będzie procesem Wienera o wartościach w $S'(\mathbb{R}^d)$. Niech Q będzie formą kowariancji W , a $\mathcal{H}_W$ jego jądrem reprodukcyjnym. Wówczas dla dowolnej ortonormalnej bazy $\{e_n\}$ przestrzeni $\mathcal{H}_W$ i dowolnych $\psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ zachodzi*

$$\sum_n \langle e_n, \psi \rangle \langle e_n, \varphi \rangle = Q(\psi, \varphi).$$

Dowód. Z definicji Q oraz $\mathcal{H}_W$ mamy

$$\begin{aligned}
Q(\psi, \varphi) &= \mathbb{E} \langle W(1), \psi \rangle \langle W(1), \varphi \rangle \\
&= \mathbb{E} \left\{ \left(\sum_n W_n(1) \langle e_n, \psi \rangle \right) \left(\sum_m W_m(1) \langle e_m, \varphi \rangle \right) \right\} \\
&= \sum_n \langle e_n, \psi \rangle \langle e_n, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

ponieważ $\{W_n\}$ są niezależnymi procesami Wienera. $\square$

16.5 Jądro jednorodnego procesu

Naszym celem jest znalezienie jądra reprodukcyjnego jednorodnego procesu Wienera W . Przypomnijmy, że jego forma kowariancji Q zadana jest wzorem

$$Q(\psi, \varphi) = \langle \mathcal{F}\mu, \psi * \varphi_{(s)} \rangle, \quad \psi, \varphi \in S(\mathbb{R}^d),$$

gdzie μ jest nieujemną symetryczną miarą temperowaną na $\mathbb{R}^d$, a

$$\varphi_{(s)}(x) = \varphi(-x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \psi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Dla $\varphi \in S(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ przyjmujemy

$$\varphi_{(s)}(x) = \overline{\varphi(-x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Niech

$$L^2_{(s)}(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C}) = \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C}) : \psi = \psi_{(s)} \}.$$

Zauważmy, że $L^2_{(s)}(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych oraz jest domkniętą podprzestrzenią $L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$.

Uwaga. Zauważmy, że dla dowolnego $\psi \in L^2_{(s)}(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$, $\psi\mu \in S'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$. Ponadto $\mathcal{F}(\psi\mu) \in S'(\mathbb{R}^d)$. Istotnie ponieważ μ jest miarą temperowaną istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-n} \mu(d\xi) < \infty.$$

Teraz $\psi\mu$ jest miarą temperowaną i jako taka należy do $S'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ bo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-n/2} |\psi(\xi)| \mu(d\xi) \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)|^2 \mu(d\xi) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-n} \mu(d\xi) \right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

Aby pokazać, że $\mathcal{F}(\psi\mu)$ przyjmuje wartości rzeczywiste wystarczy pokazać, że $\overline{\mathcal{F}(\psi\mu)} = \mathcal{F}(\psi\mu)$. Wynika to z własności $\overline{\psi(\eta)} = \psi(-\eta)$ oraz $\mu(d\eta) = \mu(-d\eta)$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}(\psi\mu)(\xi)} &= \overline{(2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\eta} \psi(\eta) \mu(d\eta)} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\eta} \overline{\psi(\eta)} \mu(d\eta) \\
&= \mathcal{F}(\psi\mu)(\xi).
\end{aligned}$$

Twierdzenie 16.4 *Niech W będzie jednorodnym procesem Wienera w $S'(\mathbb{R}^d)$ z miarą spektralną μ . Wówczas jądro reprodukcyjne $\mathcal{H}_W$ procesu W dane jest wzorem*

$$\mathcal{H}_W = \left\{ \mathcal{F}(\psi\mu) : \psi \in L^2_{(s)}(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C}) \right\} \quad (16.9)$$

a iloczyn skalarny

$$\langle \mathcal{F}(\psi\mu), \mathcal{F}(\varphi\mu) \rangle_{\mathcal{H}_W} = \langle \psi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) \overline{\varphi(\xi)} \mu(d\xi). \quad (16.10)$$

Dowód. Z Twierdzenia 16.2,

$$\mathcal{H}_W = \left\{ \zeta \in S'(\mathbb{R}^d) : \exists C < \infty : \forall \psi \in S(\mathbb{R}^d) \quad |\langle \zeta, \psi \rangle|^2 \leq C \langle \mathcal{F}\mu, \psi * \psi_{(s)} \rangle \right\}.$$

Założmy, że $\zeta \in \mathcal{H}_W$. Wówczas

$$\langle \zeta, \psi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}\zeta, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle$$

oraz

$$\langle \mathcal{F}\mu, \psi * \psi_{(s)} \rangle = \langle \mu, \mathcal{F}^{-1}(\psi * \psi_{(s)}) \rangle = \langle \mu, \mathcal{F}^{-1}\psi \overline{\mathcal{F}^{-1}\psi} \rangle$$

bo $\mathcal{F}^{-1}\psi_{(s)} = \overline{\mathcal{F}^{-1}\psi}$. Tak więc

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}\zeta, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}\psi(\xi) \overline{\mathcal{F}^{-1}\psi(\xi)} \mu(d\xi).$$

Ponieważ

$$\mathcal{F}^{-1} : S(\mathbb{R}^d) \rightarrow S_{(s)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) = \{ \psi \in S(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) : \psi_{(s)} = \psi \}$$

jest bijekcją otrzymujemy

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}\zeta, \psi \rangle|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)|^2 \mu(d\xi), \quad \forall \psi \in S_{(s)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}).$$

Ponieważ $S_{(s)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ jest gęste w $L^2_{(s)}(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$, $\mathcal{F}^{-1}\zeta$ rozszerza się na całą przestrzeń $L^2_{(s)}(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$. Istnieje więc $\eta \in L^2_{(s)}(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$, takie że

$$\forall \psi \in S_{(s)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}), \langle \mathcal{F}^{-1}\zeta, \psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})} = \langle \overline{\eta}\mu, \psi \rangle.$$

Stąd $\zeta = \mathcal{F}(\overline{\eta}\mu)$. Ponieważ $\eta \rightarrow \overline{\eta}$ jest bijekcją $L^2_{(s)}(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$ mamy następujący fakt

$$\forall \zeta \in \mathcal{H}_W \exists \psi \in L_{(s)}^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C}), \quad \text{taki że} \quad \zeta = \mathcal{F}(\psi\mu).$$

Dla dowodu (16.9) wystarczy pokazać, że

$$\forall \psi \in L_{(s)}^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C}), \quad \zeta = \mathcal{F}(\psi\mu) \in \mathcal{H}_W. \quad (16.11)$$

Ustalmy więc $\psi \in L_{(s)}^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$. Wówczas dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mamy

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{F}(\psi\mu), \varphi \rangle|^2 &= |\langle \psi\mu, \mathcal{F}\varphi \rangle|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)|^2 \mu(d\xi) \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}\varphi|^2 \mu(d\xi) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)|^2 \mu(d\xi) \langle \Gamma, \varphi * \varphi_{(s)} \rangle, \end{aligned}$$

co dowodzi (16.11). Pozostaje do udowodnienia, że

$$\forall \psi \in L_{(s)}^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C}), \quad |\mathcal{F}(\psi\mu)|_{\mathcal{H}_W}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)|^2 \mu(d\xi). \quad (16.12)$$

W tym celu ustalmy $\psi \in L_{(s)}^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$. Wówczas z (16.4) mamy

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\psi\mu)|_{\mathcal{H}_W}^2 &= \sup_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d); \langle \varphi, \varphi \rangle \neq 0} \frac{|\langle \mathcal{F}(\psi\mu), \varphi \rangle|^2}{\langle \varphi, \varphi \rangle} \\ &= \sup_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d); |\mathcal{F}\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})} \neq 0} \frac{|\langle \mathcal{F}(\psi\mu), \varphi \rangle|^2}{|\mathcal{F}\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})}^2} \\ &= \sup_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d); |\mathcal{F}\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})} \neq 0} \frac{|\langle \mu, \psi \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle|^2}{|\mathcal{F}\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})}^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \langle \mu, \psi \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle &= \langle \psi, \overline{\mathcal{F}^{-1}\varphi} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})} \\ &= \langle \psi, \mathcal{F}\overline{\varphi} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})} \\ &= \langle \psi, \mathcal{F}\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})}, \end{aligned}$$

dla φ o wartościach rzeczywistych, otrzymujemy

$$|\mathcal{F}(\psi\mu)|_{\mathcal{H}_W}^2 = \sup_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d); |\mathcal{F}\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})} \neq 0} \frac{|\langle \psi, \mathcal{F}\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})}|^2}{|\mathcal{F}\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})}^2} = |\psi|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})}^2,$$

co kończy dowód twierdzenia. $\square$

16.6 Uwagi bibliograficzne

Rozdział oparty był na pracy [30]. Proces Wienera o wartościach w przestrzeniach dystrybucyjnych lub ogólnie konuklearnych, jest badany w [1, 16].

