

1.1. **Podstawy.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ - przestrzenie Hilberta. Operator $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ oznacza: $D(T) \subset \mathcal{H}$ jest podprzestrzenią, $T: D(T) \rightarrow \mathcal{K}$ jest liniowy. Terminologia

- T jest *gęsto zdefiniowany*, jeśli $\overline{D(T)} = \mathcal{H}$,
- T jest *domknięty*, jeśli *wykres* T :

$$G(T) = \left\{ \begin{bmatrix} \psi \\ T\psi \end{bmatrix} : \psi \in D(T) \right\} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \quad \text{jest domknięty,}$$

- T jest *domykalny*, jeśli $\overline{G(T)}$ jest wykresem operatora. Operator, którego wykresem jest $\overline{G(T)}$ nazywamy *domknięciem* T i oznaczamy $\overline{T}$.

Fakt 1.1. (1) *Przestrzeń $G \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ jest wykresem operatora $\iff G \cap (\{0\} \oplus \mathcal{K}) = \{0\}$,*

(2) *$T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ jest gęsto zdefiniowany $\iff G^\perp \cap (\mathcal{H} \oplus \{0\}) = \{0\}$,*

(3) *$G \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ jest wykresem domkniętego gęsto zdefiniowanego operatora $\iff$*

- $G = \overline{G}$,
- $G \cap (\{0\} \oplus \mathcal{K}) = \{0\}$,
- $G^\perp \cap (\mathcal{H} \oplus \{0\}) = \{0\}$.

1.2. **Operator sprzężony.** Niech $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ będzie gęsto zdefiniowany. Definiujemy $G = \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{H} : \forall \psi \in D(T) \langle \xi | T\psi \rangle = \langle \eta | \psi \rangle \right\}$. Wtedy G jest wykresem operatora:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \eta \end{bmatrix} \in G \iff \forall \psi \in D(T) \quad (0 =) \langle 0 | T\psi \rangle = \langle \eta | \psi \rangle \iff \eta \in D(T)^\perp \iff \eta = 0$$

Operator, którego wykresem jest G nazywamy *sprzężonym* do T i oznaczamy T^* .

Uwaga 1.2. (1) $D(T^*) = \{\xi \in \mathcal{K} : D(T) \ni \psi \mapsto \langle \xi | T\psi \rangle \text{ jest ograniczony}\}$

(2) $\forall \psi \in D(T), \xi \in D(T^*) \quad \langle \xi | T\psi \rangle = \langle T^*\xi | \psi \rangle$

(3) $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in G(T^*) \iff \forall \psi \in D(T) \quad \left\langle \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} T\psi \\ -\psi \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \iff \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \\ -\mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \end{bmatrix} G(T)$ gdzie $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \\ -\mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \oplus \mathcal{H}$ to operator unitarny o naturalnej interpretacji.

$$\text{Zatem } G(T^*) = \left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \\ -\mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \end{bmatrix} G(T) \right)^\perp = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \\ -\mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \end{bmatrix} G(T)^\perp$$

Wniosek 1.3. *Operator T^* jest automatycznie domknięty.*

Stwierdzenie 1.4. *T jest domykalny $\iff T^*$ jest gęsto zdefiniowany.*

Dowód. T domykalny $\iff \overline{G(T)} \cap (\{0\} \oplus \mathcal{K}) = \{0\}$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \\ -\mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \end{bmatrix} \overline{G(T)} \cap (\mathcal{K} \oplus \{0\}) = \{0\}$$

$$\iff G(T^*)^\perp \cap (\mathcal{K} \oplus \{0\}) = \{0\} \iff T^* \text{ jest gęsto zdefiniowany} \quad \square$$

Uwaga 1.5. Niech T : domykalny. Wtedy T^* jest gęsto zdefiniowany i istnieje $(T^*)^* =: T^{**}$.

$$G(T^{**}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \\ -\mathbf{1}_{\mathcal{K}} & 0 \end{bmatrix} G(T^*)^\perp = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \\ -\mathbf{1}_{\mathcal{K}} & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \\ -\mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \end{bmatrix} (G(T)^\perp)^\perp \right) = \overline{G(T)}$$

Zatem $T^{**} = \overline{T}$.

Niech $S, T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$. Powiemy, że S jest *rozszerzeniem* T , jeśli $D(T) \subset D(S)$ oraz $S\psi = T\psi$ dla każdego $\psi \in D(T)$. Piszemy $T \subset S$.

Stwierdzenie 1.6. $T \subset S \implies S^* \subset T^*$

Dowód. $T \subset S \iff G(T) \subset G(S) \iff G(S)^\perp \subset G(T)^\perp$ □

Operator $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ jest *symetryczny*, jeśli $T \subset T^*$, tzn $\forall_{\psi, \phi \in D(T)} \langle \phi | T\psi \rangle = \langle T\phi | \psi \rangle$. Powiemy, że T jest *samosprzężony*, jeśli $T = T^*$.

Uwaga 1.7. Operator samosprzężony nie ma właściwych rozszerzeń symetrycznych:

$$\begin{pmatrix} T = T^* \\ T \subset S \\ S \subset S^* \end{pmatrix} \implies (S \subset S^* \subset T^* = T \subset S)$$

1.3. Rozkład biegunowy. $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ nazwiemy *dodatnim*, gdy $\langle \xi | T\xi \rangle \geq 0$ ($\xi \in D(T)$).

Uwaga 1.8. Operator dodatni nie musi być samosprzężony.

Twierdzenie 1.9. Niech $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ będzie domknięty i gęsto zdefiniowany. Wówczas istnieje jedyna para (u, K) , gdzie $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ oraz $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ taka, że

- (1) $T = uK$,
- (2) $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ jest dodatni i samosprzężony,
- (3) u^*u jest rzutem na domknięcie obrazu K .

1.4. z -transformata. $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$: domknięty, gęsto zdefiniowany. Pokazuje się, że

- (1) (a) T^*T jest domknięty
(b) T^*T jest gęsto określony
- (2) (a) $D(T^*T) \ni \psi \mapsto \psi + T^*T\psi = (\mathbf{1} + T^*T)\psi \in \mathcal{H}$ jest bijekcją,
(b) odwzorowanie $(\mathbf{1} + T^*T)^{-1}$ jest ograniczone i dodatnie,
- (3) (a) $(\mathbf{1} + T^*T)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{H} = D(T)$
(b) $T(\mathbf{1} + T^*T)^{-\frac{1}{2}}$ jest operatorem ograniczonym (a nawet kontrakcją)

Definiujemy $z_T = T(\mathbf{1} + T^*T)^{-\frac{1}{2}}$ – z -transformatę T .

$$(4) \quad G(T) = \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{1} - z_T^* z_T)^{\frac{1}{2}} \xi \\ z_T \xi \end{bmatrix} : \xi \in \mathcal{H} \right\}$$

1.5. Rachunek funkcyjny.

Twierdzenie 1.10. $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ samosprężony, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ – ograniczone funkcje borelowskie. Wtedy istnieje jedyny $*$ -homomorfizm algebr unitalnych $g \mapsto g(T): \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ taki, że

- (1) $\zeta(T) = z_T$, gdzie $\zeta(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$,
- (2) jeśli ciąg funkcji jednostajnie ograniczonych $g_n \rightarrow g$ punktowo, to $g_n(T) \rightarrow g(T)$ mocno (punktowo).

Uwaga 1.11. W praktyce: z jedności wynika, że $f(uTu^*) = uf(T)u^*$. Jeśli potrafimy znaleźć dobre u – w domyśle, coś jak transformata Fouriera – pokazujące równoważność $uTu^* = x \cdot$ na $L^2(X, \mu)$, to $f(T) = u^*[f(x) \cdot]u$. Skąd X, μ ? Jeśli jest ślad, który możemy stosować do T , to znając momenty T można wyznaczyć miarę μ na (podzbiorze) $\mathbb{R}$.

1.6. Operatory stowarzyszone z algebrą von Neumanna. $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebra von Neumanna, $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Powiemy, że T jest stowarzyszony z M (napiszemy $T\eta M$), jeśli $\forall a' \in M' \ a'T \subset Ta'$. Innymi słowy,

$$T\eta M \iff \forall a' \in M' \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & a' \end{bmatrix} G(T) \subset G(T)$$

Twierdzenie 1.12. $T\eta M$ – domknięty o rozkładzie biegunowym $T = u|T|$. Wtedy $u \in M$ oraz $\forall E \subset [0, \infty) \ \chi_E(|T|) \in M$.

Dowód. Niech $u' \in M'$ – element unitarny. Sprzegając osobno u i $|T|$ przez u' , mamy

$$(u'uu'^*)(u'|T|u'^*) = u'u|T|u'^* = u'Tu'^* \begin{cases} \subset Tu'u'^* = T, \text{ bo } u'T \subset Tu' \\ \supset u'u'^*T = T, \text{ bo } Tu'^* \supset u'^*T \end{cases}$$

Wobec jedności rozkładu biegunowego, $u'uu'^* = u$ oraz $|T| = u'|T|u'^*$. Zatem $u \in M$ oraz $\chi_E(|T|) = \chi_E(u'|T|u'^*) = u'\chi_E(|T|)u'^*$ z jedności rachunku funkcyjnego, i w konsekwencji $\chi_E(|T|) \in M'' = M$. $\square$

(M, τ) : pólskończona algebra von Neumanna, $A\eta M$ – domknięty. A jest τ -mierzalny, jeśli $D(A)$ jest τ -gęstą podprzestrzenią $\mathcal{H}$: $\forall \varepsilon > 0 \exists p \in Proj(M) \ p\mathcal{H} \subset D(A), \tau(1 - p) \leq \varepsilon$.

Twierdzenie 1.13. Jeśli $A, B\eta M$ oraz $\mathcal{E} \subset D(A) \cap D(B)$ jest τ -gęstą podprzestrzenią taką, że $A|_{\mathcal{E}} = B|_{\mathcal{E}}$, to $A = B$.

Wniosek 1.14. (1) $A\eta M$ symetryczny, τ -mierzalny $\implies A = A^*$.

(2) $A \subset B$ są τ -mierzalne, to $A = B$.

Twierdzenie 1.15. Niech $A\eta M$ i niech $A = u|A|$ będzie rozkładem biegunowym. NWSR:

- (1) A jest τ -mierzalny,
- (2) $|A|$ jest τ -mierzalny,
- (3) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \tau(\chi(|A| > \delta)) < \varepsilon$,
- (4) $\tau(\chi(|A| > \lambda)) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$,
- (5) $\exists \lambda > 0 \ \tau(\chi(|A| > \lambda)) < \infty$,

Wniosek 1.16. (1) *każdy $a \in M$ jest τ -mierzalny ($\chi(|a| > \|a\|) = 0$),*
 (2) *$A\eta M$ jest τ -mierzalny $\iff A^*$ jest τ -mierzalny,*
 (3) *Jeśli (M, τ) jest skończona, to wszystkie operatory stowarzyszone są τ -mierzalne.*

Niech $\tilde{M}$ oznacza zbiór operatorów τ -mierzalnych.

Twierdzenie 1.17. (1) *Jeśli $A, B \in \tilde{M}$, to $A + B$ oraz $A \cdot B$ są gęsto zdefiniowane, domykalne oraz $\overline{A + B}, \overline{A \cdot B} \in \tilde{M}$.*
 (2) *$\tilde{M}$ jest $*$ -algebrą względem działań*
 • $(A, B) \xrightarrow{\bar{+}} A \bar{+} B := \overline{A + B},$
 • $(A, B) \xrightarrow{\bar{\cdot}} A \bar{\cdot} B := \overline{A \cdot B},$
 • $A \xrightarrow{*} A^*.$

Dla $\varepsilon > 0, \delta > 0$ definiujemy

$$N(\varepsilon, \delta) = \{A \in \tilde{M} | \exists_{p \in Proj(M)} p\mathcal{H} \subset D(A), \|Ap\| \leq \varepsilon, \tau(\mathbb{1} - p) \leq \delta\}$$

Twierdzenie 1.18. (1) *Rodzina $\{N(\varepsilon, \delta) | \varepsilon, \delta > 0\}$ tworzy bazę otoczeń zera topologii wektorowej na $\tilde{M}$,*
 (2) *$\tilde{M}$ jest zupełną topologiczną $*$ -algebrą,*
 (3) *M jest gęsta w $\tilde{M}$.*

1.7. Przestrzeń L^p dla śladu. Dla $A\eta M$, $A = A^* \geq 0$ kładziemy

$$\tau(A) = \sup_{\lambda \geq 0} \tau(\chi(A \leq \lambda)A).$$

Niech $p \in [1, \infty)$, definiujemy

$$L^p(M, \tau) = \{A\eta M | \tau(|A|^p) < \infty\}$$

oraz

$$\|A\|_p = (\tau(|A|^p))^{\frac{1}{p}}, \quad A \in L^p(M, \tau)$$

Twierdzenie 1.19. (1) *$(L^p(M, \tau), \|\cdot\|_p)$ jest przestrzenią Banacha,*
 (2) *Podprzestrzeń $\{a \in M | \tau(|a|^p) < \infty\}$ jest gęsta w $(L^p(M, \tau), \|\cdot\|_p)$,*
 (3) *$L^p(M, \tau) \subset \tilde{M}$ i włożenie jest ciągłe*

Uwaga 1.20. Jeśli (M, τ) – skończona, to $L^2(M, \tau)$ zdefiniowana powyżej jest identyczna z przestrzenią GNS dla (M, τ) .

