Konstrukcja ciała Hardy'ego

Paweł Józiak

kwiecień 2009 r.

Zaczęło się od prostego zadania: znaleźć grupę automorfizmów (ciała) prostej rzeczywistej. Niech $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{R})$, pokażemy najpierw, że ϕ jest ciągłe: wystarczy sprawdzić to dla zbiorów bazowych topologii na $\mathbf{R}$, czyli odcinków otwartych. Pokażemy, że przeciwobraz odcinka też jest odcinkiem. Zauważmy w tym celu, że dla $t > 0$ mamy:

$$\phi(t) = \phi(\sqrt{t}^2) = \phi(\sqrt{t})^2 > 0$$

gdzie ostatnia równość wynika z tego, że ϕ zachowuje mnożenie, a nierówność z tego, że ϕ jest monomorfizmem, więc jedynie zero przechodzi na zero. Niech teraz $b > a$. Wtedy mamy:

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi(b - a) > 0$$

wobec poprzedniego spostrzeżenia. To znaczy, że ϕ jest izomorfizmem porządkowym, a ponieważ rozumowanie można powtórzyć przy $t < 0$, więc i odwrotny do ϕ jest izomorfizmem porządkowym, zatem:

$$\phi^{-1}(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : \ a < \phi(x) < b\} =$$

$$= \{x \in \mathbf{R} : \ \phi^{-1}(a) < x < \phi^{-1}(b)\} = (\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b))$$

Teraz zauważmy, że $\phi(1) = 1$, więc dla $n \in \mathbf{N}$

$$\phi(n) = \phi(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n}) = \underbrace{\phi(1) + \phi(1) + \ldots + \phi(1)}_{n} = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n$$

Wobec tego, że ϕ zachowuje dodawanie, mamy także:

$$0 = \phi(0) = \phi(n + (-n)) = \phi(n) + \phi(-n) = n + \phi(-n)$$

czyli ϕ jest identycznością na liczbach całkowitych. Również dla $n \in \mathbf{N}$:

$$1 = \phi(1) = \phi(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n}) = \underbrace{\phi(\frac{1}{n}) + \phi(\frac{1}{n}) + \ldots + \phi(\frac{1}{n})}_{n} = n \cdot \phi(\frac{1}{n})$$

oraz dla $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ (bez straty ogólności, $q \in \mathbf{N}$)

$$\phi(\frac{p}{q}) = \phi(p \cdot \frac{1}{q}) = \phi(p) \cdot \phi(\frac{1}{q}) = p \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q}$$

czyli ϕ jest identycznością na liczbach wymiernych. Wobec gęstości liczb wymiernych i ciągłości ϕ, grupa automorfizmów prostej rzeczywistej jest trywialna.

W rozwiązaniu korzystaliśmy praktycznie wyłacznie z własności zachowywania mnożenia i dodawania przez automorfizm oraz tego, że zachowuje on strukturę porządku. Naturalnym w tym momencie wydaje się pytanie o to, czy istnieje ciało uporządkowane, które ma nietrywialną grupę automorfizmów - odpowiedź jest twierdząca. Pierwszym kandydatem było jedno z największych znanych przeciętnemu człowiekowi ciał – ciało liczb hiperrzeczywistych. Niestety, o ile kandydat dobry, o tyle znalezienie jakiegokolwiek automorfizmu nie jest łatwe. Podamy natomiast konstrukcję innego ciała, które daje się włożyć w liczby hiperrzeczywiste. Na pytanie, czy automorfizm daje się przedłużyć do tego większego ciała odpowiedzi nie znam.
Na ciele $\mathbf{R}(X)$ wprowadzamy preporządek formułą:

$$f \preceq g \;\equiv\; \exists x_0 \in \mathbf{R}\ \forall x \geq x_0 \quad f(x) \leq g(x)$$

Rozważać będziemy ciało $\mathbf{K} = \mathbf{R}(X)/\approx$. Aby być pewnym konstrukcji, sprawdźmy najpierw, że $\mathbf{K}$ faktycznie jest ciałem: kluczowa jest dobra określoność mnożenia $\{$dodawania$\}$. Niech $f_i \approx g_i, \quad i = 1,\ 2$. Mamy:

$$f_i \preceq g_i \Rightarrow \exists x_i \forall x \geq x_i f_i(x) \leq g_i(x), \quad i = 1,\ 2$$

Ale dla $x \geq \max(x_1,\ x_2)$ $f_1(x) \leq g_1(x)$ i $f_2(x) \leq g_2(x)$, tak więc wówczas $f_1(x)\cdot f_2(x) \leq g_1(x)\cdot g_2(x)$ $\{ f_1(x)+f_2(x) \leq g_1(x)+g_2(x)\}$, czyli $f_1 \cdot f_2 \preceq g_1 \cdot g_2$ $\{f_1 + f_2 \preceq g_1+g_2\}$. W drugą stronę jednakowo, więc $f_1\cdot f_2 \approx g_1\cdot g_2$ $\{f_1+f_2 \approx g_1+g_2\}$, tzn. $[f_1\cdot f_2]_\approx = [g_1\cdot g_2]_\approx$ $\{[f_1+f_2]_\approx = [g_1+g_2]_\approx\}$. Wobec dobrego zdefiniowania działań, wszelkie aksjomaty ciała typu łaczność, rozdzielność są w oczywisty sposób dziedziczone z ciała $\mathbf{R}(X)$. Dla liczby $t \in \mathbf{R}_+$ definiujemy funkcję $\phi_t : \mathbf{R}(X) \to \mathbf{R}(X)$ wzorem $\phi_t(f)(x) = f(tx)$. Pokażemy, że zrzutowana na ciało $\mathbf{K}$ jest dobrze określonym automorfizmem zachowującym porządek. Jasnym jest, że pokazanie zachowywania preporządku na $\mathbf{R}(X)$ da nam automatycznie dobrą określoność oraz injektywność i zachowywanie porządku na $\mathbf{K}$. Jeśli $f \preceq g$, to $\exists x_0 \forall x \geq x_0 \quad f(x) \leq g(x)$. Wtedy także, kładąc $y_0 = \frac{x_0}{t}, y = \frac{x}{t}, \forall y \geq y_0 f(ty) \leq g(ty)$, co pokazuje tezę. Surjektywność jest oczywista, nawet na $\mathbf{R}(X)$: Jeśli chcemy dostać funkcję $f(x)$, wystarczy za argument wziąc funkcję $f(\frac{x}{t})$. Łatwo także zauważyć, że ϕ_t zachowuje działania na $\mathbf{R}(X)$:

$$\phi_t(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(tx) = f(tx) \cdot g(tx)$$

$$\phi_t(f)(x) \cdot \phi_t(g)(x) = f(tx) \cdot g(tx)$$

i dokładnie tak samo dla dodawania. Skonstruowaliśmy zatem dobrze określony automorfizm zachowujący porządek w ciele $\mathbf{K}$. Zauważmy, że w konstrukcji nie korzystaliśmy z żadnych własności ani prostej rzeczywistej - konstrukcje zatem można rozszerzyć na dowolne ciało uporządkowane - ani z żadnych własności ciała funkcyj wymiarnych - z wyjątkiem tego, że jest ciałem. Konstrukcje zatem można rozszerzyć na dowolne ciało funkcyj nad dowolnym ciałem uporządkowanym - tak ogólna konstrukcja nosi nazwę ciała Hardy'ego.