Stochastyczne równania ewolucyjne na $\mathbb{R}^d$

Interesować nas będą stochastyczne równania ciepła i falowe.

Równanie ciepła.

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, \xi) &= \Delta X(t, \xi) + f(X(t, \xi)) + g(X(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \\ X(0, \xi) &= x_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (17.1)$$

Równanie falowe.

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t^2}(t, \xi) &= \Delta X(t, \xi) + f(X(t, \xi)) + g(X(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \\ X(0, \xi) &= x_0(\xi), \quad \frac{\partial X}{\partial t}(0, \xi) = y_0(\xi) \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (17.2)$$

W równaniach tych $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami lipschitzowskimi, a W jest jednorodnym, to jest stacjonarnym po ξ procesem Wienera.

Naszym pierwszym krokiem będzie skonstruowanie odpowiedniej przestrzeni stanów. Od przestrzeni stanów będziemy wymagać by, dla równania ciepła operator Laplace'a, a dla równania falowego by operator

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

generował C_0 -półgrupę. Okazuje się, że dla równania ciepła dobrą klasą przestrzeni stanów są przestrzenie $L^2(\mathbb{R}^d; \vartheta(\xi)d\xi)$, czyli przestrzenie z wagą. Dla równania falowego będziemy rozważać przestrzenie typu

$$\begin{pmatrix} L^2(\mathbb{R}^d, \vartheta(\xi)d\xi) \\ H^{-1}(\mathbb{R}^d, \vartheta(\xi)d\xi) \end{pmatrix},$$

gdzie $H^{-1}(\mathbb{R}^d, \vartheta(\xi)d\xi)$ jest odpowiednią przestrzenią Sobolewa ujemnego rzędu z wagą ϑ , a więc podprzestrzeń przestrzeni dystrybucji. Oczywiście wagi nie będą mogły być całkowicie dowolne.

17.1 Równania w przestrzeniach L^2 z wagą

Przyjmijmy oznaczenie $L^2 = L^2(\mathbb{R}^d, d\xi)$. Wiadomo, że

$$S(t)\psi(\xi) = (2\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\xi-\eta|^2}{2t}} \psi(\eta) d\eta, \quad t > 0, \quad \psi \in L^2$$

generuje C_0 -półgrupę na L^2 . Niech

$$\rho_t(\xi) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|\xi-\eta|^2}{2t}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Wówczas

$$S(t)\psi = \rho_t * \psi.$$

Będziemy rozważać dwie rodziny wag.

Wagi wykładnicze. Dla $\rho \in \mathbb{R}$ niech $\vartheta_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ będzie takie, że

- (i) $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \vartheta_\rho(\xi) > 0$ i $\vartheta_\rho(\xi) = \vartheta_\rho(-\xi) > 0$,
- (ii) $\forall \xi : |\xi| \geq 1, \quad \vartheta_\rho(\xi) = e^{-\rho|\xi|}$.

Będziemy również zakładać, że dla wszystkich ρ i ξ zachodzi $\vartheta_{-\rho}(\xi) = (\vartheta_\rho(\xi))^{-1}$. Ponadto, $\vartheta_0(\xi) = 1$ dla $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Niech $L_\rho^2 = L^2(\mathbb{R}^d, \vartheta_\rho(\xi) d\xi)$, $\rho \in \mathbb{R}$. Oczywiście jeżeli $\rho < \rho'$ to przestrzeń L_ρ^2 wkłada się w sposób ciągły w $L_{\rho'}^2$. Ponadto $L^2 = L_0^2$ oraz funkcje stałe należą do dowolnej przestrzeni L_ρ^2 gdzie $\rho > 0$.

Wagi wielomianowe. Dla $\rho \in \mathbb{R}$ niech

$$\theta_\rho(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\rho}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

oraz niech $\mathcal{L}_\rho^2 = L^2(\mathbb{R}^d, \theta_\rho(\xi) d\xi)$. Oczywiście jeżeli $\rho < \rho'$ to $\mathcal{L}_\rho^2$ wkłada się w sposób ciągły w $\mathcal{L}_{\rho'}^2$ oraz $L^2 = \mathcal{L}_0^2$. Zauważmy, że niezerowe funkcje stałe należą do $\mathcal{L}_\rho^2$ wtedy i tylko wtedy gdy $\rho > d/2$.

Lemat 17.1 *Niech $\rho > 0$. Wówczas półgrupa ciepła S ma dokładnie jedno rozszerzenie do C_0 -półgrupy na L_ρ^2 . Jeżeli $\rho \geq 0$ to restrykcja S do L_ρ^2 jest C_0 -półgrupą.*

Dowód. Niech $\rho \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez $C_0(\mathbb{R}^d)$ przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych o zwartym nośniku na $\mathbb{R}^d$. Dla $\psi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ mamy

$$\begin{aligned} |S(t)\psi|_{L_\rho^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |S(t)\psi(\xi)|^2 \vartheta_\rho(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\eta) \rho_t(\xi - \eta) d\eta \right|^2 \vartheta_\rho(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Ponieważ $\rho_t(\xi - \eta) d\eta$ jest miarą probabilistyczną z nierówności Jensena otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|S(t)\psi|_{L_\rho^2}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\eta)|^2 \rho_t(\xi - \eta) d\eta \vartheta_\rho(\xi) d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\eta)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(\xi - \eta) \vartheta_\rho(\xi) d\xi \right) d\eta.
\end{aligned} \tag{17.3}$$

Pokażemy natępujący fakt

$$\begin{aligned}
\forall \rho \in \mathbb{R} \quad \forall T \geq 0 \quad \exists C < \infty : \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^d, \\
\int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(\xi - \eta) \vartheta_\rho(\xi) d\xi \leq C \vartheta_\rho(\eta).
\end{aligned} \tag{17.4}$$

Ustalmy $T \in (0, \infty)$ i $\rho \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że istnieje stała $C_1 < \infty$, taka że

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d, \quad -\rho|\xi| + \rho|\eta| - \frac{|\xi - \eta|^2}{4T} \leq C_1.$$

Oczywiście istnieje stała $C_2 \in (0, \infty)$, taka że

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^d, \quad C_2^{-1} e^{-\rho|\eta|} \leq \vartheta_\rho(\eta) \leq C_2 e^{-\rho|\eta|}.$$

Stąd dla dowolnego $\eta \in \mathbb{R}^d$ oraz $t \in (0, T]$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(\xi - \eta) \vartheta_\rho(\xi) d\xi &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi t)^{-d/2} e^{\left\{ -\rho|\xi| - \frac{|\xi - \eta|^2}{2t} \right\}} d\xi \\
&\leq C_2^2 \vartheta_\rho(\eta) \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi t)^{-d/2} e^{\left\{ -\rho|\xi| + \rho|\eta| - \frac{|\xi - \eta|^2}{2t} \right\}} d\xi \\
&\leq C_2^2 \vartheta_\rho(\eta) \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|\eta - \xi|^2}{4t}} e^{\left\{ -\rho|\xi| + \rho|\eta| - \frac{|\xi - \eta|^2}{4t} \right\}} d\xi \\
&\leq C_2^2 \vartheta_\rho(\eta) \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|\eta - \xi|^2}{4t}} d\xi e^{C_1} \\
&\leq C_2^2 e^{C_1} 2^{d/2} \vartheta_\rho(\eta),
\end{aligned}$$

co dowodzi (17.4). Z (17.3) i (17.4) wynika

$$\begin{aligned}
\forall \rho \in \mathbb{R} \quad \forall T \in [0, \infty) \quad \exists C < \infty : \quad \forall \psi \in C_0(\mathbb{R}^d), \\
|S(t)\psi|_{L_\rho^2}^2 \leq C |\psi|_{L_\rho^2}^2.
\end{aligned} \tag{17.5}$$