2. WSTĘP DO WIELKICH ODCHYLEŃ

BARTOSZ KOŁODZIEJEK

2.1. Notacja.

- $X_i \in \mathbb{R}^d$ mają rozkład μ , $i = 1, \dots, n$ oraz są niezależne.
- $\hat{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ma rozkład μ_n (tzn $\mu_n(\cdot) = \mu_n^{*n}(n \cdot)$)
- $\Lambda(\lambda) = \log \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle \lambda | x \rangle} \mu(dx)$ – funkcja generująca kumulanty, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ – standardowy iloczyn skalarny
- $\Lambda(0) = 0$ oraz $\Lambda(\lambda) > -\infty$, a także Λ jest wypukła.
- $\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} [\langle \lambda | x \rangle - \Lambda(\lambda)]$ – transformata Legendre’a (wypukłe sprzężenie funkcji Λ).
- $D_\Lambda = \{\lambda : \Lambda(\lambda) < \infty\}$

2.2. Motywacja. Załóżmy (póki co), że $\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}^d} x \mu(dx) < \infty$. Wówczas, na mocy prawa wielkich liczb, $\hat{S}_n \rightarrow \mathbb{E}X$ prawie na pewno. Zatem

$$\mu_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{jeśli } (\mathbb{E}X - \varepsilon, \mathbb{E}X + \varepsilon) \subseteq A \text{ dla pewnego } \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{jeśli } (\mathbb{E}X - \varepsilon, \mathbb{E}X + \varepsilon) \subseteq A^c \text{ dla pewnego } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Wielkie odchylenia badają tempo zbieżności $\mu_n(A)$ do zera (dla otwartego $A \not\ni \mathbb{E}X$). Przykładem tego typu wyniku jest

Twierdzenie 2.1 (Bahadur-Rao). *Niech $d = 1$, μ niekratowej (tzn. $\text{supp}(\mu) \not\subset c\mathbb{Z}$ dla dowolnego $c > 0$) oraz $D_\Lambda = \mathbb{R}$. Wówczas dla dowolnego $q > \mathbb{E}X$ zachodzi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n([q, \infty)) J_n(q) = 1$$

gdzie

$$J_n(q) = \Lambda^*(q)' \sqrt{\frac{2\pi n}{\Lambda^*(q)''}} e^{n\Lambda^*(q)}$$

Zazwyczaj bada się logarytmiczną asymptotykę (typu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n([q, \infty)) = -\Lambda^*(q)$), toteż Λ^* jest podstawowym obiektem analizy. Uogólnienia obejmują

- $\mathbb{R}^d$ dla $d > 1$, a nawet przestrzenie Polskie,
- $(X_i)_i$ zależne,
- $\mu_n(A)$ dla ogólnych zbiorów A (niekoniecznie półprostych).

2.3. Twierdzenie Craméra.

Twierdzenie 2.2 (Cramér). *Niech $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz niech $0 \in \text{int} D_\Lambda$. Wówczas*

(1) *dla dowolnego zbioru domkniętego $F \subset \mathbb{R}^d$ zachodzi*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(F)) \leq - \inf_{x \in F} \Lambda^*(x)$$

(2) *dla dowolnego zbioru otwartego $G \subset \mathbb{R}^d$ zachodzi*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(G)) \geq - \inf_{x \in G} \Lambda^*(x)$$

Uwaga 2.3. Tezę twierdzenia Craméra będziemy streszczać wyrażeniem: rodzina miar ν_n spełnia Prawo Wielkich Odchyłeń z funkcją tempa Λ^* .

Dowód. Dowiedzimy twierdzenia przy dodatkowych założeniach technicznych: $d = 1$, $D_\Lambda = \mathbb{R}$ (a zatem wszystkie momenty istnieją) oraz $\mu(\mathbb{R}_{<0}) > 0$ oraz $\mu(\mathbb{R}_{>0}) > 0$, metoda dowodowa ogólnego przypadku jest taka sama, acz technicznie bardziej złożona.

Górne ograniczenie. Niech $x > \mathbb{E}X$.

$$(2.1) \quad \mu_n([x, \infty)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(t \geq x) \mu_n(dt) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{n\lambda t}}{e^{n\lambda x}} \mu_n(dt) \leq \frac{1}{e^{n\lambda x}} \int_{\mathbb{R}} e^{n\lambda t} \mu^{*n}(ndt)$$

$$(2.2) \quad = \frac{(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t} \mu(dt))^n}{e^{n\lambda x}} = e^{-n(\lambda x - \Lambda(\lambda))} \leq e^{-n \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda x - \Lambda(\lambda))} = e^{-n\Lambda^*(x)}$$

W powyższym rachunku 1. i 3. krok to rozpisanie definicji, 2. krok to obserwacja że na zbiorze, na którym $t \geq x$, eksponenty po prawej stronie są ≥ 1 , wartości indykatora po lewej (oraz wszędzie nieujemne, więc na pozostałej części $\mathbb{R}$ nierówność zachodzi w oczywisty sposób), 4. krok to zamiana zmiennych i definicja splotu, 5. krok to definicja $\Lambda(x)$, 6. krok jest oczywisty a w 7. należy zauważyć, że supremum w wykładniku jest przyjmowane w $\mathbb{R}_{\geq 0}$, bo na $\mathbb{R}_{<0}$ zachodzi $\Lambda(\lambda) \geq \lambda \mathbb{E}X > \lambda x$ (bo $\lambda < 0$ oraz $x > \mathbb{E}X$).

Analogicznie pokazuje się, że dla $x < \mathbb{E}X$ zachodzi

$$\mu_n((-\infty, x]) \leq e^{-n\Lambda^*(x)}$$

Ponieważ $\Lambda^*(\mathbb{E}X) = 0$ oraz $\inf_{x \in \mathbb{R}} \Lambda^*(x) = 0$, zatem jeśli $\mathbb{E}X \in F$, to nie ma czego dowodzić. Istotnie, dzięki nierówności Jensena, dla $\lambda > 0$ mamy

$$\Lambda(\lambda) = \log\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \mu(dx)\right) \geq \int_{\mathbb{R}} \log(e^{\lambda x}) \mu(dx) = \lambda \mathbb{E}X$$

toteż $\Lambda^*(\mathbb{E}X) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda \mathbb{E}X - \Lambda(\lambda)) \leq 0$. Z drugiej strony, mamy $\Lambda^*(x) \geq 0 \cdot x - \Lambda(0) = 0$ dla dowolnego x .

Założmy zatem, że $\mathbb{E}X \in F^\complement$ – otwarty i niech $(x_-, x_+) = \bigcup_{\mathbb{E}X \in (a,b) \subset F^\complement} (a,b)$. Mamy, że $x_- < \mathbb{E}X < x_+$ oraz $x_-, x_+ \in F^\complement$ (bądź jedno z nich jest nieskończonością). Wtedy

$$\mu_n(F) \leq \mu_n((-\infty, x_-]) + \mu_n([x_+, \infty)) \leq 2e^{-n \inf_{x \in F} \Lambda^*(x)}$$

co jest nawet mocniejsze niż teza, której potrzebowaliśmy.

Dolne ograniczenie. Pokażemy, że

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((-\delta, \delta)) \geq -\Lambda^*(0)$$

To wystarczy, gdyż wykonując podstawienie $\mu(\cdot) \rightsquigarrow \mu(x + \cdot)$ zachodzi $\Lambda_\mu(\lambda) \rightsquigarrow \Lambda_\mu(\lambda) - \lambda x$ oraz $\Lambda_\mu^*(0) \rightsquigarrow \Lambda_\mu^*(x)$, i ostatecznie wnioskujemy, że

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((x - \delta, x + \delta)) \geq -\Lambda^*(x)$$

Wówczas dla każdych x, δ takich, że $(x - \delta, x + \delta) \subset G$, mamy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((x - \delta, x + \delta)) \geq -\Lambda^*(x),$$

co uzasadnia powyższą redukcję. Zauważmy teraz, że skoro $\mu_n(\mathbb{R}_{>0}) > 0$ oraz $\mu_n(\mathbb{R}_{<0}) > 0$, to $\Lambda(\lambda) \rightarrow \infty$ gdy $|\lambda| \rightarrow \infty$. W takim razie istnieje globalne minimum $\eta \in \mathbb{R}$: $\Lambda(\eta) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \Lambda(\lambda)$ oraz $\Lambda'(\eta) = 0$. Zdefiniujmy miarę $\nu(dx) = e^{\eta x - \Lambda(\eta)} \mu(dx)$. Wówczas

- $\nu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} e^{\eta x} \mu(dx) \eta^{-\Lambda(\eta)} = 1$
- $\int_{\mathbb{R}} x \nu(dx) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x e^{\eta x} \mu(dx)}{\int_{\mathbb{R}} e^{\eta x} \mu(dx)} = \Lambda'(\eta) = 0$

Zatem

$$\begin{aligned} \mu_n((-\varepsilon, \varepsilon)) &= \int \dots \int_{|\sum_{i=1}^n x_i| < n\varepsilon} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \\ &\geq e^{-n\varepsilon|\eta|} \int_{|\sum_{i=1}^n x_i| < n\varepsilon} e^{\eta \sum_{i=1}^n x_i} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \\ &= e^{-n\varepsilon|\eta|} e^{n\Lambda(\eta)} \nu_n((-\varepsilon, \varepsilon)) \end{aligned}$$

Dzięki prawu wielkich liczb (oraz $\int_{\mathbb{R}} x \nu(dx) = 0$) mamy, że $\nu_n((-\varepsilon, \varepsilon)) \rightarrow 1$ wraz z $n \rightarrow \infty$, dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

Ostatecznie mamy, że

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((-\delta, \delta)) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((-\varepsilon, \varepsilon)) \geq \Lambda(\eta) - \varepsilon|\eta|$$

kładąc $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((-\delta, \delta)) \geq \Lambda(\eta)$$

Z drugiej strony $\Lambda(\eta) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \Lambda(\lambda) = -\Lambda^*(0)$. □

2.4. Twierdzenie Gärtnera-Ellisa: prawo wielkich odchyłeń dla zależnych zmiennych losowych.

Twierdzenie 2.4. Niech $Z_n \in \mathbb{R}^d$ mają rozkład ν_n , oznaczmy $\Lambda_n(\lambda) = \log \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle \lambda, t \rangle} \nu_n(dt)$. Załóżmy, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}^d$ istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda) = \Lambda(\lambda) \in [-\infty, \infty]$$

oraz niech $0 \in \text{int} D_{\Lambda}$. Wówczas ν_n spełnia Prawo Wielkich Odchyłeń z funkcją tempa Λ^* .

Uwaga 2.5. Twierdzenie Craméra odzyskujemy z twierdzenia Gärtnera-Ellisa kładąc $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Zauważmy jednocześnie, że nie ma potrzeby, by X_i były niezależne.

2.5. Twierdzenie Sanowa i entropia. Relatywną entropią ν względem μ (gdzie $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ – miary probabilistyczne na $\mathbb{R}$) definiuje się jako:

$$H(\nu|\mu) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x) \log(f(x)) \mu(dx) & \text{jeśli istnieje } f = \frac{d\nu}{d\mu} \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Topologia słaba na $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (w sensie analizy funkcjonalnej, topologia słaba*, czyli najslabsza topologia na $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ względem której naturalne parowanie $\langle \nu|f \rangle$ dla $f \in C_b(\mathbb{R})$ jest ciągłe) jest metryzowalna (np. metryką Lévy'ego), zatem $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ jest przestrzenią polską i można w niej rozważać prawo wielkich odchyłeń, jak w twierdzeniu Craméra.

Stwierdzenie 2.6. Dla dowolnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, μ) mamy:

- (1) $\log(\int_{\Omega} e^{\varphi(t)} \mu(dt)) = \sup\{\int_{\Omega} \varphi f d\mu - \int_{\Omega} f \log f d\mu : f \in L^1(\Omega, \mu)_{1,+}\}$
- (2) $H(\cdot | \mu) = \Lambda^*(\cdot)$

Dowód. (1) Nierówność $\leq$ otrzymuje się kładąc po prawej stronie $f(t) = \frac{e^{\varphi(t)}}{\int_{\Omega} e^{\varphi(s)} \mu(ds)}$. Nierówność $\geq$ wynika z nierówności Jensena:

$$\log \int_{\Omega} e^{\varphi} d\mu \geq \log \int_{f>0} \frac{e^{\varphi}}{f} [fd\mu] \geq \int_{f>0} \log\left(\frac{e^{\varphi}}{f}\right) [fd\mu] = \int_{f>0} \varphi f d\mu - \int_{f>0} \log(f) f d\mu$$

gdzie w drugiej nierówności potraktowaliśmy $[fd\mu]$ jako miarę probabilistyczną.

- (2) Wynika z (1) przez obustronne zastosowanie transformaty Legendre'a. $\square$

Twierdzenie 2.7. Niech $X_i \in \mathbb{R}$ mają rozkład μ i będą niezależne; niech $\nu_n = \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_n})$ – miara empiryczna $(X_1, \dots, X_n)$. Wówczas

- (1) dla dowolnego $F \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ domkniętego

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\nu_n \in F) \leq - \inf_{\nu \in F} H(\nu | \mu)$$

- (2) dla dowolnego $G \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ otwartego

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\nu_n \in G) \geq - \inf_{\nu \in G} H(\nu | \mu)$$

Uwaga 2.8. Jeśli $\text{supp} \mu = \{a_1, \dots, a_d\}$ jest zbiorem skończonym, to twierdzenie Sanowa jest wnioskiem z twierdzenia Craméra przez identyfikację miar na $\{a_1, \dots, a_d\}$ z standardowym sympleksem w $\mathbb{R}^d$. Istotnie, Stwierdzenie 2.6(2) pozwala zinterpretować twierdzenie Sanowa dokładnie jako twierdzenie Craméra.