Niech $\rho > 0$. Ponieważ $C_0(\mathbb{R}^d)$ jest gęsta w L_ρ^2 , dla dowolnego t , $S(t)$ ma dokładnie jedno ciągłe rozszerzenie do operatora liniowego na L_ρ^2 . Oznaczamy to rozszerzenie również przez $S(t)$. Zauważmy, że rodzina $S = (S(t))$ jest półgrupą. Gdy $\rho \leq 0$ to z (17.5) wynika, że restrykcja S do L_ρ^2 jest półgrupą. Pozostaje do wykazania, że S jest C_0 w L_ρ^2 . W tym celu zauważmy, że z (17.5) wynika

$$\forall \rho \in \mathbb{R} \quad \forall T \in [0, \infty), \quad \sup_{t \in [0, T]} \|S(t)\|_{L(L_\rho^2, L_\rho^2)} < \infty. \tag{17.6}$$

Założmy, że $\rho > 0$. Wówczas

$$\forall \psi \in L^2, \quad |S(t)\psi - \psi|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow 0.$$

Stąd ponieważ L_ρ^2 -norma jest słabsza od L^2 -normy otrzymujemy

$$\forall \psi \in L^2, \quad |S(t)\psi - \psi|_{L_\rho^2} \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow 0. \quad (17.7)$$

Ponieważ L^2 jest gęsta w L_ρ^2 oraz zachodzą (17.6) i (17.7), z twierdzenia Banacha–Steinhausa wnioskujemy, że

$$\forall \psi \in L_\rho^2, \quad |S(t)\psi - \psi|_{L_\rho^2} \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow 0,$$

co jest dokładnie warunkiem na to aby S była C_0 na L_ρ^2 . Jeżeli $\rho < 0$ to własność C_0 wynika z prostego argumentu opartego na dualności. Mianowicie

$$L_\rho^2 \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow L_{-\rho}^2.$$

Przy utożsamieniu $(L^2)^* = L^2$ otrzymujemy $(L_{-\rho}^2)^* = L_\rho^2$. Ponieważ, S jest C_0 na $L_{-\rho}^2$, półgrupa dualna S^* jest C_0 na przestrzeni dualnej, to jest L_ρ^2 . Ponieważ dualność jest zadana przez iloczyn skalarny na L^2 , gdzie S jest samosprężona, otrzymujemy mocną ciągłość S na L_ρ^2 . $\square$

Dla wag typu wielomianowego mamy analogon Lematu 17.1.

Lemat 17.2 *Niech $\rho > 0$. Wówczas półgrupa ciepła S na dokładnie jedno rozszerzenie do C_0 -półgrupy na $\mathcal{L}_\rho^2$. Jeżeli $\rho \geq 0$ to restrykcja S do $\mathcal{L}_\rho^2$ jest C_0 -półgrupą.*

Dowód. Dowód oparty jest na tym samym pomysle co dowód Lematu 17.1. Należy jedynie wykazać następującą elementarną nierówność

$$\forall \rho \in \mathbb{R} \quad \forall T \in [0, \infty) \exists C < \infty : \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^d, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(\xi - \eta) \theta_\rho(\xi) d\xi \leq C \theta_\rho(\eta).$$

Jej dowód zostawiamy czytelnikowi. $\square$

Uwaga. Lematy 17.1 i 17.2 można uogólnić na dowolny jednostajnie eliptyczny operator

$$A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha},$$

ze współczynnikami $a_\alpha \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Przypomnijmy, że A jest jednostajnie eliptyczny gdy istnieje stała $\delta > 0$, taka że

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(\xi) v^\alpha \geq \delta |v|^{2m}.$$

Rozumowanie oparte jest na klasycznych oszacowaniach Aronsona na jądro G półgrupy generowanej przez A . Mianowicie istnieje $G \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, takie że

$$\forall t > 0 \forall \psi \in L^2 \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad S(t)\psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t, \xi, \eta) \psi(\eta) d\eta$$

oraz dla dowolnego $T < \infty$ istnieje stała $c \in (0, \infty)$, taka że

$$\forall t \in (0, T] \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d, \quad |G(t, \xi, \eta)| \leq ct^{-d/(2m)} e^{\left\{ -\left(\frac{|\xi - \eta|^{2m}}{t} \right)^{1/(2m-1)} \right\}}.$$

Mając to oszacowanie możemy argumentować jak w dowodzie Lematu 17.1.

Uwaga. Można pokazać, patrz [10], że operator A rzędu drugiego generuje C_0 -półgrupę na przestrzeni z wagą $L^2(\mathbb{R}^d, \vartheta(\xi)d\xi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists C < \infty : \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad A^* \vartheta(\xi) \leq C \vartheta(\xi).$$

Stąd wynika, że wagi typu $\xi \rightarrow e^{|\xi|^2}$ lub $\xi \rightarrow e^{-|\xi|^2}$ nie są dopuszczalne.

Dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ niech N_f będzie operatorem Nemytskiego odpowiadającym f , to znaczy

$$N_f(\psi)(\xi) = f(\psi(\xi)), \quad \psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Definicja 17.1 Niech $\rho \in \mathbb{R}$. Mówimy, że N_f jest lipschitzowskie o wzroście liniowym na L_ρ^2 wtedy i tylko wtedy gdy N_f przeprowadza L_ρ^2 w siebie oraz istnieje stała L taka, że dla wszystkich $\psi, \varphi \in L_\rho^2$,

$$\begin{aligned} |N_f(\psi) - N_f(\varphi)|_{L_\rho^2} &\leq L |\psi - \varphi|_{L_\rho^2}, \\ |N_f(\psi)|_{L_\rho^2} &\leq L (1 + |\psi|_{L_\rho^2}). \end{aligned}$$

Lemat 17.3 Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską. Niech N_f będzie operatorem Nemytskiego odpowiadającym f . Dla $\rho > 0$, N_f jest odwzorowaniem lipschitzowskim o wzroście liniowym na L_ρ^2 . Gdy $\rho \leq 0$ to N_f jest lipschitzowskie o wzroście liniowym na L_ρ^2 wtedy i tylko wtedy gdy $f(0) = 0$.

Dowód. Załóżmy, że $\rho > 0$. Niech $l < \infty$ będzie takie, że dla wszystkich $u, v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)| &\leq l |u - v|, \\ |f(u)| &\leq L (1 + |u|). \end{aligned}$$

Wówczas dla dowolnej funkcji $\psi \in L_\rho^2$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |N_f(\psi)(\xi)|^2 \vartheta_\rho(\xi) d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} l^2 (1 + |\psi(\xi)|)^2 \vartheta_\rho(\xi) d\xi < \infty$$

bo funkcje stałe należą do L_ρ^2 . Tak więc N_f przeprowadza L_ρ^2 w siebie. Ponadto

$$|N_f(\psi)|_{L_\rho^2}^2 \leq l^2 2 \left(1 + \int_{\mathbb{R}^d} \vartheta_\rho(\xi) d\xi\right) \left(1 + |\psi|_{L_\rho^2}\right)^2.$$

Podobnie dla $\psi, \varphi \in L_\rho^2$ mamy

$$|N_f(\psi) - N_f(\varphi)|_{L_\rho^2}^2 \leq l^2 |\psi - \varphi|_{L_\rho^2}^2.$$

Stąd N_f jest lipschitzowski o wzroście liniowym na L_ρ^2 .

Założmy teraz, że $\rho \leq 0$. Wówczas w ogólności N_f nie musi przeprowadzać L_ρ^2 w siebie, bo funkcje stałe nie należą do L_ρ^2 . Jeżeli $f(0) \neq 0$ to dla $\psi = 0$, $N_f(\psi) = f(0)$ jest niezerową funkcją stałą, więc $N_f(\psi) \notin L_\rho^2$. Gdy $f(0) = 0$ to z warunku lipschitza f mamy

$$|f(v)| = |f(v) - f(0)| \leq l|v|.$$

Z tego natychmiast wynika, że N_f przeprowadza L_ρ^2 w siebie. Lipschitzowskość i wzrost liniowy N_f pokazuje się całkowicie elementarnie. $\square$

Odpowiednikiem Lematu 17.3 dla rodziny $\mathcal{L}_\rho^2$ jest następujący fakt, którego dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Lemat 17.4 *Założmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską. Dla $\rho > d/2$, N_f jest odwzorowaniem lipschitzowskim o wzroście liniowym na $\mathcal{L}_\rho^2$. Gdy $\rho \leq d/2$ to N_f jest lipschitzowskie o wzroście liniowym na $\mathcal{L}_\rho^2$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(0) = 0$.*

17.2 Stochastyczne równania ciepła

W tym podrozdziale przedstawimy rezultaty dotyczące równania (17.1). Przypomnijmy, że W jest jednorodnym procesem Wienera na $\mathbb{R}^d$ z miarą spektralną μ . Równanie (17.1) interpretujemy jako abstrakcyjne stochastyczne równanie ewolucyjne

$$dX = (AX + F(X)) dt + G(X) dW$$

na przestrzeni Hilberta $H = L_\rho^2$ z A będącym generatorem półgrupy ciepła S na L_ρ^2 , z $F = N_f$ i

$$G(\psi)\varphi[\xi] = N_g(\psi)(\xi)\varphi(\xi),$$

gdzie $\psi \in L_\rho^2$ oraz φ należy do jądra reprodukcyjnego $\mathcal{H}_W$ procesu W .

Twierdzenie 17.1 *Założmy, że $\Gamma = \mathcal{F}\mu$ jest miarą oddzieloną od $-\infty$, to znaczy, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że $\Gamma(d\xi) + Cd\xi$ jest miarą nieujemną oraz*

$$\begin{cases} \int_{\{|z| \leq 1\}} \log(|z|^{-1}) d\Gamma(z) < \infty & \text{gdy } d = 2, \\ \int_{\{|z| \leq 1\}} |z|^{-d+2} d\Gamma(z) < \infty & \text{gdy } d \neq 2. \end{cases} \quad (17.8)$$

Załóżmy również, że funkcje f i g są lipschitzowskie. Niech $\rho \geq 0$. Wówczas dla dowolnego $x_0 \in L_\rho^2$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (17.1) w L_ρ^2 . Jeżeli $\rho \leq 0$ i $f(0) = 0 = g(0)$, to dla dowolnego $x_0 \in L_\rho^2$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie (17.1) w L_ρ^2 .

Uwaga. Ponieważ Γ jest miarą skończoną na kuli jednostkowej, warunek (17.8) jest spełniony dla $d = 1$.

Dowód. Z Lematów 17.1 wnioskujemy, że półgrupa ciepła jest C_0 -półgrupą na L_ρ^2 . Z Lematu 17.3 wnioskujemy, że operatory Nemytskiego N_f i N_g są lipschitzowskie i o wzroście liniowym na L_ρ^2 . W szczególności warunek (F) ogólnego twierdzenia o istnieniu jest spełniony. Musimy więc sprawdzić warunek (G) na współczynnik dyfuzji. Mamy wykazać, że dla ψ z gęstego zbioru $H_0 \subset L_\rho^2$, $S(t)G(\psi) \in L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, L_\rho^2)$. Ponadto, że istnieje funkcja $a \in L_{loc}^2(0, \infty; \mathbb{R})$, taka że

$$\begin{aligned} \|S(t)G(\psi)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, L_\rho^2)} &\leq a(t) \left(1 + |\psi|_{L_\rho^2}\right), \\ \|S(t)(G(\psi) - G(\phi))\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, L_\rho^2)} &\leq a(t) |\psi - \phi|_{L_\rho^2}, \end{aligned}$$

dla $t \in (0, \infty)$ oraz $\psi, \phi \in H_0$. Jako H_0 weźmiemy $S(\mathbb{R}^d)$. Niech

$$M_t(\psi)\varphi = S(t)(\psi\varphi).$$

Zauważmy, że ponieważ $N_g : L_\rho^2 \rightarrow L_\rho^2$ jest lipschitzowskie i ma wzrost liniowy oraz

$$S(t)G(\psi)\varphi = M_t(N_g(\psi))\varphi$$

wystarczy pokazać, że dla dowolnego $t > 0$, M_t jest ciągłym operatorem liniowym z L_ρ^2 w przestrzeń $L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, L_\rho^2)$ oraz, że

$$\int_0^T \|M_t\|_{L(L_\rho^2, L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, L_\rho^2))}^2 dt < \infty, \quad \forall T < \infty \quad (17.9)$$

Zauważmy, że wtedy jako funkcję a możemy wziąć $\|M_t\|_{L(L_\rho^2, L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, L_\rho^2))}$ mnożone przez stałą lipschitza odwzorowania N_g .

Aby wykazać (17.8) weźmy $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$, $t > 0$ oraz ortonormalną bazę $\{e_n\}$ przestrzeni $\mathcal{H}_W$. Z postaci $\mathcal{H}_W$ wynika, że możemy założyć, że $\{e_n\} \subset C_b(\mathbb{R}^d)$. Istotnie $e_n = \mathcal{F}(u_n\mu)$ gdzie $\{u_n\}$ jest ortonormalną bazą $L_{(s)}^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$. Biorąc $\{u_n\} \subset S(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ otrzymamy $\{e_n\} \subset C_b(\mathbb{R}^d)$. Tak więc $\psi e_n \in L_\rho^2$ dla dowolnych $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$ i n . W szczególności $S(t)(\psi e_n)$ jest dobrze określone i należy do L_ρ^2 dla dowolnych ψ , t i n . Mamy

$$\begin{aligned} \sum_n |M_t(\psi)e_n|_{L_\rho^2}^2 &= \sum_n |S(t)(\psi e_n)|_{L_\rho^2}^2 \\ &= \sum_n \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(\xi - \eta) \psi(\eta) e_n(\eta) d\eta \right|^2 \vartheta_\rho(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że dla dowolnego procesu W w $S'(\mathbb{R}^d)$ o formie kowariancji Q zachodzi

$$Q(\psi, \psi) = \sum_n \langle e_n, \psi \rangle^2, \quad \psi \in S(\mathbb{R}^d),$$

gdzie $\{e_n\}$ jest dowolną ortonormalną bazą jądra reprodukcyjnego W . Tak więc

$$\begin{aligned} \sum_n \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(\xi - \eta) \psi(\eta) e_n(\eta) d\eta \right|^2 &= \sum_n \langle e_n, \rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot) \rangle^2 \\ &= Q(\rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot), \rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot)) \\ &= \langle \Gamma, \rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot) * (\rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot))_{(s)} \rangle. \end{aligned}$$

Niech C będzie, takie że

$$\tilde{I}(d\eta) =: \Gamma(d\eta) + C d\eta$$

jest miarą nieujemną. Z nierówności

$$\langle d\eta, \phi * \phi_{(s)} \rangle \geq 0, \quad \forall \phi$$

otrzymujemy

$$\langle \Gamma, \rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot) * (\rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot))_{(s)} \rangle \leq \langle \tilde{I}, \rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot) * (\rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot))_{(s)} \rangle.$$

Tak więc

$$\sum_n |M_t(\psi) e_n|_{L_\rho^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \tilde{I}, \rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot) * (\rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot))_{(s)} \right\rangle \vartheta_\rho(\xi) d\xi.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} &\rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot) * (\rho_t(\xi - \cdot) \psi(\cdot))_{(s)}(\eta) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(\xi - \eta + \kappa) \psi(\eta - \kappa) \rho_t(\xi + \kappa) \psi(-\kappa) d\kappa, \end{aligned}$$

mamy

$$\begin{aligned} &\sum_n |M_t(\psi) e_n|_{L_\rho^2}^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(\xi - \eta + \kappa) \psi(\eta - \kappa) \rho_t(\xi + \kappa) \psi(-\kappa) \vartheta_\rho(\xi) \tilde{I}(d\eta) d\kappa d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\eta + \xi - r)| |\psi(\xi - r)| \vartheta_\rho(\xi) d\xi \rho_t(r - \eta) \rho_t(r) \tilde{I}(d\eta) dr. \end{aligned}$$