2.6. Twierdzenie Ben Arousa i Guionnet (1997). Załóżmy, że rozkład $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ma gęstość zadaną przez

$$Q_{\beta, V}^N(d\lambda) \propto \exp\left(-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N V(\lambda_i)\right) \prod_{1 \leq i < j \leq N} |\lambda_i - \lambda_j|^{\beta} d\lambda_1 \dots d\lambda_n$$

gdzie $\beta > 0$, zaś $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ jest klasy C^1 , spełnia $\frac{V(x)}{\log|x|} \rightarrow \infty$ w nieskończoności, oraz

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{|y| \leq \delta} \left| \frac{V'(x+y)}{V(x)} \right| < \infty$$

Twierdzenie 2.9. Rozkład miary spektralnej $\nu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$ spełnia:

- (1) dla dowolnego $F \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ domkniętego

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \mathbb{P}(\nu_N \in F) \leq - \inf_{\nu \in F} I_{\beta}^V(\nu)$$

- (2) dla dowolnego $G \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ otwartego

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \mathbb{P}(\nu_N \in G) \geq - \inf_{\nu \in G} I_{\beta}^V(\nu)$$

gdzie

$$I_\beta^V(\mu) = \tilde{I}_\beta^V(\mu) - \inf_{\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})} \tilde{I}_\beta^V(\nu)$$

oraz

$$\tilde{I}_\beta^V(\mu) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} V d\mu - \beta \iint_{\mathbb{R}^2} \log |x - y| \mu(dx) \mu(dy) \right)$$

Uwaga 2.10. W tym wypadku powiemy, że rodzina miar ν_n spełnia prawo wielkich odchyień skali N^2 z funkcją tempa I_β^V .

3. MIKROSTANOWA WOLNA ENTROPIA

PAWEŁ JÓZIAK

3.1. Macierze losowe i jednowymiarowa entropia. Niech $H_N = (M_N(\mathbb{C})_{\text{s.a.}}, P_N)$, gdzie miara probabilistyczna

$$dP_N(A) = \text{const} \cdot e^{-\frac{N}{2}\text{Tr}(A^2)} dA$$

Niech $\mathbb{R}_{\geq}^N = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N\}$ oraz $\sigma(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_N(A)) \in \mathbb{R}_{\geq}^N$. Odwzorowanie

$$H_N \ni A \mapsto \sigma(A) \in \mathbb{R}_{\geq}^N$$

zadaje pchnięcie miary

$$\tilde{P}_N(B) = P_N(\{A \in H_N \mid \sigma(A) \in B\})$$

Jednocześnie grupa permutacji $S_N \curvearrowright \mathbb{R}_{\geq}^N$ z $\mathbb{R}_{\geq}^N$ jako dziedziną fundamentalną (z dokładnością do miary 0), co pozwala przetransportować miarę $\tilde{P}_N$ na $\mathbb{R}^N$. Okazuje się, że

$$d\tilde{P}_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = C_N \cdot e^{-\frac{N}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j^2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{j=1}^N d\lambda_j,$$

gdzie $C_N = \frac{N^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^N j!}$. Naszym celem jest analiza zachodzenia prawa wielkich odchyleń dla miary empirycznej tego rozkładu $\mu_A = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j(A)}$ ($A \in H_N$).

Heurystyka:

$$P_N(\mu_A \approx \nu) = \tilde{P}_N\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j} \approx \nu\right) = C_N \int_{\{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j} \approx \nu\}} e^{-\frac{N}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j^2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{j=1}^N d\lambda_j$$

Teraz:

$$-\frac{N}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 = -\frac{N^2}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \right) \approx -\frac{N^2}{2} \int t^2 d\nu(t) \quad \text{gdzie} \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j} \approx \nu$$

Podobnie:

$$\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = \exp \left(\sum_{i < j} \log |\lambda_i - \lambda_j|^2 \right) = \exp \left(\sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| \right)$$

zaś wykładnik spełnia:

$$N^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{N^2} \log |\lambda_i - \lambda_j| \approx N^2 \iint \log |s - t| d\nu(s) d\nu(t)$$

Zatem spodziewamy się Prawa Wielkich Odchyleń postaci

$$P_N(\mu_A \approx \nu) \sim \exp(-N^2 I(\nu))$$

z funkcją tempa

$$I(\nu) = - \iint \log |s - t| d\nu(s) d\nu(t) + \frac{1}{2} \int t^2 d\nu(t) - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N^2} \log C_N \right)$$

ta ostatnia granica daje się policzyć, wynik wynosi $\frac{3}{4}$.

Zobaczmy również, że

$$s^2 + t^2 - 4 \log |s - t| = \left(s^2 + t^2 - 2 \log(s^2 + t^2) \right) + \left(4 \log \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{|s - t|} \right)$$

stosując do pierwszego nawiasu nierówność $m - 2 \log m \geq 2 - 2 \log 2$ dla $m > 0$, a do drugiego $2(s^2 + t^2) \geq (s - t)^2$ otrzymujemy, że

$$s^2 + t^2 - 4 \log |s - t| \geq 2 - 4 \log 2$$

Stąd jeśli $\int t^2 d\nu(t) < \infty$, to

$$\iint (s^2 + t^2 - 4 \log |s - t|) d\nu(t) d\nu(s) \in \overline{\mathbb{R}}$$

jest dobrze określone.

Konkluzja: użyć logarytmicznej energii jako definicji entropii (por. twierdzenie Sanowa, paragraf 2.5):

$$\chi(X) = \iint \log |s - t| d\mu_X(s) d\mu_X(t)$$

gdzie μ_X to rozkład zmiennej X w stanie τ .

Formalny argument za Prawem Wielkich Odchyłeń został podany przez Ben-Arousa-Guionnet (zob. paragraf 2.6).

3.2. Wielowymiarowa wolna entropia. (M, τ) - skończona algebra von Neumanna / nieprzemiana W^* -przestrzeń probabilistyczna; $x_1 = x_1^*, \dots, x_n = x_n^* \in (M, \tau)$. Będziemy używać oznaczenia $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ jako ciąg/multizbiór. Rozkład łączny to multizbiór

$$\text{distr}(\underline{x}) = ((\tau(x_{i_1} \dots x_{i_k}))_{i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}})_{k \geq 1}$$

Cel: przeanalizować “szansę” na to, że rozkład łączny jest podobny do rozkładu łącznego zmiennych półokrągłych. Wiadomo, że

Twierdzenie 3.1 (Voiculescu). $(A_1, \dots, A_n) \xrightarrow{\text{distr}} (s_1, \dots, s_n)$, gdzie $s_i \in (L\mathbb{F}_n, \tau)$ są wolnymi zmiennymi półokrągłymi, a $(A_1, \dots, A_n)$ – niezależnymi samosprzężonymi macierzami Gaussowskimi.

W tym kontekście Prawo Wielkich Odchyłeń powinno mówić coś typu:

$$P_N(\{(A_1, \dots, A_n) : \text{distr}(\underline{A}) \approx \text{distr}(\underline{X})\}) \sim \exp(-N^2 I(\underline{X}))$$

gdzie $I(\underline{X})$ – wolna (łączna) entropia $\underline{X}$.

Definicja 3.2. Dla nieprzemiennych zmiennych losowych $x_1, \dots, x_n \in (M, \tau)$ definiujemy zbiór mikrostanów macierzowych aproksymujących wg rozkładu ten układ nieprzemiennych zmiennych losowych:

$$\Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon) = \left\{ (A_1, \dots, A_n) \in M_N(\mathbb{C})_{\text{s.a.}}^n : \begin{array}{l} \forall 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n, 1 \leq k \leq r \\ |tr_N(A_{i_1} \dots A_{i_k}) - \tau(x_{i_1} \dots x_{i_k})| \leq \varepsilon \end{array} \right\}$$

Niech Λ : miara Lebesgue'a na $M_N(\mathbb{C})_{\text{s.a.}}^n \cong \mathbb{R}^{nN^2}$. Definiujemy:

$$\chi(\underline{x}; r, \varepsilon) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N^2} \log(\Lambda(\Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon))) + \frac{n}{2} \log N \right)$$

$$\chi(\underline{x}) = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \chi(\underline{x}; r, \varepsilon)$$

Pytaniem otwartym jest, czy $\limsup$ w pierwszej definicji daje się zastąpić przez $\lim$.

Aby wyjaśnić modyfikator $\frac{n}{2} \log N$, jak i dokładnie opisać wybór miary Lebesgue'a, przeanalizujemy najpierw przypadek $n = 1$. $A \in M_N(\mathbb{C})_{\text{s.a.}}$ jest określona przez N parametrów rzeczywistych (diagonalę) oraz $1 + 2 + \dots + N - 1 = \frac{N(N-1)}{2}$ parametrów zespolonych (ponad diagonalą), tzn. $N(N-1)$ parametrów rzeczywistych, więc jest to przestrzeń rzeczywista $N + N(N-1) = N^2$ wymiarowa. Izomorfizm wybieramy tak, aby $\langle A|B \rangle = Tr(AB)$.

Zobaczmy, że $Tr(A^2) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^N (a_{ii})^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} ((\Re(a_{ij}))^2 + (\Im(a_{ij}))^2)$. Izomorfizm $M_N(\mathbb{C})_{\text{s.a.}} \cong \mathbb{R}^{N^2}$ jak wyżej oznacza, że $\{A \in M_N(\mathbb{C})_{\text{s.a.}} : Tr(A^2) \leq R^2\}$ przechodzi na kulę $B_{N^2}(0, R)$. Λ – cofnięcie kanonicznej miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}^{N^2}$ do $M_N(\mathbb{C})_{\text{s.a.}}$. Ogólne n : produkt kartezjański takich miar.

Zauważmy, że $(A_1, \dots, A_n) \in \Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon)$ spełnia $\frac{1}{N} Tr(A_1^2 + \dots + A_n^2) \leq \tau(x_1^2 + \dots + x_n^2) + n\varepsilon =: c^2$. Zatem $\Gamma(X_1, \dots, X_n; N, r, \varepsilon) \subseteq B_{nN^2}(c\sqrt{N})$. Objętość kuli spełnia

$$\frac{1}{N^2} \log(\Lambda(B_{nN^2}(c\sqrt{N}))) = \frac{1}{N^2} \log \frac{(c\sqrt{N\pi})^{nN^2}}{\Gamma(1 + \frac{nN^2}{2})} \sim -\frac{n}{2} \log N$$

Faktycznie, wystarczy użyć, że $\Gamma(1 + \frac{nN^2}{2}) \sim \sqrt{\pi n} N (\frac{nN^2}{2e})^{\frac{nN^2}{2}}$ i proste manipulacje pokazują dokładnie, że

$$\frac{1}{N^2} \log \frac{(c\sqrt{N\pi})^{nN^2}}{\Gamma(1 + \frac{nN^2}{2})} \sim -\frac{n}{2} \log N + \frac{n}{2} \log \left(\frac{2\pi e c^2}{n} \right)$$

3.3. Własności χ .

- (1) Dla $n = 1$ pytanie, czy w definicji entropii daje się wymienić granicę górną na granicę ma pozytywną odpowiedź. Co więcej, istnieje analityczna formuła wyliczająca $\chi(x)$ (jej dowód jest dość trudny):

$$\chi(x) = \iint \log |s - t| d\mu_x(s) d\mu_X(s) + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{3}{4}$$

co jest w zgodzie z oryginalną motywacją (tutaj zakładamy, że $\tau(x^2) = 1$).

- (2) χ jest subaddytywne: $\chi(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) \leq \chi(x_1, \dots, x_s) + \chi(x_{s+1}, \dots, x_n)$. Powodem, dla którego tak jest, jest prosta obserwacja, że

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n; N, r, \varepsilon) \subseteq \Gamma(x_1, \dots, x_s; N, r, \varepsilon) \times \Gamma(x_{s+1}, \dots, x_n; N, r, \varepsilon)$$

- (3) χ jest górnio półciągłe: jeśli $(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \xrightarrow{\text{distr}} (x_1, \dots, x_n)$ jak $m \rightarrow \infty$, to $\chi(x_1, \dots, x_n) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \chi(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$. Powodem, dla którego tak jest, jest następująca obserwacja. Ustalając $\varepsilon > 0$, $r \geq 1$ znajdziemy m_0 takie, że dla $m \geq m_0$, $\forall 1 \leq k \leq r \forall 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ $|\tau^{(m)}(X_{i_1}^{(m)} \dots X_{i_k}^{(m)}) - \tau(X_{i_1} \dots X_{i_k})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ale wtedy

$$\Gamma(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}; N, r, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq \Gamma(x_1, \dots, x_n; N, r, \varepsilon)$$

- (4) Jeśli $x_1, \dots, x_n$: wolne, to $\chi(x_1, \dots, x_n) = \chi(x_1) + \dots + \chi(x_n)$. To wymaga nieba-nalnego dowodu.

3.4. Addytywność entropii wolnych zmiennych. W ramach przygotowań:

- (1) $U(N)$ – grupa unitarna przestrzeni $\mathbb{C}^k$, μ – jej znormalizowana miara Haara.
- (2) $\mathcal{O}(T) = \{UTU^* : U \in U(N)\}$ – orbita $T \in M_N$ przy działaniu $U(N)$ przez sprzężenia.
- (3) będziemy używać zbiorów mikrostanów niekoniecznie samosprzężonych elementów, wówczas w definicji postulujemy, by jednomiany uwzględniały również gwiazdki tych niesamosprzężonych elementów; gwiazdka nie zmienia stopnia. Oznaczenie $\Gamma(\underline{x}n; y; N, r, \varepsilon)$, gdzie x_i samosprzężone, y_j niesamosprzężone.

Lemat 3.3 (Voiculescu '91). $U_0, \dots, U_n$ – elementy unitarne z rozkładem Haara, tj. $\tau(U_j^k) = \delta_{k,0}$, wolne w (M, τ) ; $r \geq 1, \varepsilon > 0$. Niech $W(N) = \text{diag}(\exp(\frac{j}{N} \cdot 2\pi i) : 0 \leq j \leq N-1)$. Niech

$$\omega_N = \{(V_1, \dots, V_n) \in (U(N))^n : (W(N), V_1, \dots, V_n) \in \Gamma(U_0, \dots, U_n; N, r, \varepsilon)\}$$

Wówczas $\mu^{\otimes n}(\omega_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$.

Lemat 3.4. $U_1, \dots, U_n$ – elementy unitarne z rozkładem Haara, $X = X^*$ o rozkładzie jednostajnym $[0, 1]$; $X, U_1, \dots, U_n$ – wolne w (M, τ) . Niech $r \geq 1, \varepsilon > 0, h_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq n$): ciągłe. Jeśli $D_j(N) = \text{diag}(h_j(\frac{s}{N}) : 0 \leq s \leq N-1)$ oraz

$$\omega_N = \{(V_1, \dots, V_n) \in (U(N))^n : (D_1(N), \dots, D_n(N), V_1, \dots, V_n) \in \Gamma(h_1(X), \dots, h_n(X); U_1, \dots, U_n; N, r, \varepsilon)\}$$

to $\mu^{\otimes n}(\omega_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$.

Szkic dowodu: jeśli $h_j(t) = P_j(\exp(2\pi it))$, to teza wynika z poprzedniego lematu (przy zmianie $r \geq 1, \varepsilon > 0$). Ogólnie: wystarczy wziąć aproksymacje wielomianami funkcji ciągłych w L^2 .

Lemat 3.5. $U_1, \dots, U_n, X$ – jak wcześniej. Niech $h_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie C^1 oraz ściśle rosnąca. Niech

$$\Omega(h_j, N) = \{A \in M_N(\mathbb{C})_{s.a.} : h_k(\frac{2s}{2N}) \leq \lambda_{s+1}(A) \leq h_j(\frac{2s+1}{2N}), 0 \leq s \leq N-1\}$$

gdzie $(\lambda_1(A), \dots, \lambda_N(A)) = \sigma(A) \in \mathbb{R}_{\geq}^n$. Niech

$$\Theta(N) = \left(\prod_{j=1}^n \Omega(h_j, N) \right) \cap \Gamma(U_1 h_1(X) U_1^*, \dots, U_n h_n(X) U_n^*; N, r, \varepsilon).$$

Wówczas $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(\Theta(N))}{\Lambda(\prod_{j=1}^N \Omega(h_j, N))} = 1$

Dowód. Niech $\Delta_N = \{\text{diag}(\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_N^{(j)})_{1 \leq j \leq n} : h_j(\frac{s}{k}) \leq \lambda_{s+1}^{(j)} \leq h_j(\frac{2s+1}{2k}), 1 \leq j \leq n, 0 \leq s \leq N-1\}$. Ponieważ przy sprzęganiu przez operator unitarny spektrum macierzy się nie zmienia,

$$\prod_{j=1}^n \Omega(h_j, N) = \bigsqcup_{(T_1, \dots, T_n) \in \Delta_N} \left(\prod_{j=1}^n \mathcal{O}(T_j) \right).$$

W takim razie teza wyniknie, jeśli pokażemy, że

$$\frac{\Lambda(\prod_{j=1}^n \mathcal{O}(T_j) \cap \Theta(N))}{\Lambda(\prod_{j=1}^n \mathcal{O}(T_j))} \geq \eta_N$$

gdzie $\eta_N \rightarrow 1$ wraz z $N \rightarrow \infty$ oraz η_N nie zależy od wyboru $T_1, \dots, T_n$.

Użyjemy zbioru ω_N z poprzedniego lematu przy $r_1 = 3r$ oraz ε_1 bardzo małym. Pokażemy, że

$$m_{(T_1, \dots, T_n)}(\omega_N) = m(\omega_N) \subseteq \prod_{j=1}^n \mathcal{O}(T_j) \cap \Theta(N)$$

gdzie $m(V_1, \dots, V_n) = (V_1 T_1 V_1^*, \dots, V_n T_n V_n^*)$.

(1) $m(\Omega_N) \subseteq \prod_{j=1}^n \mathcal{O}(T_j)$: jasne, z definicji m .

(2) $m(\Omega_N) \subseteq \prod_{j=1}^n \Omega(h_j, N)$: jasne, z definicji $\Omega(h_j, N)$ i faktu, że spektrum się nie zmienia.

(3) $m(\Omega_N) \subseteq \Gamma(U_1 h_1(X) U_1^*, \dots, U_n h_n(X) U_n^*; N, r, \varepsilon)$: to wymaga analizy.

Z definicji ω_N mamy, że V_j dobrze aproksymują U_j ; $D_j(N)$ dobrze aproksymują $h_j(X)$, wystarczy zatem pokazać, że T_j dobrze aproksymują $D_j(N)$.

Zauważmy, że dla $A \in \Omega(h_j, N)$ oraz $D_j = \text{diag}(h_j(\frac{s}{N}) : 0 \leq s \leq N-1)$ istnieje $U \in U(N)$ takie, że

$$\|A - U D_j U^*\| \leq \sum_{s=0}^{N-1} |h_j(\frac{s}{N}) - h_j(\frac{2s+1}{2N})|^2 \leq \|h'_j\|_\infty^2 \sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{(2N)^2} = \frac{C}{N}$$

i C nie zależy od N ani A . To dowodzi ostatniej “dobrej aproksymacji” przy pomocy nierówności trójkąta (można sprawdzić, że trzeba ε_1 takiego, by $\varepsilon_1 + \frac{3Cr}{N} \leq \varepsilon$).

Pozostaje: ponieważ m jest $U(N)^n$ -niezmiennicze, zaś $U(N)^n$ oraz $\prod_{j=1}^n \mathcal{O}(T_j)$ mają jedyne $(U(N))^n$ -niezmiennicze miary probabilistyczne: Λ na $\prod_{j=1}^n \mathcal{O}(T_j)$ jest proporcjonalna do $m_* \mu^{\otimes n}$. Bierzemy $\mu^{\otimes n}(\omega_N) \leq \omega^{\otimes n}(m^{-1}(m(\omega_N))) = m_* \mu^{\otimes n}(m(\omega_N)) = \eta_N$. $\square$

Dowód addytywności entropii przy założeniu wolności. $\leq$ mamy zawsze, wystarczy udowodnić $\geq$. Załóżmy najpierw, że X_j mają rozkład μ_j o nośniku $[a, b]$, na którym mają C^1 dystrybuantę o ściśle dodatniej pochodnej. Zamiast dla X_j zmienimy model: możemy przyjąć, że $X_j = U_j h_j(X) U_j^*$, gdzie $X, U_1, \dots, U_n$ są jak w poprzednim lemacie.

Używając oznaczeń poprzedniego lematu mamy, że

$$\lim \log \Lambda(\Theta(N)) - \log(\Lambda(\Omega(h_1, N) \times \dots \times \Omega(h_n, N))) = 0$$

Stąd, porzez podzielenie przez $\frac{1}{N^2}$ i dodatnie modyfikatora $\frac{n}{2} \log N$ mamy, że

$$\chi(X_1, \dots, X_n; r, \varepsilon) \geq \sum_{j=1}^n \limsup_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N^2} \log(\Lambda(\Omega(h_j, N))) + \frac{1}{2} \log N \right)$$

czyli

$$\chi(X_1, \dots, X_n; r, \varepsilon) \geq \sum_{j=1}^n \chi(X_j)$$

i bierzemy granicę po r, ε . Dlaczego możemy mieć to dodatkowe założenie? Ze względu na górną półciągłość entropii, która daje nierówność w dobrą stronę, pod warunkiem, że potrafimy znaleźć takie aproksymacje $X_i^{(m)}$, by $\chi(X_i^{(m)}) \rightarrow \chi(X_i)$. Taka aproksymacja jest możliwa: wystarczy wziąć $\tilde{\mu}_m = \mu * P_{\frac{1}{m}}$, gdzie $P_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ jest jądrem Poissona. Ono ma następującą własność: $P_\varepsilon * \log |\cdot| = \log |\cdot| + i\varepsilon$, zatem logarytmiczne energie (jednowymiarowe entropie) zbiegają (dzięki – nieudowodnionej tutaj – analitycznej formule na jednowymiarową entropię). Aby wszystko było dobrze, trzeba jeszcze przyciąć $\tilde{\mu}_m$ do odcinka $[-m, m]$ i renormalizować do miary probabilistycznej. $\square$

3.5. Zastosowania. Przedstawimy dwa zastosowania skończoności wolnej entropii układu operatorów $x_1, \dots, x_n \in M_{s.a.}$ dla opisu własności algebrooperatorowych $W^*(x_1, \dots, x_n)$, tj: brak własności Γ oraz brak algebr Cartana, oba należą do Voiculescu, i w obu strategia z grubsza jest następująca: przetłumaczyć te własności na własności aproksymant w zbiorze mikrostanów i pokazać, że z dokładnością do zbioru małej miary, zbiór mikrostanów zawiera się nie tylko w produkcie n -kopp N -wymiarowych kul, ale wręcz w iloczynie kartezjańskim n -kopp zbiorów będących produktami niżej wymiarowych kul, z dokładnością do zamiany bazy (wspólnie dla układu n aproksymant). Da to lepsze szacowania na objętość zbioru mikrostanów z góry, które będą zależeć od pewnego parametru, który to parametr, gdy zbiega do zera, wymusza, by entropia układu generatorów $x_1, \dots, x_n$ wynosiła $-\infty$. Używać będziemy następującego wyniku:

Twierdzenie 3.6 (S. Szarek). *Istnieje stała uniwersalna $C > 0$ o następującej własności: dla $\delta > 0$, $0 \leq q_1, \dots, q_l, N \in \mathbb{Z}$ takich, że $q_1 + \dots + q_l \leq N$, istnieje δ -sieć $(U_s)_{s \in S} \subseteq U(N) / U(q_1) \times U(q_2) \times \dots \times U(q_l)$ o liczności $|S| \leq \left(\frac{C}{\delta} \right)^{N^2 - q_1^2 - \dots - q_l^2}$.*

Użyjemy tego twierdzenia dla $l = 0$ oraz dla $l = 2$, $q_2 = N - q_1$.

3.6. Brak własności Γ .

Definicja 3.7. Ciąg $(t_k)_{k \geq 1}$ w (M, τ) spełniający $\forall_{x \in M} \lim_{k \rightarrow \infty} \|xt_k - t_kx\|_2 = 0$ nazwiemy ciągiem *asymptotycznie centralnym*. Jeśli ciąg asymptotycznie centralny spełnia $\lim_{k \rightarrow \infty} \|t_k - \tau(t_k)\mathbb{1}\|_2 = 0$, to powiemy, że jest *trywialny*. Powiemy, że (M, τ) ma własność Γ , jeśli istnieje nietrywialny ciąg asymptotycznie centralny w M .

Uwaga 3.8. Ciąg centralny (tj. zawarty w $\mathcal{Z}(M)$) jest, oczywiście, asymptotycznie centralny. Stąd brak własności Γ implikuje bycie faktorem.

Twierdzenie 3.9. Niech $x_1, \dots, x_n \in M_{s.a.}$. Jeśli $\chi(\underline{x}) > -\infty$, to $W^*(\underline{x})$ nie ma własności Γ .