Zauważmy, że istnieje zależna od ρ stała c_1 , taka że dla wszystkich $\eta, u \in \mathbb{R}^d$,

$$\vartheta_\rho(\eta - u) \leq \vartheta_\rho(u) c_1 e^{|\rho||\eta|}.$$

Tak więc z nierówności Schwarz'a mamy

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\eta + \xi - r)| |\psi(\xi - r)| \vartheta_\rho(\xi) d\xi \\
& \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\eta + \xi - r)|^2 \vartheta_\rho(\xi) d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi - r)|^2 \vartheta_\rho(\xi) d\xi \right)^{1/2} \\
& \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(u)|^2 \vartheta_\rho(\eta + r - u) du \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(u)|^2 \vartheta_\rho(u + r) du \right)^{1/2} \\
& \leq |\psi|_{L_\rho^2}^2 c_1^2 e^{2^{-1}|\rho||r-\eta|+2^{-1}|\rho||r|} \\
& \leq |\psi|_{L_\rho^2}^2 c_1^2 e^{2^1|\rho|(|r-\eta|+|r|)}.
\end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\sum_n |M_t(\psi) e_n|_{L_\rho^2}^2 \leq c_1^2 |\psi|_{L_\rho^2}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2^{-1}|\rho|(|r-\eta|+|r|)} \rho_t(r-\eta) \rho_t(r) \tilde{\Gamma}(d\eta) dr.$$

Korzystając teraz, że dla dowolnych t, u i ρ ,

$$-\frac{|u|^2}{2t} + \frac{|\rho||u|}{2} = -\frac{|u|^2}{4t} + \left(-\frac{|u|}{4t} + \frac{|\rho||u|}{2} \right) \leq -\frac{|u|^2}{4t} + \frac{t\rho^2}{4}.$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2^{-1}|\rho|(|r-\eta|+|r|)} \rho_t(r-\eta) \rho_t(r) \tilde{\Gamma}(d\eta) dr \\
& \leq 2^d e^{\frac{t\rho^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{2t}(r-\eta) \rho_{2t}(r) \tilde{\Gamma}(d\eta) dr.
\end{aligned}$$

Z półgrupowości S wynika, że

$$\rho_{2t} * \rho_{2t} = \rho_{4t}.$$

Tak więc mamy oszacowanie

$$\sum_n |M_t(\psi) e_n|_{L_\rho^2}^2 \leq 2^d c_1^2 e^{\frac{t\rho^2}{2}} |\psi|_{L_\rho^2}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{4t}(\eta) \tilde{\Gamma}(d\eta).$$

Aby pokazać (17.9) wystarczy więc udowodnić, że założenie (17.8) pociąga

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{4t}(\eta) \tilde{\Gamma}(d\eta) dt < \infty.$$

W tym celu należy oszacować

$$K(T, d, \eta) =: \int_0^T \rho_{4t}(\eta) dt.$$

Z lematu poniżej wynika, że $K(T, d, \eta)$ maleje do zera w nieskończoności szybciej niż $|\eta|^{-m}$ dla dowolnego m . Ponieważ Γ jest miarą i jako transformata Fouriera dystrybucji temperowanej jest też miarą temperowaną. Tak więc tylko z założenia, że Γ jest miarą wynika

$$\int_{\{|\eta| \geq 1\}} K(T, d, \eta) \tilde{\Gamma}(d\eta) < \infty.$$

Wystarczy więc pokazać, że z (17.8) wynika

$$\int_{\{|\eta| \leq 1\}} K(T, d, \eta) \tilde{\Gamma}(d\eta) < \infty. \quad (17.10)$$

Gdy $d = 1$, to z Lematu 17.5 poniżej wynika, że $K(T, 1, \cdot)$ jest funkcją ograniczoną na odcinku $[-1, 1]$. Tak więc zachodzi (17.10). Gdy $d = 2$, to z Lematu 17.4 (iii),

$$K(T, 2, \eta) \leq C \log(|\eta|^{-1}).$$

Tak więc (17.10) wynika z (17.8) i z faktu, że

$$\int_{\{|\eta| \leq 1\}} \log(|\eta|^{-1}) d\eta < \infty.$$

Gdy $d > 2$, to z Lematu 17.4(iv),

$$K(T, 2, \eta) \leq C|\eta|^{2-d}.$$

Tak więc znowu (17.10) wynika z (17.8) oraz z faktu, że

$$\int_{\{|\eta| \leq 1\}} |\eta|^{2-d} d\eta < \infty.$$

□

Niech $T > 0$, $\alpha > 0$. Dla $r \geq 0$ połóżmy

$$\kappa(\alpha, T, r) = \int_0^T t^{-\alpha} e^{-r/t} dt.$$

Lemat 17.5 (i) dla $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $T > 0$, $r^n \kappa(\alpha, T, r) \rightarrow 0$ gdy $r \rightarrow \infty$,
(ii) gdy $\alpha \in [0, 1)$, to $\kappa(\alpha, T, \cdot)$ jest funkcją ograniczoną,
(iii) istnieją stałe $C_1, C_2 \in (0, \infty)$ takie, że dla każdego $r \in (0, 1]$,

$$C_1 \log(|r|^{-1}) \leq \kappa(1, T, r) \leq C_2 \log(|r|^{-1}),$$

(iv) gdy $\alpha > 1$, to istnieją stałe $C_1, C_2 \in (0, \infty)$ takie, że dla każdego $r \in (0, 1]$,

$$C_1 |r|^{1-\alpha} \leq \kappa(\alpha, T, r) \leq C_2 |r|^{1-\alpha}.$$

Dowód. Po zamianie zmiennych $s = t/r$ otrzymujemy

$$\kappa(\alpha, T, r) = r^{1-\alpha} \int_0^{T/r} t^{-\alpha} e^{-1/t} dt.$$

Tak więc (i) wynika z tego, że

$$\lim_{x \downarrow 0} x^{-m} \int_0^x t^{-\alpha} e^{-1/t} dt = 0, \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Gdy $\alpha \in (0, 1)$ to

$$\kappa(\alpha, T, r) \leq \int_0^T t^{-\alpha} dt < \infty,$$

co dowodzi (ii).

Niech $\alpha = 1$. Wówczas (iii) wynika z

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^{-1} e^{-1/t} dt}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-1} e^{-1/x}}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = 1.$$

W końcu, (iv) wynika z

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1} \int_0^x t^{-\alpha} e^{-1/t} dt}{x^{\alpha-1}} = \int_0^\infty t^{-\alpha} e^{-1/t} dt \in (0, \infty).$$

□

Uwaga. Jako zadanie pozostawiamy pokazanie, że jeżeli Γ jest miarą oddzieloną od $-\infty$ to warunek (17.8) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{1 + |\xi|^2} < \infty. \quad (17.11)$$

Uwaga. Z powyższej uwagi wynika, że transformata Fouriera miary spełniającej (17.10) nie musi być miarą oddzieloną od zera. Przykładem jest miara μ na $\mathbb{R}$ zadana wzorem

$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^\alpha (\delta_{-n} + \delta_n),$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$.

17.3 Uwagi bibliograficzne

Rozdział oparty był na pracy [29]. Więcej o równaniach parabolicznych z szu-
mem jednorodnym można znaleźć w [3, 4, 10, 17, 18, 19, 21, 27, 28, 29, 30, 31].
Praca [28] jest pracą przeglądową na temat równań na całej przestrzeni.

Stochastyczne równanie falowe na $\mathbb{R}^d$

Naszym celem jest badanie istnienia rozwiązań stochastycznego równania falowego

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(t, \xi) = \Delta X(t, \xi) + f(X(t, \xi)) + g(X(t, \xi)) \frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi), \\ \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \\ X(0, \xi) = x_0(\xi), \quad \frac{\partial X}{\partial t}(0, \xi) = y_0(\xi) \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (18.1)$$

w którym $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami lipschitzowskimi, a W jest jednorodnym, to jest stacjonarnym po ξ procesem Wienera.