Lemat 3.10. (M, τ) - skończona algebra von Neumanna, generowana przez $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) takie, że $\tau(x_i^2) \leq 1$. Niech $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ oraz $p \in M$: rzut będą takie, że $\theta < \tau(p) < 1 - \theta$. Jeśli $n \geq 2$, to istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$, zależne tylko od θ i n takie, że jeśli $\|px_i - x_i p\|_2 < \omega$, to $\chi(\underline{x}) \leq C_1 + C_2 \log \omega$

Dowód twierdzenia. Jeśli $(t_k)_k$ jest nietrywialnym ciągiem asymptotycznie centralnym, to jego części rzeczywista i urojona są ciągami asymptotycznie centralnymi elementów samosprzężonych, co najmniej jeden z nich nietrywialny. Rachunek spektralny pozwala nam na wymienienie ich na asymptotycznie centralny ciąg projektorów takich, że $\theta < \tau(p_k) < 1 - \theta$ dla pewnego $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Korzystając z lematu dla p_k z k coraz większym otrzymujemy, że $\chi(\underline{x}) \leq C_1 + C_2 \log \omega_k \rightarrow -\infty$, sprzeczność. $\square$

Dowód lematu (pochodzący od P. Biane'a). Niech $(A_1, \dots, A_n) \in \Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon)$ dla $\varepsilon > 0$ małego i r, N - dużego. Operator p jest $\|\cdot\|_2$ -granica wielomianów w $x_1, \dots, x_n$, niech rzut $Q \in M_n(\mathbb{C})_{s.a.}$ będzie kopią p w $\Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon)$. Niech $\dim Q\mathbb{C}^N = q = \lfloor N\tau(p) \rfloor$. Diagonalizując Q mamy:

$$Q = U \begin{bmatrix} \mathbb{1}_q & 0 \\ 0 & 0_{N-q} \end{bmatrix} U^*$$

dla pewnego $U \in U(N) / U(q) \times U(N-q)$ (tzn. nie ma znaczenia wybór bazy w obrębie $Q\mathbb{C}^N$ oraz w obrębie $(Q\mathbb{C}^N)^\perp$). Niech

$$U^* A_i U = \begin{bmatrix} A_i & C_i^* \\ C_i & D_i \end{bmatrix}$$

Tłumacząc $\|[A_i, Q]\|_{2,tr} < 2\omega$ w bazie otrzymanej przez sprzężenie przez U mamy:

$$\sqrt{\frac{2}{N} \text{Tr}(C_i C_i^*)} = \left\| \begin{bmatrix} 0 & C_i^* \\ C_i & 0 \end{bmatrix} \right\|_{2,tr} = \left\| \begin{bmatrix} A_i & C_i^* \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbb{1}_q & 0 \\ 0 & 0_{N-q} \end{bmatrix} \right\|_{2,tr} = \|[A_i, Q]\|_{2,tr} < 2\omega$$

Stąd $\text{Tr}(C_i C_i^*) < \frac{N}{2}(2\omega)^2 = 2N\omega^2$. Dalej, skoro $\text{tr}(A_i^2) \leq 1 + \varepsilon$, stąd $\text{Tr}(A_i^2) \leq (1 + \varepsilon)N \leq 2N$, i w szczególności $\text{Tr}(B_i^2), \text{Tr}(D_i^2) \leq 2N$. Teraz, $M_n(\mathbb{C})_{s.a.} \cong \mathbb{R}^{N^2}$ oznacza, że:

- B_i zawiera się w kuli o promieniu $\sqrt{2N}$ w podprzestrzeni wymiaru q^2 ,
- D_i zawiera się w kuli o promieniu $\sqrt{2N}$ w podprzestrzeni wymiaru $(N-q)^2$,
- C_i zawiera się w kuli o promieniu $\sqrt{4N}\omega$ w podprzestrzeni wymiaru $2q(N-q)$.

Konkludując, mamy, że

$$\Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{U \in U(N)/U(q) \times U(N-1)} \left[U \left(B_{q^2}(\sqrt{2N}) \times B_{2q(N-q)}(\omega\sqrt{4N}) \times B_{(N-q)^2}(\sqrt{2N}) \right) U^* \right]$$

Korzystając z twierdzenia Szarka znajdujemy δ -sieć $(U_s)_{s \in S}$ w $U(N)/U(q) \times U(N-q)$, dzięki której mamy, że

$$(3.1) \quad \Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{s \in S} \left[U_s \left(B_{q^2}(\sqrt{2N}) \times B_{2q(N-q)}((\omega + 4\delta)\sqrt{4N}) \times B_{(N-q)^2}(\sqrt{2N}) \right) U_s^* \right]$$

Istotnie, jeśli $\|U - U_s\| \leq \omega$, to

$$\| [U_s^* A_i U_s, U^* Q U] \| \leq 2\omega + 8\delta$$

Zamieniając rolę U na U_s otrzymujemy (3.1). W takim razie

$$\Lambda(\Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon)) \leq \left(\frac{C}{\delta} \right)^{N^2 - q^2 - (N-q)^2} \left(\frac{(2N)^{\frac{q^2}{2}} ((\omega + 4\delta)^2 4N)^{q(N-q)} (2N)^{\frac{(N-q)^2}{2}} \pi^{\frac{N^2}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{q^2}{2}) \Gamma(1 + q(N-q)) \Gamma(1 + \frac{(N-q)^2}{2})} \right)^n$$

Korzystając ze wzoru Stirlinga otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \log \Lambda(\Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon)) \\ & \lesssim K + (1 - 2\theta^2) \log \frac{1}{\delta} + 2n(1 - \theta)^2 \log(\omega + 4\delta) + \frac{n}{2N^2} \log N \left(q^2 + (N-q)^2 + 2q(N-q) \right) \\ & \quad - \frac{n}{2N^2} \left(q^2 \log q^2 - 2q(N-q) \log q(N-q) - (N-q)^2 \log(N-q)^2 \right) \\ & \leq K + \tilde{C}_2 \left(\log \frac{1}{\delta} + n \log(\omega + 4\delta) \right) + \frac{n}{2} \log N - \frac{n}{2N^2} \log(\theta N)^2 \left(q^2 + 2q(N-q) + (N-q)^2 \right) \\ & = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \left(\log \frac{1}{\delta} + n \log(\omega + 4\delta) \right) - \frac{n}{2} \log N \end{aligned}$$

Gdzie K zaabsorbowało stałą Szarka i stałe wynikające z pojawiania się wyrażeń typu $\log 2N$, $\log 4N$ etc. ze współczynnikami postaci $n\theta^2$ itd. W konsekwencji

$$\frac{1}{N^2} \log \Lambda(\Gamma(X_1, \dots, X_n; N, r, \varepsilon)) + \frac{n}{2} \log N \leq \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \left(\log \frac{1}{\delta} + n \log(\omega + 4\delta) \right)$$

Kładąc $\delta = \omega$ mamy tezę przy $C_1 = \tilde{C}_1 + n \log 5$ i $C_2 = (n-1)\tilde{C}_2$. $\square$

Uwaga 3.11. Warto zwrócić uwagę, że dla $n = 1$ wszystko również działa, tylko wówczas $C_2 = 0$, a więc mamy górne oszacowanie entropii przez stałą – to nie jest zbyt użyteczne. Wyjaśnienie konceptualne tego zjawiska jest takie, że o ile zachodzenie pewnego zjawiska dla jednego operatora samosprzężonego w ustalonej bazie nie jest niczym dziwnym: i tak można go zdiagnozować i przeprowadzić klasyczną analizę tego zjawiska; o tyle znalezienie bazy, w której kilka operatorów samosprzężonych można poddać odpowiedniej analizie (w tym wypadku: małe w normie Hilberta-Schmidta bloki pozadiagonalne), jest nietrywialnym zjawiskiem.

3.7. Modyfikacja entropii. Potrzebujemy następującej technicznej modyfikacji entropii: ustalmy $x_1, \dots, x_n \in M_{\text{s.a.}}$ – zmienne nieprzemienne, które chcemy badać, oraz referencyjne operatory $y_1, \dots, y_m \in M_{\text{s.a.}}$. Będzie nas interesować zbiór mikrostanów

$$\Gamma(\underline{x} : \underline{y}; N, r, \varepsilon) = \left\{ (A_1, \dots, A_n) \in M_N(\mathbb{C})_{\text{s.a.}} \mid \exists (B_1, \dots, B_m) \in M_N(\mathbb{C})_{\text{s.a.}}^n \begin{array}{l} \text{distr}_{\underline{r}}^{\leq r}(\underline{x}, \underline{y}) \approx_{\varepsilon} \\ \approx_{\varepsilon} \text{distr}_{\underline{r}}^{\leq r}(\underline{A}, \underline{B}) \end{array} \right\}$$

Innymi słowy, $\Gamma(\underline{x} : \underline{y}; N, r, \varepsilon)$ to rzut na pierwsze n osi zbioru $\Gamma(\underline{x}, \underline{y}; N, r, \varepsilon) \subseteq M_n(\mathbb{C})_{\text{s.a.}}^{n+m}$.

Reszta formuł (definiujących entropię) pozostaje taka sama, dowody podstawowych własności zasadniczo również. Mamy nową własność:

Lemat 3.12. *Jeśli $z_1, \dots, z_l \in W^*(y_1, \dots, y_m)$, to $\chi(\underline{x} : \underline{y}) \leq \chi(\underline{x} : \underline{z})$.*

Szkic dowodu. $z_j = s - \lim_{t \rightarrow \infty} P_j^{(t)}(\underline{y}) =: \lim_{t \rightarrow \infty} z_j^{(t)}$. Zatem dla odpowiednio dużego r, t mamy, że

$$\Gamma(\underline{x}, \underline{z}; N, r, 2\varepsilon) \supset \Gamma(\underline{x}, \underline{z}^{(t)}; N, r, \varepsilon)$$

Z drugiej strony łatwo widać, że

$$\Gamma(\underline{x} : \underline{z}; N, r, 2\varepsilon) \supset \Gamma(\underline{x} : \underline{y}; N, r', \varepsilon')$$

dla dostatecznie dużego r' i dostatecznie małego $\varepsilon' > 0$. Wobec tego

$$\chi(\underline{x} : \underline{z}; r, 2\varepsilon) \geq \chi(\underline{x} : \underline{y}; r', \varepsilon') \geq \chi(\underline{x} : \underline{y})$$

□

Wniosek 3.13. *Przy oznaczeniach jak wyżej*

- (1) $\chi(\underline{x} : \underline{y}) = \chi(\underline{x} : \underline{y}, \underline{x})$,
- (2) $\chi(\underline{x} : \underline{y}) = \chi(\underline{x} : \underline{y}, \underline{z})$, jeśli $Z_1, \dots, Z_l \in W^*(\underline{x}, \underline{y})$.

Dowód. (1) $\geq$ mamy z poprzedniego lematu. By uzasadnić $\leq$ wystarczy zauważyć, że

$$(\underline{A}, \underline{B}) \in \Gamma(\underline{x}, \underline{y}; N, r, \varepsilon) \implies (\underline{A}, \underline{B}, \underline{A}) \in \Gamma(\underline{x}, \underline{y}, \underline{x}; N, r, \varepsilon)$$

Zatem $\Gamma(\underline{x} : \underline{y}, \underline{x}; N, r, \varepsilon) \supset \Gamma(\underline{x} : \underline{y}; N, r, \varepsilon)$

(2) $\geq$ jest oczywiste. Używając, kolejno, poprzedniej części wniosku i lematu raz jeszcze:

$$\chi(\underline{x} : \underline{y}) = \chi(\underline{x} : \underline{y}, \underline{x}) \leq \chi(\underline{x} : \underline{y}, \underline{z})$$

□

3.8. Brak algebr Cartana. Szacowania.

Twierdzenie 3.14. *Niech $x_j = x_j^* \in M$, $1 \leq j \leq n$, $\mathbf{1} \in B \subset W^*(X_1, \dots, X_n)$. Niech dany będzie ciąg liczbowy $(p(j))_{1 \leq j \leq n}$ oraz $x_{ij} \in p_{ij} M q_{ij}$ dla pewnych projektorów $p_{ij}, q_{ij} \in B$, $1 \leq i \leq p(j)$, $1 \leq j \leq n$ o następujących własnościach:*

- (1) $\|x_j - \sum_{i=1}^{p(j)} x_{ij} + x_{ij}^*\|_2 < \omega$,
- (2) $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p(j)} \tau(p_{ij}) \tau(q_{ij}) < \theta$,
- (3) $\|x_j\|_2 < a$ oraz $2\omega < a$.

Wówczas

$$\chi(\underline{x}) \leq (1 + 2\theta) \log a + (n - 2\theta - 1) \log \omega + \frac{n}{2} \log 8\pi e + \log(2C)$$

gdzie C to stała Szarka dla $U(n)$.

Dowód. Niech $\Omega \subset B$: jednostki macierzowe. Będziemy używać (udowodnionego w poprzedniej sekcji) faktu, że $\chi(\underline{x} : \Omega) = \chi(\underline{x})$.

Krok 1. Ustalmy $\delta > 0$. Można do niego dobrać $r \geq 2$ (duże), $\varepsilon > 0$ (małe) oraz $N_0 \leq 1$ takie, że dla każdego $N \geq N_0$ i dla dowolnego $((A_j)_{j=1}^n, (T(e))_{e \in \Omega}) \in \Gamma(\underline{x}, \Omega; N, r, \varepsilon)$ istnieje $*$ -homomorfizm $\rho: B \rightarrow M_N$ taki, że $\rho(e) \approx_\delta T(e)$ w $\|\cdot\|_{2, tr_N}$ oraz $\tau \upharpoonright_B \approx_\delta tr_N \circ \rho$ w $\|\cdot\|$.

Krok 2. Przy danym $\eta > 0$ można dobrać $\delta > 0$ o następującej własności. Dla dowolnego $N \geq 1$, jeśli $\rho, \rho': B \rightarrow M_N$ są $*$ -homomorfizmami takimi, że $tr_N \circ \rho \approx_{2\delta} tr_N \circ \rho'$, to istnieje $U \in U(N)$ takie, że $Ad_U \circ \rho(b) \approx_{\eta\|b\|} \rho'(b)$ w $\|\cdot\|_2$.

Krok 3. Dla $N \geq N_0$ z wybieramy $\rho_N: B \rightarrow M_N$ takie, że $\|tr_N \circ \rho_N - \tau \upharpoonright_B\| < \delta$.

Krok 4. Rozważmy przestrzeń V_N taką, że

$$\left\{ \left(\sum_{i=1}^{p(j)} (T_{ij} + T_{ij}^*) \right)_{j=1}^n \in M_N(\mathbb{C})_{s.a.}^n \mid T_{ij} \in \rho_N(p_{ij}) M_N \rho_N(q_{ij}) \right\} \subseteq V_k \subseteq M_N(\mathbb{C})_{s.a.}^n.$$

Zauważmy, że przestrzeń $\rho_N(p_{ij}) M_N(\mathbb{C}) \rho_N(q_{ij})$ jest wymiaru $N^2 tr_N(\rho_N(p_{ij})) tr_N(\rho_N(q_{ij}))$. Zatem przestrzeń z lewej strony inkluzji ma wymiar

$$\begin{aligned} &\leq N^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p(j)} tr_N(\rho(p_{ij}) tr_N(\rho_N(q_{ij}))) < N^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p(j)} (\tau(p_{ij}) + \delta) (\tau(q_{ij}) + \delta) \\ &= N^2 \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p(j)} \tau(p_{ij}) \tau(q_{ij}) + \delta \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p(j)} \tau(p_{ij}) + \delta \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p(j)} \tau(q_{ij}) + \delta^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p(j)} 1 \right) < N^2 \theta \end{aligned}$$

dla dostatecznie małego δ . Możemy zatem wybrać V_N takie, by $\dim V_N = \lfloor 2N^2 \theta \rfloor$.

Krok 5. Dla δ jak w kroku 4 możemy dobrać $\varepsilon > 0$, $r \geq 1$, N_0 z kroku 1. i 2. tak, by dla $\underline{A} \in \Gamma(\underline{x} : \Omega; N, r, \varepsilon)$ istniał $(T_1, \dots, T_n) \in V_k$ oraz $U \in U(N)$ takie, że $\|U A_j U^* - T_j\|_2 < \omega$.

Krok 6. Użyjemy twierdzenia S. Szarka: istnieje α -sieć $(U_s)_{s \in S} \subset U(N)$ względem metryki

jednostajnej taka, że $|S| \leq \left(\frac{C}{\alpha} \right)^{N^2}$ dla pewnej stałej uniwersalnej C .

Krok 7. Przy oznaczeniu $a = \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|_2^2 + \varepsilon$ mamy, że

$$\forall \underline{A} \in \Gamma(\underline{x}; \Omega; N, r, \varepsilon) \exists \underline{T} \in V_N \exists_{s \in S} \|U_s A_j U_s^* - T_j\|_2 < \omega + 2\alpha a$$

Niech $B_N \subset V_N$ to kula o promieniu $(nN)^{\frac{1}{2}} a$, niech $B'_N \subset (M_N(\mathbb{C})_{s.a.})^n \ominus V_k$ będzie kulą o promieniu $(nN)^{\frac{1}{2}} (\omega + 2\alpha a)$ (ze względu na nieznormalizowany ślad)

$$\Gamma(\underline{x} : \Omega; N, r, \varepsilon) \subset \bigcup_{s \in S} U_s^{\oplus n} (B_N \oplus B'_N) (U_s^{\oplus n})^*$$

(dobierzemy α tak, by $\omega + 2\alpha a \leq a$). Stąd:

$$\Lambda(\Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon)) \leq |S| \Lambda(B_N) \Lambda(B'_N) \leq \left(\frac{C}{\alpha} \right)^{N^2} \pi^{\frac{nN^2}{2}} \frac{(nN)^{\frac{nN^2}{2}} a^{\lfloor 2N^2 \theta \rfloor} (\omega + 2\alpha a)^{nN^2 - \lfloor 2N^2 \theta \rfloor}}{\Gamma(1 + \frac{\lfloor 2N^2 \theta \rfloor}{2}) \Gamma(1 + \frac{nN^2 - \lfloor 2N^2 \theta \rfloor}{2})}$$

Korzystając ze wzoru Stirlinga otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned}
\chi(\underline{x}) &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N^2} \log \Lambda(\Gamma(\underline{x}; N, r, \varepsilon)) + \frac{n}{2} \log N \right) \\
&\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \left(\log \frac{C}{\alpha} + \frac{n}{2} \log(\pi n N^2) + 2\theta \log a + (n - 2\theta) \log(\omega + 2\alpha a) \right. \\
&\quad \left. - \theta \log \frac{N^2 \theta}{e} - \frac{n - 2\theta}{2} \log \frac{(n - 2\theta) N^2}{2e} \right) \\
&= \log \frac{C}{\alpha} + \frac{n}{2} \log(\pi n) + 2\theta \log a + (n - 2\theta) \log(\omega + 2\alpha a) - \theta \log \frac{\theta}{e} - \frac{n - 2\theta}{2} \log \frac{n - 2\theta}{2e} \\
&= \log \frac{C}{\alpha} + \frac{n}{2} \log(\pi n e) + 2\theta \log a + (n - 2\theta) \log(\omega + 2\alpha a) - \theta \log \theta - \left(\frac{n}{2} - \theta \right) \log \left(\frac{n}{2} - \theta \right) \\
&= \log \frac{C}{\alpha} + \frac{n}{2} \log(\pi n e) + 2\theta \log a + (n - 2\theta) \log(\omega + 2\alpha a) \\
&\quad - \frac{n}{2} \left(\frac{2\theta}{n} \log \frac{2\theta}{n} - \left(1 - \frac{2\theta}{n} \right) \log \frac{n - 2\theta}{n} \right) - \frac{n}{2} \log n \\
&\leq \log \frac{C}{\alpha} + \frac{n}{2} \log(2\pi e) + 2\theta \log a + (n - 2\theta) \log(\omega + 2\alpha a)
\end{aligned}$$

Gdzie w drugiej nierówności użyliśmy, że $\lambda \log \lambda + (1 - \lambda) \log(1 - \lambda) \geq -\log 2$. Kładąc $\alpha = \frac{\omega}{2a}$ i używając $(n - 2\theta) \log(2\omega) \leq (n - 2\theta) \log \omega + \frac{n}{2} \log 4$ mamy, że

$$\chi(\underline{x}) \leq (n - 2\theta - 1) \log \omega + \frac{n}{2} \log(8\pi e) + (2\theta + 1) \log a + \log(2C) \quad \square$$

3.9. Brak algebr Cartana. Lokalizacja problemu.

Definicja 3.15. $A \subset B$ – algebry von Neumanna. *Normalizatorem* A w B nazwiemy zbiór

$$\mathcal{N}_B(A) = \{u \in \mathcal{U}(B) | uAu^* = A\}$$

gdzie $\mathcal{U}(B)$ oznacza zbiór elementów unitarnych B . Powiemy, że $A \subset B$ jest *algebrą Cartana*, jeśli A jest maksymalna abelowa oraz $\mathcal{N}_B(A)'' = B$.

Lemat 3.16. Niech B : II_1 faktor, $A \subset B$: podalgebra Cartana, $x_1, \dots, x_n \in B_{s.a.}$ – generatory B . Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje skończeniowymiarowa C^* -algebra $\mathbb{1} \in A_0 \subset A$, $p(j) \in \mathbb{N}$ dla $1 \leq j \leq n$, projektory $p_{ij} \in A_0$ i $q_{ij} \in A_0$ oraz $x_{ij} \in p_{ij} B q_{ij}$ takie, że

$$\|x_j - \sum_{i=1}^{p(j)} (x_{ij} + x_{ij}^*)\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p(j)} \tau(p_{ij}) \tau(q_{ij}) < \varepsilon$$

Twierdzenie 3.17. Niech $x_1, \dots, x_n \in M_{s.a.}$, $n \geq 2$. Jeśli $\chi(\underline{x}) > -\infty$, to $W^*(\underline{x})$ nie ma algebry Cartana.

Dowód twierdzenia. $W^*(\underline{x})$ jest II_1 -faktorem (brak własności Γ). Gdyby istniała algebra Cartana, lemat dawałby nam A_0, p_{ij}, q_{ij} przy $\varepsilon \rightarrow 0$. Wtedy paragraf 3.8 pokazuje, że $\chi(\underline{x}) \leq f(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty$, sprzeczność. $\square$

Dowód lematu. Wykonamy serii redukcji, o których prawdziwości łatwo się przekonać.

Redukcja 1. Wystarczy udowodnić lemat dla x_j – niesamosprzężonych, zastępując pierwszy warunek warunkiem $\|x_j - \sum_{i,j} x_{ij}\|_2 \leq \varepsilon$.

Redukcja 2. Wystarczy udowodnić lemat dla x_j należących do $\|\cdot\|_2$ -gęstej podalgebry: taką jest $\text{span } \mathcal{N}_B(A)$, kosztem zamiany ε .

Redukcja 3. Wystarczy udowodnić lemat dla x_j należących do $\mathcal{N}_B(A)$, gdyż każdy element $\text{span } \mathcal{N}_B(A)$ jest skończoną kombinacją takowych, to wszystko kosztem zamiany ε .

Teraz już musimy coś policzyć, niech więc $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{N}_B(A)$ i niech L będzie takie, że $\frac{m}{L} < \varepsilon$; niech $p_1, \dots, p_L$ – rozkład jedności w A taki, że $\tau(p_i) = \frac{1}{L}$. Niech

$$q_{ij} = u_j p_i u_j^*$$

Mamy, że

$$\sum_{i=1}^L p_i u_j q_{ij} = u_j$$

oraz

$$\sum_{i,j=1}^L \sum_{j=1}^m \tau(p_i) \tau(q_{ij}) = mL \frac{1}{L^2} < \varepsilon$$

Zauważmy jeszcze, że $q_{ij} \in A$ (bo $u_j \in \mathcal{N}_B(A)$), stąd q_{ij}, p_i rozpinają skończeniowymiarową podalgebrę A (abelowa, więc to odpowiada po prostu skończonej rodzinie skończonych podziałów standardowej przestrzeni probabilistycznej, dla których istnieje wspólne zagęszczenie skończone). Kładąc $p(j) = L$ i $p_{ij} = p_i$ oraz $x_{ij} = p_{ij} u_j q_{ij}$ mamy tezę (nawet z $\varepsilon = 0$ w warunku pierwszym). $\square$

4. WOLNA ENTROPIA - PODEJŚCIE NIEMIKROSTANOWE

MATEUSZ WASILEWSKI

4.1. Informacja Fishera. Niech $p(x; \theta)$ - rodzina rozkładów (gęstości), indeksowana parametrem θ . Chcemy, z największą wiarygodnością, znaleźć parametr θ zgodny z próbkowaniem rozkładu empirycznego. Będziemy maksymalizować (ze względu na θ) funkcjonal:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \log \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) = \sum_{i=1}^n \log p(x_i; \theta)$$

(wtedy maksymalizuje się rozkład łączny) – tak otrzymujemy estymator $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$.

Przykład 4.1. $p(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$ – rodzina rozkładów normalnych $N(\theta, 1)$. Wtedy

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 - \frac{n}{2} \log 2\pi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\sum_{i=1}^n (x_i - \theta) = 0 \implies \theta = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Uwaga 4.2. Uwaga: maksimum wykryć “łatwo”, gdy jest “ostre” – wokół niego jest duża zmienność. Będziemy mierzyć “informację”, którą “niesie” ta duża zmienność.

Definicja 4.3. *Informację Fishera rodziny $p(x; \theta)$ nazwiemy funkcjonal*

$$I(\theta) = \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log(p(x; \theta)) \right)^2 p(x; \theta) dx$$

– “mierzy ile informacji uzyskamy estymując funkcjonalem L ”.

Definicja 4.4. Niech X – zmienna losowa o gęstości $p(x)$. Funkcjonal

$$I(X) = \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \log(p(x)) \right)^2 p(x) dx = \int \frac{p'(x)^2}{p(x)} dx$$

nazywamy *informacją Fishera zmiennej X* – “mierzy płaskość rozkładu X : tam, gdzie rozkład jest płaski, mamy mało informacji o najbardziej spodziewanej wartości rozkładu”.

4.2. Tożsamość de Bruijna. X_t – ruch Browna startujący z X , tj. $X_t \sim X + \sqrt{t}G$, gdzie $G \sim N(0, 1)$. Wówczas

$$\frac{d}{dt} S(X_t) = I(X_t)$$

Faktycznie,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \int p_t(x) \log p_t(x) dx &= -\int \dot{p}_t(x) \log p_t(x) dx - \int \dot{p}_t(x) dx \\ &= -\int p_t(x)'' \log p_t(x) dx = \int \frac{p_t(x)'}{p_t(x)} dx = I(X_t) \end{aligned}$$

gdzie kropką oznaczamy pochodną po t , zaś primem – po x . Wówczas korzystamy, kolejno, z równania ciepła $\dot{p}_t(x) = p_t(x)''$ i stałości (jako funkcji t) wielkości $\int p_t(x) dx = 1$ i całkowania przez części.

4.3. Zmienna sprzężona. Niech $X \sim p(x)dx$, $\xi = -\frac{p'}{p}(X)$ oraz $f \in C_c^1(\mathbb{R})$. Mamy:

$$\mathbb{E}[\xi f(X)] = - \int \frac{p'(x)}{p(x)} f(x) p(x) dx = \int f'(x) p(x) dx = \mathbb{E}[f'(X) \cdot 1]$$

Innymi słowy $\langle \xi | f \rangle = \langle 1 | \frac{d}{dx} f \rangle = \langle (\frac{d}{dx})^* 1 | f \rangle$, czyli $\xi = (\frac{d}{dx})^* 1$ w $L^2(pdx)$. Stąd $I(X) = \|\xi\|_{L^2}^2$.