Tak jak dla równania ciepła naszym pierwszym krokiem będzie skonstruowanie odpowiedniej przestrzeni stanów. Przypomnijmy, że $\{\vartheta_\rho\}$ to rodzina wag wykładniczych. Dla $r \in \mathbb{R}$ niech H_ρ^r będzie uzupełnieniem $S(\mathbb{R}^d)$ do przestrzeni zupełnej ze względu na normę

$$|\psi|_{H_\rho^r}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^r |\mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} \psi)(\xi)|^2 d\xi.$$

Oczywiście H_ρ^r jest przestrzenią Hilberta. Niech

$$\mathcal{H}_\rho =: \left(\begin{array}{c} L_\rho^2 \\ H_\rho^{-2} \end{array} \right)$$

oraz niech

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{array} \right), \quad D(A) = \left(\begin{array}{c} H_\rho^1 \\ L_\rho^2 \end{array} \right). \quad (18.2)$$

Lemat 18.1 *Niech $\rho \in \mathbb{R}$. Wówczas $(A, D(A))$ generuje C_0 -półgrupę S na $\mathcal{H}_\rho$.*

Dowód. Gdy $\rho = 0$ to rezultat wynika z twierdzenia Lumiera–Philipsa, w taki sam sposób jak dla równania falowego na odcinku $[0, 1]$. Niech teraz $\rho \neq 0$. Rozważmy izometryczny izomorfizm przestrzeni $\mathcal{H}_\rho$ i $\mathcal{H}$ dany wzorem

$$j \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta_\rho^{1/2} \psi \\ \vartheta_\rho^{1/2} \varphi \end{pmatrix}.$$

Niech teraz S będzie C_0 -półgrupą generowaną przez A na $\mathcal{H}_0$. Niech $\tilde{S}(t) = j^{-1}S(t)j$, $t \geq 0$. Oczywiście $\tilde{S}$ jest C_0 -półgrupą na $\mathcal{H}_\rho$. Jej generator wynosi

$$\tilde{A} = j^{-1}Aj = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \vartheta_\rho^{-1/2} \Delta \vartheta_\rho^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

z dziedziną

$$D(\tilde{A}) = \{v : jv \in D(A)\} = \begin{pmatrix} H_\rho^1 \\ L_\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Więc dziedzina $\tilde{A}$ jest równa dziedzinie A rozważanej na $\mathcal{H}_\rho$. Zauważmy, że dla dowolnej funkcji ψ ,

$$\vartheta_\rho^{-1/2} \Delta \vartheta_\rho^{1/2} \psi = \Delta \psi + \sum_{j=1}^d \vartheta_\rho^{-1/2} \frac{\partial \vartheta_\rho}{\partial \xi_j} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} + \left(\vartheta_\rho^{-1/2} \Delta \vartheta_\rho^{1/2} \right) \psi$$

Ponieważ funkcje

$$\vartheta_\rho^{-1/2} \frac{\partial \vartheta_\rho}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \dots, d \quad \text{oraz} \quad \vartheta_\rho^{-1/2} \Delta \vartheta_\rho^{1/2}$$

są klasy $C_b(\mathbb{R}^d)$ mamy

$$\vartheta_\rho^{-1/2} \Delta \vartheta_\rho^{1/2} \psi = \Delta \psi + B\psi,$$

gdzie B jest operatorem różniczkowym rzędu pierwszego o współczynnikach klasy $C_b(\mathbb{R}^d)$. Tak więc

$$\tilde{A} = A + \mathcal{B},$$

gdzie

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{B}$ jest ograniczonym operatorem na $\mathcal{H}_\rho$. Tak więc A jest generatorem C_0 -półgrupy na $\mathcal{H}_\rho$ jako ograniczona perturbacja generatora $\tilde{A}$. $\square$

Dla wag typu wielomianowego mamy analogon Lematu 18.1. Mianowicie niech K_ρ^r będzie uzupełnieniem $S(\mathbb{R}^d)$ do przestrzeni Hilberta ze względu na normę

$$|\psi|_{K_\rho^r}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^r |\mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} \psi)(\xi)|^2 d\xi.$$

Niech

$$\mathcal{K}_\rho =: \begin{pmatrix} \mathcal{L}_\rho^2 \\ K_\rho^{-2} \end{pmatrix}$$

oraz niech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad D(A) = \begin{pmatrix} K_\rho^1 \\ \mathcal{L}_\rho^2 \end{pmatrix}. \quad (18.3)$$

Lemat 18.2 *Niech $\rho \in \mathbb{R}$. Wówczas $(A, D(A))$ generuje C_0 -półgrupę S na $\mathcal{H}_\rho$.*

Dowód Lematu 18.2 podobnie jak Lematu 18.3 poniżej pozostawiamy czytelnikowi. Dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ niech

$$\mathcal{N}_f \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_f \psi \end{pmatrix}.$$

Lemat 18.3 *Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską. Dla $\rho > 0$, $\mathcal{N}_f$ jest odwzorowaniem lipschitzowskim o wzroście liniowym na $\mathcal{H}_\rho$. Gdy $\rho \leq 0$ to $\mathcal{N}_f$ jest lipschitzowskie o wzroście liniowym na $\mathcal{H}_\rho$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(0) = 0$.*

Podobny rezultat mamy dla wag wielomianowych.

Lemat 18.4 *Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską. Dla $\rho > d/2$, $\mathcal{N}_f$ jest odwzorowaniem lipschitzowskim o wzroście liniowym na $\mathcal{H}_\rho$. Gdy $\rho \leq d/2$ to $\mathcal{N}_f$ jest lipschitzowskie o wzroście liniowym na $\mathcal{H}_\rho$, wtedy i tylko wtedy gdy $f(0) = 0$.*

18.1 Istnienie i jedyność rozwiązań

W tym podrozdziale przedstawimy rezultaty dotyczące równania (18.1). Przypomnijmy, że W jest jednorodnym procesem Wienera na $\mathbb{R}^d$ z miarą spektralną μ . Równanie (18.1) interpretujemy jako abstrakcyjne stochastyczne równanie ewolucyjne

$$dX = (AX + F(X)) dt + G(X) dW$$

na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_\rho$ z A danym wzorem (18.2), $F = \mathcal{N}_f$ i

$$G(u)\varphi[\xi] = \mathcal{N}_g(u)(\xi)\varphi(\xi),$$

gdzie $u \in \mathcal{H}_\rho$ oraz φ należy do jądra reprodukcyjnego $\mathcal{H}_W$ procesu W .

Twierdzenie 18.1 *Załóżmy, że miara spektralna μ procesu Wienera spełnia warunek całkowity*

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{1 + |\xi + \eta|^2} < \infty. \quad (18.4)$$

Załóżmy również, że funkcje f i g są lipschitzowskie. Niech $\rho \geq 0$. Wówczas dla dowolnego $z_0 \in \mathcal{H}_\rho$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (18.1) w $\mathcal{H}_\rho$. Jeżeli $\rho \leq 0$ i $f(0) = 0 = g(0)$, to dla dowolnego $z_0 \in \mathcal{H}_\rho$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie (18.1) w $\mathcal{H}_\rho$.