4.4. Wolne różniczkowania.

Definicja 4.5. Niech $A = \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ – nieprzemienne wielomiany w $X_1, \dots, X_n$. Dla $P, Q \in A$ oraz $R \in A^{\otimes 2}$ oznaczamy przez kropkę naturalne działania z obu stron A na $A^{\otimes 2}$, czyli $P.R.Q = (P \otimes 1)R(1 \otimes Q)$. Definiujemy *wolne ilorazy różnicowe*

$$\partial_{X_i} = \partial_i: A \rightarrow A \otimes A$$

przez $\partial_i(1) = 0$, $\partial_i(X_j) = \delta_{ij}1 \otimes 1$ oraz $\partial_i(PQ) = (\partial_i P).Q + P.(\partial_i Q)$. Innymi słowy,

$$\partial_i(X_{i_1} \dots X_{i_n}) = \sum_{k=1}^n \delta_{i, i_k} X_{i_1} \dots X_{i_{k-1}} \otimes X_{i_{k+1}} \dots X_{i_n}$$

Gdy $n = 1$, $\mathbb{C}\langle X \rangle = \mathbb{C}[X]$ oraz $\mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[Y] \cong \mathbb{C}[X, Y]$, wówczas $\partial_X P(x, y) = \frac{P(x) - P(y)}{x - y}$

Twierdzenie 4.6 (wolna nierówność Poincaré'go). *Niech (M, τ) – skończona; $x_1, \dots, x_n \in M_{s.a.}$; $C = \sqrt{2} \max_j \|x_j\|$. Dla dowolnego $P = P^* \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ zachodzi*

$$\|P(x_1, \dots, x_n) - \tau(P(x_1, \dots, x_n))\|_{L^2(M)} \leq C \sum_{i=1}^n \|(\partial_i P)(x_1, \dots, x_n)\|_{L^2(M \otimes M)}$$

Dowód. Skorzystamy z tożsamości (łatwo ją uzasadnić dla jednomianów dzięki formule na ich różniczkowanie z definicji; prawa strona to suma teleskopowa):

$$(4.1) \quad P \otimes 1 - 1 \otimes P = \sum_{j=1}^n [(\partial_j P)(X_j \otimes 1) - (1 \otimes X_j)(\partial_j P)]$$

Oznaczmy $p = P(x_1, \dots, x_n)$, $q_i = \partial_i P(x_1, \dots, x_n)$. B.s.o. $\tau(p) = 0$. Wówczas:

$$\|p \otimes 1 - 1 \otimes p\|_2 \leq 2 \max_j \|x_j\| \sum_{i=1}^n \|q_i\|_2$$

Z drugiej strony (korzystając w przedostatnim kroku, że $\tau \otimes \tau(p \otimes p) = \tau(p)^2 = 0$):

$$\|p \otimes 1 - 1 \otimes p\|_2^2 = \tau \otimes \tau(p^2 \otimes 1 + 1 \otimes p^2 - 2p \otimes p) = 2\tau(p^2) = 2\|p\|_2^2 \quad \square$$

4.5. ∂_i jako operator nieograniczony w $L^2(W^*(\underline{x}))$. Zakładamy, że $x_1, \dots, x_n$ są algebraicznie wolne (nie spełniają żadnych relacji wielomianowych). ∂_i jest gęsto określony, bo $\text{alg}(\underline{x}) \subset D(\partial_i) \subset L^2(W^*(\underline{x}))$. A domykalny? Czyli, czy ∂_i^* jest gęsto określony?

Twierdzenie 4.7. *Założmy, że $1 \otimes 1 \in D(\partial_i^*)$. Wtedy $\mathbb{C}\langle \underline{x} \rangle^{\otimes 2} \subset D(\partial_i^*)$ i dla $P, Q \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, oznaczając $p = P(x_1, \dots, x_n)$, $q = Q(x_1, \dots, x_n)$ mamy wzór:*

$$\partial_i^*(p \otimes q) = p.(\partial_i^*(1 \otimes 1)).q - p(\tau \otimes \text{id})(\partial_i q) - (\text{id} \otimes \tau)(\partial_i p)q =: \xi$$

Dowód. Chcemy sprawdzić, że $\tau(\xi^*R) = \tau \otimes \tau((p \otimes q)^* \partial_i R)$ dla dowolnego $R \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{\otimes 2}$. Innymi słowy, chcemy sprawdzić, że

$$\tau((q \partial_i^*(1 \otimes 1)p - q(\tau \otimes \text{id})(\partial_i p) - (\text{id} \otimes \tau)(\partial_i q)p)R) = \tau \otimes \tau(p \otimes q \partial_i R)$$

Policzmy

$$\begin{aligned} \tau(q \partial_i^*(1 \otimes 1)pR) &= \tau(\partial_i^*(1 \otimes 1)pRq) = (\tau \otimes \tau)(\partial_i(pRq)) \\ &= (\tau \otimes \tau)(\partial_i p \cdot Rq) + \tau \otimes \tau(p \cdot \partial_i R \cdot q) + \tau \otimes \tau(pR \cdot \partial_i q) \end{aligned}$$

Pozostaje porównać lewe i prawe strony. □

4.6. Wolna informacja Fishera.

Definicja 4.8. Ustalamy $x_1, \dots, x_n \in (M, \tau)_{\text{s.a.}}$.

- (1) Powiemy, że $\xi_1, \dots, \xi_n \in L^2(M)$ spełniają równania sprzężoności, jeśli

$$\forall P \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle \quad \tau(\xi_i P(x_1, \dots, x_n)) = \tau \otimes \tau((\partial_i P)(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x_n))$$

- (2) Jeśli ponadto $\xi_1, \dots, \xi_n \in L^2(W^*(x_1, \dots, x_n))$, to powiemy, że $\xi_1, \dots, \xi_n$ są układem zmiennych sprzężonych.

Uwaga 4.9. Rzut na $L^2(W^*(x_1, \dots, x_n))$ zmiennych spełniające równania sprzężoności jest układem zmiennych sprzężonych.

Uwaga 4.10. Układ zmiennych sprzężonych jest jedyny (jeśli istnieje).

Twierdzenie 4.11 (Mai, Speicher, Weber). *Jeśli istnieje układ zmiennych sprzężonych dla $x_1, \dots, x_n$, to $x_1, \dots, x_n$ są algebraicznie wolne oraz $\xi_i = (\partial_i)^*(1 \otimes 1)$*

Definicja 4.12. Definiujemy wolną informację Fishera wzorem:

$$\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \sum_i \|\xi_i\|_2^2 & \text{jeśli } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ jest układem zmiennych sprzężonych} \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

4.7. Własności wolnej informacji Fishera.

- (1) Superaddytywność: $\Phi^*(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \geq \Phi^*(x_1, \dots, x_n) + \Phi^*(y_1, \dots, y_m)$ (bo rzut jest kontrakcją)
- (2) Nierówność Cramera-Rao: $\Phi^*(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{n^2}{\tau(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$ (ze względu na nierówność Schwartza dla $\ell^2(n)$ oraz $\partial_i X_j = \delta_{ij} 1 \otimes 1$).
- (3) Wolna nierówność Stama: jeśli $\{x_1, \dots, x_n\} \amalg \{y_1, \dots, y_n\}$, to

$$\Phi^*(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^{-1} \geq \Phi^*(x_1, \dots, x_n)^{-1} + \Phi^*(y_1, \dots, y_n)^{-1}$$

- (4) Gdy $n = 1$, to $\Phi^*(x) = \frac{4}{3}\pi^2 \int p(u)^3 du$, jeśli $X \sim p(u)du$; $\xi = 2\pi H_p(x)$, gdzie H_p – transformata Hilberta funkcji p .

Dowód własności (4).

$$\begin{aligned}\tau(2\pi H_p(x)f(x)) &= 2\pi \int H_p(v)f(v)p(v)dv = 2 \iint \frac{p(u)}{u-v} f(v)p(v)dudv \\ &= \iint \frac{p(u)}{v-u} f(v)p(v)dudv + \iint \frac{p(v)}{u-v} f(u)p(u)dudv \\ &= \iint \frac{f(u) - f(v)}{u-v} p(u)p(v)dudv = \tau \otimes \tau(\partial f)\end{aligned}$$

W takim razie $2\pi H_p(x)$ jest zmienną sprzężoną x , i stąd $\Phi^*(x) = 4\pi^2 \int (H_p(u))^2 p(u)du$. Użyjemy jądra Poissona $P_t(s) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2+s^2}$ i jego jądra sprzężonego $Q_t(s) = \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2+t^2}$. Mamy, że $P_t(s) + iQ_t(s) = \frac{i}{\pi} \frac{1}{s+it}$ – jądro transformaty Cauchy’ego; $G_p(z) = \int \frac{p(t)}{z-t} dt$. Wiadomo, że

$$P_t * u \xrightarrow{t \rightarrow 0} u \text{ oraz } Q_t * u \xrightarrow{t \rightarrow 0} H_u$$

Z drugiej strony, jeśli p ma trzeci moment i $\varepsilon > 0$, to $\int G_p(s+i\varepsilon)^3 ds = 0$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\Re \int G(s+i\varepsilon)^3 ds &= 0 \\ \implies 3 \int \Im(G(s+i\varepsilon))^2 \Re(G(s+i\varepsilon)) ds &= \int \Re(G(s+i\varepsilon))^3 ds \\ 4\pi^2 \int (H_p(u))^2 p(u) du &= \frac{4\pi^2}{3} \int p(u)^3 du\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 4.13 (Belinschi, Bercovici). *Jeśli istnieje zmienna sprzężona, to istnieje gęstość i ona jest w L^3 .*

4.8. Kumulantowa interpretacja równań sprzężoności.

Twierdzenie 4.14 (Speicher). *Niech $x_1, \dots, x_n \in M_{s.a.}$ oraz $\xi_1, \dots, \xi_n \in L^2(M)$. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) $\xi_1, \dots, \xi_n$ spełniają równania sprzężoności,
- (2) $\kappa_1(\xi_i) = 0$, $\kappa_2(\xi_i, x_{i_1}) = \delta_{i,i_1}$ oraz $\kappa_{m+1}(\xi_i, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = 0$ gdy $m \geq 2$.

Dowód. (2 $\implies$ 1). Chcemy sprawdzić, że $\tau(\xi_i P) = (\tau \otimes \tau)(\partial_i P)$ dla $P = x_{i_1} \dots x_{i_m}$.

$$\begin{aligned}\tau(\xi_i P) &= \sum_{\pi \in NC(m+1)} \prod_{B \in \pi} \kappa_{|B|}(\dots) \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{i,i_k} \sum_{\substack{\pi \in NC(k-1) \\ \pi_2 \in NC(m-k)}} \prod_{B_1 \in \pi_1} \kappa_{|B_1|}(x_{i_j} : j \in B_1) \prod_{B_2 \in \pi_2} \kappa_{|B_2|}(x_{i_j} : j \in B_2) \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{i,i_k} \left(\sum_{\pi_1 \in NC(k-1)} \prod_{B_1 \in \pi_1} \kappa_{|B_1|}(x_{i_j} : j \in B_1) \right) \left(\sum_{\pi_2 \in NC(m-k)} \prod_{B_2 \in \pi_2} \kappa_{|B_2|}(x_{i_j} : j \in B_2) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{i,i_k} \tau(x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}}) \tau(x_{i_{k+1}} \dots x_{i_m}) = \tau \otimes \tau(\partial_i P \otimes P)\end{aligned}$$

Krok pierwszy to formuła momentowo-kumulantowa. Dalej, z (2) wynika, że jedyna kumulanta, w której występuje ξ_i , to kumulanta druga, oraz wówczas ta kumulanta wynosi δ_{i,i_k} , gdy drugim argumentem jest x_{i_k} , zaś ze względu na nieprzecinanie π oznacza to, że między ξ_i a x_{i_k} mamy nieprzecinającą partycję π_1 , zaś za i_k mamy nieprzecinającą partycję π_2 . Te sumy i iloczyny są niezależne, więc można wyciągnąć jedną sumę przed drugą: to krok trzeci. Krok czwarty to ponowne wykorzystanie formuły momentowo-kumulantowej, a w kroku piątym korzystamy z (4.1).

Dowód ($1 \implies 2$) przebiega indukcyjnie względem stopnia kumulanty, oraz korzystając z formuły kumulantowo-momentowej; nie będziemy go podawać, jest podobny. $\square$

Twierdzenie 4.15 (Voiculescu). $\Phi^*(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \Phi^*(x_1, \dots, x_n) + \Phi^*(y_1, \dots, y_m)$, jeśli $\{x_1, \dots, x_n\} \amalg \{y_1, \dots, y_m\}$.

Uwaga 4.16. W podejściu mikrostanowym podobne twierdzenie zachodzi przy założeniu pełnej wolności – tutaj wystarczą dwie wolne grupy zmiennych.

Dowód R. Speicher. Z podaddytywności, jeśli $\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = \infty$ lub $\Phi^*(y_1, \dots, y_m) = \infty$, to nie ma czego dowodzić. B.s.o. $\Phi^*(x_1, \dots, x_n) + \Phi^*(y_1, \dots, y_m) < \infty$. Niech $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – układ sprzężony do $(x_1, \dots, x_n)$ oraz $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ – układ sprzężony do $(y_1, \dots, y_m)$. Sprawdźmy przy pomocy poprzedniego twierdzenia, że $(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m)$ jest układem sprzężonym do $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. Mamy przypadki:

- ξ_i jest w kumulancie z samymi x_j : kumulanty są takie, jak trzeba, bo to był układ sprzężony;
- η_i jest w kumulancie z samymi y_j : kumulanty są takie, jak trzeba, bo to był układ sprzężony;
- ξ_i jest w kumulancie z choć jednym y_j : kumulanta znika ze względu na wolność;
- η_i jest w kumulancie z choć jednym x_j : kumulanta znika ze względu na wolność.

$\square$

4.9. Wolna entropia.

$$\chi^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{n}{1+t} - \Phi^*(x_1 + \sqrt{t}s_1, \dots, x_n + \sqrt{t}s_n) \right) dt + \frac{n}{2} \log(2\pi e)$$

gdzie s_j – układ wolnych zmiennych Wignera, wolny od $\{x_1, \dots, x_n\}$.

χ^* posiada następujące własności:

- (1) dla $n = 1$, $\chi = \chi^*$;
- (2) $\chi^*(x_1, \dots, x_n) \leq \frac{n}{2} \log \left(\frac{2\pi e c^2}{n} \right)$, gdzie $c^2 = \sum_i \tau(x_i^2)$;
- (3) χ^* jest podaddytywne;
- (4) χ^* jest addytywne tylko dla wolnych układów;
- (5) zachodzi nierówność log-Sobolewa: $\chi^*(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{n}{2} \log \left(\frac{2\pi e n}{\Phi^*(x_1, \dots, x_n)} \right)$

Będziemy dalej pisać np. $\underline{x} + t\underline{s}$ mając na myśli $(x_1 + ts_1, \dots, x_n + ts_n)$.

Dowód. (1)

$$-\chi(\underline{x} + \sqrt{t}\underline{s}) + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi^*(\underline{x} + \sqrt{u}\underline{s}) du = -\chi(\underline{x})$$

$$\chi(\underline{x} + \sqrt{t}\underline{s}) = \frac{1}{2} \log t + \chi\left(\frac{\underline{x}}{\sqrt{t}} + \underline{s}\right)$$

zauważmy jednocześnie, że $\chi\left(\frac{\underline{x}}{\sqrt{t}} + \underline{s}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \chi(\underline{s})$. Przypomnijmy także, że

$$\frac{1}{2} \log t = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{1+u} du + \frac{1}{2} \log \frac{t}{1+t}$$

Wobec tego

$$\chi(\underline{x}) - \chi\left(\frac{\underline{x}}{\sqrt{t}} + \underline{s}\right) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{1}{1+u} - \Phi^*(\underline{x} + \sqrt{u}\underline{s}) \right) du$$

Zbiegając obustronnie z $t \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\chi(\underline{x}) - \chi(\underline{s}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+u} - \Phi^*(\underline{x} + \sqrt{u}\underline{s}) \right) du$$

Wstawiając $\chi(\underline{s}) = \frac{1}{2} \log 2\pi e$ otrzymujemy tezę.

(2) używajemy nierówności Cramera-Rao (zob. paragraf 4.7).

$$\begin{aligned} \chi^*(\underline{x}) &\leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{n}{1+t} - \frac{n^2}{c^2 + nt} \right) dt + \frac{n}{2} \log 2\pi e = \frac{n}{2} \left(\int_0^\infty \frac{\frac{c^2}{n} - 1}{(1+t)(\frac{c^2}{n} + t)} dt + \log 2\pi e \right) \\ &= \frac{n}{2} \left(\log \frac{1+t}{\frac{c^2}{n} + t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \right) + \frac{n}{2} \log 2\pi e = \frac{n}{2} \left(\log \frac{c^2}{n} + \log 2\pi e \right). \end{aligned}$$

(3) Wynika z analogicznych własności dla Φ^* .

(4) Wynika z analogicznych własności dla Φ^* .

(5) Kumulantowa charakteryzacja zmiennych sprzężonych pokazuje w szczególności, że elementy Wignera są swoimi własnymi zmiennymi sprzężonymi, zatem nierówność Stama (zob. paragraf 4.7) mówi nam, że

$$\Phi^*(\underline{x} + \sqrt{t}\underline{s}) \leq \left(\alpha + \frac{t}{n} \right)^{-1}$$

gdzie $\alpha = \Phi^*(\underline{x})$. Kontynuując,

$$\chi^*(\underline{x}) \geq \frac{n}{2} \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{n\alpha + t} \right) dt + \log 2\pi e \right) = \frac{n}{2} (\log n\alpha + \log 2\pi e)$$

□

4.10. Zastosowania: brak własności Γ .

Lemat 4.17. *Założmy, że $\Phi^*(x_1, \dots, x_n) < \infty$. Wtedy*

$$(n-1)\|[p, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}]\|_2^2 = \sum_i \langle [p, x_i], [p, \xi_i] \rangle + 2\Re \left(\sum_{i=1}^n \langle \partial_i p, [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, [p, x_i]] \rangle \right).$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \|p \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes p\|_2^2 &= \langle [p, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}], [p, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \rangle \\ &= \langle \partial_j [p, x_j], [p, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \rangle - \langle [\partial_j p, x_j], [p, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \rangle \end{aligned}$$

Wykorzystując Theorem 4.7 można rozpisać pierwszy wyraz jako:

$$\begin{aligned} \langle \partial_j [p, x_j], [p, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \rangle &= \langle [p, x_j], \partial_j^*(p \otimes \mathbf{1}) - \partial_j^*(\mathbf{1} \otimes p) \rangle \\ &= \langle [p, x_j], p\xi_j - (\text{id} \otimes \tau)(\partial_j p) - \xi_j p + (\tau \otimes \text{id})(\partial_j p) \rangle \\ &= \langle [p, x_j], [p, \xi_j] \rangle + \langle [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, [p, x_j]], \partial_j p \rangle \end{aligned}$$

Zaś drugi rozpisuje się jako:

$$\langle [\partial_j p, x_j], [p, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \rangle = \langle \partial_j p, [p, [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, x_j]] \rangle - \langle \partial_j p, [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, [p, x_j]] \rangle$$

Sumując obie strony po j i wykorzystując (4.1) dostajemy tezę. $\square$

Wniosek 4.18. *Jeśli $\Phi^*(\underline{x}) < \infty$, to*

$$(n-1)\|t - \tau(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\langle [t, x_i], [t, \xi_i] \rangle + 4\|[t, x_i]\|_2 \|\xi_i\|_2 \|t\|)$$

Dowód. Korzystamy z nierówności Poincaré’go, poprzedniego lematu i standardowego oszacowania komutatora. $\square$

Wniosek 4.19. *Jeśli $\Phi^*(\underline{x}) < \infty$, to $W^*(\underline{x})$ nie ma własności Γ .*

Dowód. Jeśli (t_k) jest asymptotycznie centralny, to poprzedni wniosek pokazuje, że jest trywialny. $\square$

4.11. Zastosowania: ciągłość rozkładu.

Twierdzenie 4.20. *Jeśli $\Phi(\underline{x}) < \infty$, to $\forall_{p \in \mathbb{C}(\underline{x}) \setminus \{0\}} \forall_{w \in W^*(\underline{x}) \setminus \{0\}} pw \neq 0$. W szczególności, rozkłady $\underline{x}$ nie mają atomów (atom rozkładu x_j w λ oznacza istnienie rzutu w $p_\lambda \in W^*(\underline{x})$ takiego, że $(x_j - \lambda)p_\lambda = 0$).*

5. INFINITEZYMALNE ALGEBRY HOPFA

ADAM SKALSKI

5.1. ϵ -bialgebry/Infinitezymalne algebry.

Definicja 5.1. *Infinitezymalna bialgebra* (albo ϵ -bialgebra) to (A, m, Δ) , gdzie (A, m) – algebra, (A, Δ) – koalgebra; $\Delta \circ m = (m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \Delta) + (\text{id} \otimes m) \circ (\Delta \otimes \text{id})$, tzn. $\Delta(ab) = a \otimes 1\Delta(b) + \Delta(a)1 \otimes b$.

Uwaga 5.2. • Jeśli (A, m) ma jedynkę, zaś (A, Δ) ma kojedynkę, to A jest trywialna.
 • Jeśli A jest skończeniowymiarowa, to A^* też jest ϵ -bialgebrą.
 • Często w literaturze pisze się ∂ zamiast Δ .

Przykład 5.3. (1) $(A, m, 0)$.

(2) $k[x]$ z koproduktem $\Delta(1) = 0$, $\Delta(x^n) = \sum_{k=0}^n x^{n-1-k} \otimes x^k$. Wówczas, ponieważ $k[x] \otimes k[x] \cong k[x, y]$, to $\Delta(f)(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ to tzw. koalgebra Newtona.

(3) $\mathcal{P}$ – przestrzeń liniowa, której bazą są ≥ 2 -elementowe skończone zbiory uporządkowane z elementami: maksymalnym 1 i minimalnym 0. Dla P, Q – takich zbiorów, definiujemy ich produkt

$$P * Q = (P \setminus \{1_P\}) \sqcup (Q \setminus \{0_Q\})$$

z porządkiem $P \leq Q$; definiujemy koprodukt

$$\Delta(P) = \sum_{0_P < x < 1_P} [0_P, x] \otimes [x, 1_P]$$

(4) Wolna bialgebra $A = k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ z koproduktem zadany przez liniowe rozszerzenie formuły:

$$\Delta(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes x_{n-1-i}$$

(5) Algebra liczb dualnych $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ z koproduktem $\Delta(1) = 0$, $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$.

Uwaga 5.4. Dla $f, g \in \text{Hom}_k(A)$ definiujemy dwa produkty: $f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ oraz $f \circledast g = f + g + f * g$. Algebry Hopfa definiuje się jako bialgebry z antypodem: odwzorowaniem $S \in \text{Hom}_k(A)$, które jest odwrotne do id względem $*$.

Definicja 5.5. *Infinitezymalna algebra Hopfa* to (A, m, Δ) z antypodem. *Antypod* dla ϵ -bialgebry to odwzorowanie $S \in \text{Hom}_k(A)$ odwrotne do id względem splotu $\circledast$ (elementem neutralnym działania $\circledast$ jest odwzorowanie zerowe).

Przykład 5.6. (1) $S = -\text{id}$

(2) $S(x) = -(x - 1)^n$, ogólnie: $S(p(x)) = -p(x - 1)$. W szczególności antypod jest odwzorowaniem nieskończonego rzędu.

(3) $S(P) = \sum_{n \geq 1} \sum_{0_P < x_1 < \dots < x_{n-1} < 1_P} [0_P, x_1] * [x_1, x_2] * \dots * [x_{n-1}, 1_P]$

(4)

$$S(x_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{C}(n+1, k)} x_{n_1-1} x_{n_2-1} \dots x_{n_k-1},$$

gdzie $\mathcal{C}(n+1, k) = \{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k | n_1 + \dots + n_k = n+1\}$.

Uwaga 5.7. Antypod S ma następujące własności:

- $S(xy) = -S(y)S(x)$,
- $S \otimes S \circ \Delta = -\Delta \circ S$.

5.2. Koreprezentacje/elementy typu grupowego.

Definicja 5.8. Powiemy, że $\alpha \in M_n(A)$ jest *elementem typu grupowego* (albo *koreprezentacją*), jeśli $(\Delta \otimes \text{id}_{M_n})(\alpha) = \alpha \otimes_{M_n} \alpha$, i.e. $\Delta(\alpha_{ij}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \otimes \alpha_{kj}$.

Oznaczmy $B = \ker \Delta$. Od teraz będziemy zakładać, że dla pewnego $X \in A$ zachodzi $\Delta(X) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$.

Twierdzenie 5.9. *Jeśli $\alpha \in M_n(A)$ jest odwracalny i typu grupowego, to istnieje $b \in M_n(B)$ a $a = (b - X \otimes \mathbb{1}_{M_n})^{-1}$. Odwrotnie, jeśli $b \in M_n(B)$ jest taki, że $(b - X \otimes \mathbb{1}_{M_n})$ jest odwracalny, to $(b - X \otimes \mathbb{1}_{M_n})^{-1}$ jest typu grupowego.*

Dowód to nietrudny rachunek, nie będziemy go przedstawiać.

Definicja 5.10. *Transformata dualności* to odwzorowanie

$$A^* \ni \varphi \mapsto ((\varphi \otimes \text{id}_{M_n})\alpha)_{\alpha \in \bigsqcup_n \text{Corep}_n} \in \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\alpha \in \text{Corep}_n} M_n^{(\alpha)}.$$

5.3. Zastosowania. Niech $\mathbb{1} \in B \subset M$: algebry von Neumanna; $x, y \in M_{\text{s.a.}}$ są B -wolne w $(M, \mathbb{E}_B)$.

$$\mathbb{H}_+(A) = \{t \in A \mid \exists_{\varepsilon > 0} \Im t \geq \varepsilon \mathbb{1}\} \ni t = r + is$$

zauważmy, że takie t są automatycznie odwracalne: $t = s^{\frac{1}{2}} \left(s^{-\frac{1}{2}} r s^{-\frac{1}{2}} + i \mathbb{1} \right) s^{\frac{1}{2}}$ i operator w nawiasie jest odwracalny ze względu na rachunek spektralny

Twierdzenie 5.11 (Analityczna wolna subordynacja). *Przy powyższych oznaczeniach, istnieje holomorficzne odwzorowanie $F_n: \mathbb{H}_+(M_n(B)) \rightarrow \mathbb{H}_+(M_n(B))$ spełniające*

$$\mathbb{E}_{M_n(B[X])} ((X + Y) \otimes \mathbb{1}_{M_n} - \beta)^{-1} = (X \otimes \mathbb{1}_{M_n} - F_n(\beta))^{-1}$$