Dowód. Z Lematu 18.1 wnioskujemy, że A generuje C_0 -półgrupę na $\mathcal{H}_\rho$. Z Lematu 18.3 wynika, że $\mathcal{N}_f$ i $\mathcal{N}_g$ są Lipschitzowskie. Ponieważ

$$G = \mathcal{M}\mathcal{N}_g,$$

gdzie

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi\phi \end{pmatrix}$$

wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{M} : \phi \rightarrow M_\phi \text{ jest ograniczonym operatorem z } L_\rho^2 \text{ w } L_{(HS)}(\mathcal{H}_W, H_\rho^{-1}).$$

Ustalmy $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ oraz ortonormalną bazę $\{e_n\}$ przestrzeni $L_{(s)}^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$. Wówczas $\{\mathcal{F}(e_k\mu)\}$ jest ortonormalną bazą $\mathcal{H}_W$. Mamy

$$\begin{aligned} \sum_k |M_\phi \mathcal{F}(e_k\mu)|_{H_\rho^{-1}}^2 &= \sum_k \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-1} |\mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} \phi \mathcal{F}(e_k\mu))(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-1} \left(\sum_k |\mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} \phi \mathcal{F}(e_k\mu))(\xi)|^2 \right) d\xi. \end{aligned}$$

Ponieważ transformata Fouriera przeprowadza iloczyny w sploty, a $\{e_k\}$ jest ciągiem ortonormalnym w $L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{C})$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_k |\mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} \phi \mathcal{F}(e_k\mu))(\xi)|^2 &= \sum_k \left| \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} u)(\xi - \eta) e_k(\eta) d\mu(\eta) \right|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} u)(\xi - \eta)|^2 d\mu(\eta). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sum_k |M_\phi[\mathcal{F}(e_k\mu)]|_{H_\rho^{-1}}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} \phi)(\xi - \eta)|^2 d\mu(\eta) d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi + \eta|^2)^{-1} |\mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} \phi)(\xi)|^2 d\mu(\eta) d\xi \\ &\leq \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(z)}{1 + |\xi + \eta|^2} \right) \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}(\vartheta_\rho^{1/2} \phi)(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq |\phi|_{L_\rho^2}^2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(\eta)}{1 + |\xi + \eta|^2}. \end{aligned}$$

□

Uwaga. Przy założeniu, że $\Gamma = \mathcal{F}(\mu)$ jest miarą oddzieloną od $-\infty$, warunek (18.3) jest równoważny każdemu z następujących warunków

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(z)}{1 + |z|^2} < \infty,$$

$$\begin{cases} \int_{\{|z| \leq 1\}} \log(|z|^{-1}) d\Gamma(z) < \infty & \text{gdy } d = 2, \\ \int_{\{|z| \leq 1\}} |z|^{-d+2} d\Gamma(z) < \infty & \text{gdy } d \neq 2. \end{cases}$$

18.2 Uwagi bibliograficzne

Rozdział oparty był na pracy [27]. Więcej o równaniach parabolicznych z szu-
mem jednorodnym można znaleźć w [6, 7, 17, 18, 27, 28, 29, 31].

Dodatek - Operatory Hilberta–Schmidta i nuklearne

19.1 Operatory Hilberta–Schmidta

Niech U i H będą przestrzeniami Hilberta. Operator liniowy $G : U \rightarrow H$ jest *operatorem Hilberta–Schmidta*, piszemy wtedy $G \in L_{(HS)}(U, H)$, gdy

$$\|G\|_{L_{(HS)}(U, H)}^2 := \sum_j |Gf_j|_H^2 < \infty$$

dla pewnej bazy ortonormalnej $\{f_j\}$ przestrzeni U . Niech $\{e_j\}$ będzie bazą ortonormalną H . Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sum_j |Gf_j|_H^2 &= \sum_{j,k} \langle Gf_j, e_k \rangle_H^2 \\ &= \sum_{j,k} \langle f_j, G^* e_k \rangle_U^2 \\ &= \sum_k \sum_j \langle f_j, G^* e_k \rangle_U^2 \\ &= \sum_k |G^* e_k|_U^2. \end{aligned}$$

Stąd wynika niezależność definicji normy od wyboru bazy i wzór

$$\|G\|_{L_{(HS)}(U, H)}^2 = \|G^*\|_{L_{(HS)}(H, U)}^2.$$

Przestrzeń $L_{(HS)}(U, H)$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\begin{aligned}
\langle G_1, G_2 \rangle_{L_{(HS)}(U, H)} &= \sum_j \langle G_1 f_j, G_2 f_j \rangle_H \\
&= \sum_{j, k} \langle G_1 f_j, e_k \rangle_H \langle G_2 f_j, e_k \rangle_H \\
&= \sum_{j, k} \langle f_j, G_1^* e_k \rangle_U \langle f_j, G_2^* e_k \rangle_U \\
&= \sum_k \langle G_1^* e_k, G_2^* e_k \rangle_U \\
&= \langle G_1^*, G_2^* \rangle_{L_{(HS)}(H, U)}.
\end{aligned}$$

19.2 Operatory nuklearne

Niech U i H będą ośrodkowymi przestrzeniami Hilberta. Każdy operator liniowy $R : U \rightarrow H$ postaci

$$Ru = \sum_k b_k \langle u, a_k \rangle_U, \quad u \in U, \quad \text{gdzie} \quad \sum_k |a_k|_U |b_k|_H < \infty,$$

nazywa się *operatorem nuklearnym* lub inaczej *operatorem śladowym* lub *operatorem o skończonym śladzie*.

Przestrzeń $L_1(U, H)$ wszystkich operatorów śladowych jest ośrodkową przestrzenią Banacha z normą

$$\|R\|_1 = \inf \left\{ \sum |a_k|_U |b_k|_H; \quad Ru = \sum_k b_k \langle u, a_k \rangle_U \right\}.$$

Gdy $U = H$, to zamiast $L_1(U, H)$ piszemy $L_1(H)$. Niech U, H, V będą przestrzeniami Hilberta. Mamy następujące podstawowe własności przestrzeni operatorów nuklearnych.

Lemat 19.1 (i) Jeżeli $S \in L_1(U, H)$ i $T \in L(H, V)$, to $TS \in L_1(U, V)$ oraz

$$\|TS\|_1 \leq \|S\|_1 \|T\|_{L(H, V)}. \quad (19.1)$$

(ii) Jeżeli $S \in L(U, H)$, $T \in L_1(H, V)$, to $TS \in L_1(U, V)$ oraz

$$\|TS\|_1 \leq \|S\|_{L(U, H)} \|T\|_1.$$

Dowód (i). Mamy

$$Su = \sum_k b_k \langle u, a_k \rangle_U, \quad \text{gdzie} \quad \sum |b_k|_H |a_k|_U < \infty.$$

Stąd

$$TSu = \sum_k Tb_k \langle u, a_k \rangle_U \text{ gdzie } \sum_k |Tb_k|_V |a_k|_U \leq \|T\|_{L(H,V)} \sum_k |a_k|_U |b_k|_V,$$

co pociąga za sobą (19.1). $\square$

Dowód (ii). Mamy

$$Th = \sum b_k \langle h, a_k \rangle_H.$$

Stąd

$$TSu = \sum b_k \langle Su, a_k \rangle_H = \sum b_k \langle u, S^* a_k \rangle_U,$$

a więc

$$\begin{aligned} \|TS\|_1 &\leq \sum_k |b_k|_V |S^* a_k|_U \leq \|S^*\|_{L(H,U)} \sum_k |b_k|_V |a_k|_H \\ &\leq \|S\|_{L(U,H)} \sum_k |b_k|_V |a_k|_H. \end{aligned}$$

$\square$

Gdy $R \in L_1(H)$ i $\{e_j\}$ jest bazą ortonormalną H , to definiujemy *ślad operatora* R ,

$$\text{Tr } R = \sum_j \langle Re_j, e_j \rangle_H.$$

Jeżeli

$$Rh = \sum_k \langle h, a_k \rangle_H b_k,$$

to

$$\begin{aligned} \sum_j |\langle Re_j, e_j \rangle_H| &= \sum_j \left| \sum_k \langle e_j, a_k \rangle_H \langle b_k, e_j \rangle_H \right| \\ &\leq \sum_k \left(\sum_j |\langle e_j, a_k \rangle_H| |\langle b_k, e_j \rangle_H| \right) \\ &\leq \sum_k \left(\sum_j \langle e_j, a_k \rangle_H^2 \right)^{1/2} \left(\sum_j \langle b_k, e_j \rangle_H^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_k |a_k|_H |b_k|_H \leq \|R\|_1. \end{aligned}$$

Czyli szereg definiujący $\text{Tr } R$ jest bezwzględnie zbieżny. Ponadto

$$\begin{aligned} \text{Tr } R &= \sum_j \sum_k \langle e_j, a_k \rangle_H \langle e_j, b_k \rangle_H \\ &= \sum_k \sum_j \langle e_j, a_k \rangle_H \langle e_j, b_k \rangle_H \\ &= \sum_k \langle a_k, b_k \rangle_H, \end{aligned}$$

czyli definicja nie zależy od wyboru bazy.

Lemat 19.2 *Niech U, H będą przestrzeniami Hilberta. (i) Jeżeli $S : U \rightarrow H$, $T : H \rightarrow U$ oraz jeden z operatorów S lub T jest śladowy, to*

$$\operatorname{Tr} TS = \operatorname{Tr} ST.$$

(ii) Jeżeli $S, T \in L_{(HS)}(H, H)$, to $ST \in L_1(H)$ i

$$\|ST\|_1 \leq \|S\|_{L_{(HS)}(H, H)} \|T\|_{L_{(HS)}(H, H)}.$$

Dowód (i). Załóżmy, że T jest śladowy. Wówczas

$$Th = \sum_k b_k \langle h, a_k \rangle_H, \quad b_k \in U, \quad a_k \in H.$$

Stąd

$$TSu = \sum_k b_k \langle Su, a_k \rangle_H = \sum_k b_k \langle u, S^* a_k \rangle_U.$$

Tak więc, dla dowolnej ortonormalnej bazy $\{e_j\}$ przestrzeni U oraz dowolnej ortonormalnej bazy $\{f_l\}$ przestrzeni H mamy

$$\begin{aligned} \sum_j \langle TSe_j, e_j \rangle_U &= \sum_j \sum_k \langle b_k, e_j \rangle_U \langle e_j, S^* a_k \rangle_U \\ &= \sum_k \langle b_k, S^* a_k \rangle_U = \sum_k \langle Sb_k, a_k \rangle_H \\ &= \sum_k \sum_l \langle Sb_k, f_l \rangle_H \langle a_k, f_l \rangle_H \\ &= \sum_l \langle STf_l, f_l \rangle_H. \end{aligned}$$

□

Dowód (ii). Dla dowolnej ortonormalnej bazy $\{e_k\}$ przestrzeni H mamy

$$Th = \sum_k \langle Th, e_k \rangle_H e_k = \sum_k \langle h, T^* e_k \rangle_H e_k.$$

Stąd

$$STh = \sum_k \langle h, T^* e_k \rangle_H Se_k.$$

Tak więc

$$\begin{aligned} \|ST\|_1 &\leq \sum_k |T^* e_k|_H |Se_k|_H \leq \left(\sum_k |T^* e_k|_H^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k |Se_k|_H^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|T^*\|_{L_{(HS)}(H, H)} \|S\|_{L_{(HS)}(H, H)} \\ &= \|T\|_{L_{(HS)}(H, H)} \|S\|_{L_{(HS)}(H, H)}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\operatorname{Tr} ST = \sum_k \langle Se_k, T^* e_k \rangle_H = \sum_k \langle TSe_k, e_k \rangle = \operatorname{Tr} TS.$$

□

Literatura

1. T. Bojdecki, J. Jakubowski : *Ito stochastic integral in the dual of a nuclear space*, J. Multivariate Anal. 31, 40–58, 1989.
2. Z. Brzeźniak : *On stochastic convolutions in Banach spaces and applications*, Stochastics Stochastics Rep. 61, 245–295, 1997.
3. Z. Brzeźniak, S. Peszat : *Space-time continuous solutions to SPDEs driven by a homogeneous Wiener process*, Studia Math. 137, 261–299, 1999.
4. R. Carmona, S. A. Molchanov : *Parabolic Anderson problem and intermittency*, Mem. Amer. Math. Soc. 108, 1–125, 1994.
5. S. Cerrai : *Second Order PDE's in Finite and Infinite Dimensions. A Probabilistic Approach*, Lecture Notes in Math. 1762, Springer, 2001.
6. R. C. Dalang : *Extending the martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous s.p.d.e.'s*, Electronic J. Probab. 4, 1–29, 1999.
7. R. Dalang, N. Frangos : *The stochastic wave equation in two spatial dimensions*, Ann. Probab. 26, 187–212, 1998.
8. E. Dettweiler : *Stochastic integration relative to Brownian motion on a general Banach space*, Doğa Mat. 15, 6–44, 1991.
9. G. Da Prato, J. Zabczyk : *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
10. G. Da Prato, J. Zabczyk : *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
11. D. A. Dawson, H. Salehi : *Spatially homogeneous random evolutions*, J. Multivariate Anal. 10, 141–180, 1980.
12. S. D. Eidelman : *Parabolic Systems*, North-Holland, Groningen Amsterdam, 1969.
13. T. Funaki : *Regularity properties for stochastic partial differential equations of parabolic type*, Osaka J. Math. 28, 495–516, 1991.
14. I. M. Gelfand, N. Ya. Vilenkin : *Generalized Functions*, vol. IV Applications of Harmonic Analysis, Academic Press, New York, 1964.
15. K. Handa : *On stochastic PDE related to Burgers' equation with noise*, Collection: Nonlinear Stochastic PDES, Minneapolis 1994, IMA Vol. Math. Appl., 77, Springer, New York, 147–156, 1996.
16. K. Itô : *Foundations of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces*, SIAM, Philadelphia, 1984.

17. A. Karczewska, J. Zabczyk : *A note on stochastic wave equations*, Evolution Equations and their Applications in Physical and Life Sciences, (Bad Herrenalb 1998, G. Lumer, L. Weis, eds.), Marcel Dekker, 501–511, 2001.
18. A. Karczewska, J. Zabczyk : *Stochastic PDEs with function-valued solutions*, Infinite Dimensional Stochastic Analysis (Amsterdam 1999, Ph. Clément, F. den Hollander, J. van Neerven, B. de Pagter, eds.), Verh. Afd. Natuurkd. 1. Reeks. K. Ned. Akad. Wet., 52, R. Neth. Acad. Arts Sci., Amsterdam, 197–216, 2000.
19. Yu. Kifer : *The Burgers equation with a random force and a general model for directed polymers in random environments*, Probab. Theory Related Fields 108, 29–65, 1997.
20. P. Kotelenetz : *Existence, uniqueness and smoothness for a class of function valued stochastic partial differential equations*, Stochastics Stochastics Rep. 41, 177–199, 1992.
21. R. Manthey, T. Zausinger : *Stochastic evolution equations in $L_p^{2\nu}$* , Stochastic Stochastic Rep 66, 37–85, 1999.
22. B. Maslowski : *Stability of semilinear equations with boundary and pointwise noise*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22, 55–93, 1995.
23. M. Metivier : *Semimartingales: A Course on Stochastic Processes*, De Gruyter, Berlin, 1982.
24. M. Metivier : *Stochastic Partial Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces*, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1988.
25. A. Pazy : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag, 1983.
26. S. Peszat : *Existence and uniqueness of the solution for stochastic equations on Banach spaces*, Stochastics Stochastics Rep. 55, 167–193, 1995.
27. S. Peszat : *The Cauchy problem for a nonlinear stochastic wave equation in any dimension*, J. Evol. Equ. 2, 383–394, 2002.
28. S. Peszat : *SPDEs driven by a homogeneous Wiener process*, SPDE and Applications. Levico, T. 2000 (G. Da Prato, L. Tubaro, eds.), Marcel Dekker, New York, 417–427, 2001.
29. S. Peszat, S. Tindel : *Stochastic heat and wave equations on a Lie group*, wysłane.
30. S. Peszat, J. Zabczyk : *Stochastic evolution equations with a spatially homogeneous Wiener process*, Stochastic Processes Appl. 72, 187–204, 1997.
31. S. Peszat, J. Zabczyk : *Nonlinear stochastic wave and heat equations*, Probab. Theory Related Fields 116, 421–443, 2000.
32. R. Sowers : *Multi-dimensional reaction-diffusion equations with white noise boundary perturbations heat equations*, Ann. Probab. 22, 2071–2121, 1994.
33. J. B. Walsh : *An introduction to stochastic partial differential equations*, École d'été de probabilités de Saint-Flour XIV - 1984, Lecture Notes in Math. 1180, Springer, Berlin New York, 265–439, 1986.
34. J. Zabczyk : *The fractional calculus and stochastic evolution equations*, Barcelona Seminar on Stochastic Analysis, St. Feliu de Guixol 1991, Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 222–234, 1993.