

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: teoretyczna

Paweł Józiak

Własności spektralne metryk grup

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dra hab. Marka Bożejki

Wrocław 2012

Oświadczam, że pracę magisterską wykonałem samodzielnie
i zgłaszam ją do oceny.

Data:.....

Podpis autora pracy:.....

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data:.....

Podpis opiekuna pracy:.....

Rozdział 1

Wstęp

Jedną z metod pokazywania własności Haagerupa określonych grup jest wskazanie właściwej funkcji warunkowo ujemnie określonej (będziemy dalej pisali: funkcji **(CND)**). Naturalnym kandydatem na takową w przypadku grup dyskretnych skończenie generowanych jest funkcja długości względem ustalonego (skończonego) zbioru generatorów: w taki sposób można łatwo pokazać, że grupa wolna ma własność Haagerupa ([8]), podobnie zrobili M. Bożejko, T. Januszkiewicz i R.J. Spatzier w [2] pokazując własność Haagerupa grup Coxetera. Pytaniem rozważanym w tej pracy jest to, czy można powiedzieć nieco więcej o tej funkcji: czy jest ona *silnie* warunkowo ujemnie określona (dalej będziemy pisali, że metryka jest **(SCND)**). W rozdziale 2 pokażemy, że wszystkie wolne (w kategorii grup Coxetera) grupy Coxetera mają tę własność względem naturalnego (Coxeterowskiego) zbioru generatorów. W rozdziale 3 zadamy to pytanie w kontekście dyskretnych przestrzeni metrycznych i pokażemy naturalną przeszkodę do posiadania tej własności. Jako wniosek dostaniemy następujące

Twierdzenie 1. *Własność **(SCND)** metryki długości słów na grupie Coxetera charakteryzuje wolne grupy Coxetera.*

W rozdziale 4 podamy interpretację geometryczną przyrostka *silna*, co pozwoli wyciągnąć wnioski dotyczące permanencji tej własności ze względu na klasyczne konstrukcje teoriografowe. Dostajemy następujące

Twierdzenie 2. *Klasa grafów z metryką grafową będącą **(SCND)** jest zamknięta na branie produktu Markowa, produktu grzebieniowego oraz produktu wolnego. W szczególności, jeśli metryki długości słów grup $G_i = \langle S_i | R_i \rangle$ (dla $i = 1, 2$) są **(SCND)**, to także metryka długości słów $G_1 * G_2 = \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$ jest **(SCND)**.*

Co w szczególności pozwala w zgrabniejszy sposób uzasadnić wynik z rozdziału 2.

Okazuje się ([11]), że **(CND)** metryki odpowiada dokładnie istnieniu kwadratowo-izometrycznego włożenia przestrzeni metrycznej w przestrzeń Hilberta. Interpretacja geometryczna pozwala także odpowiedzieć na następujące pytanie, zasugerowane autorowi przez Gero Fendlera:

Pytanie 1 (G. Fendler). *Jaki jest minimalny wymiar przestrzeni Hilberta, który dopuszcza takie włożenie?*

Okazuje się, że metryki **(SCND)** są pod tym względem bardzo sztywne: dla grafów skończonych (V, E) liczbą tą jest $\#V - 1$, gdzie przez $\#X$ rozumiemy liczbę elementów zbioru skończonego X , bądź symbol ∞ dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej.

Korzystając z wypracowanych metod, w rozdziale 5 zaprezentujemy kilka przykładów grup, których metryki długości słów są (SCND), oraz kilka przykładów grup, których metryki długości słów nie są (SCND), co w szczególności pokaże, że klasa obiektów z metryką (SCND) nie jest zamknięta na branie klasycznych konstrukcji teoriogrupowych, jak produkt prosty, produkt wolny z amalgamacją oraz rozszerzenia przez ciągi dokładne. Co gorsza, okazuje się, że własność ta jest własnością metryki, nie grupy - jej posiadanie bądź nie zależy od odpowiedniego wyboru zbioru generatorów grupy. W dalszej części rozdziału 5 przyjrzymy się temu zjawisku dla kilku przykładów ciągłych przestrzeni metrycznych.

W rozdziale 6 próbujemy uzasadnić, skąd - dla tego problemu - pojawia się postulowana wszędzie *warunkowość* ujemnej określoności metryki. Okazuje się, że w przypadku grup skończonych, prosta konstrukcja korzystająca z metod teorii reprezentacji pokazuje, że unormowane funkcje silnie dodatnio określone odpowiadają reprezentacjom izomorficznym z reprezentacją lewą regularną, co można zinterpretować jako: "funkcja silnie dodatnio określona jest w zasadzie jedna". Na końcu zamieszczamy kilka pytań i potencjalnych kierunków dalszego badania tego zjawiska.

Chciałbym serdecznie podziękować Markowi Bożejce za wprowadzenie mnie w tę tematykę, pomocne uwagi i opiekę nad pracą.

Rozdział 2

Konstrukcja I: grupy Coxetera

2.1 Podstawowe definicje i narzędzia

W sekcji tej przywołujemy jedynie proste konstrukcje i klasyczne wyniki na ich temat. Dowody można odnaleźć chociażby w [5], chapitre VI.

Definicja 1. Grupą Coxetera $\Gamma = (W, S)$ nazywamy grupę zadaną przez prezentację: S - skończony zbiór generatorów, $R = \{(st)^{m_{s,t}} : s, t \in S\}$, gdzie $m_{s,t} \in \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ (relację $(st)^\infty$ interpretujemy jako: "żadna spośród $(st)^1, (st)^2, (st)^3, \dots$ nie zachodzi") oraz $m_{s,t} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s = t \in S$. $\Gamma = \langle S | R \rangle$

Niech dana będzie grupa Coxetera (W, S) , gdzie S - ustalony zbiór generatorów liczności $n < \infty$, zaś V niech będzie rzeczywistą przestrzenią liniową wymiaru n . Ustalmy bazę $(e_s)_{s \in S}$ tej przestrzeni. Definiujemy na niej formę dwuliniową $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\langle e_s | e_t \rangle = \begin{cases} -\cos \frac{\pi}{m_{s,t}} & \text{gdy } m_{s,t} < \infty \\ -1 & \text{gdy } m_{s,t} = \infty \end{cases}$$

i rozszerzamy przez dwuliniowość na całe $V \times V$. W literaturze konstrukcję tę spotyka się pod nazwą *forma Titsa*. Oczywiście $\langle \cdot | \cdot \rangle$ jest symetryczne oraz $\langle e_s | e_s \rangle = 1$ dla $s \in S$. Definiujemy kanoniczną reprezentację W na V . Dla $x \in V$ niech:

$$\rho(s)(x) = x - 2\langle x | e_s \rangle e_s, \quad s \in S.$$

Mamy następujące własności:

Fakt 3. Dla $s, t \in S$, $x, y \in V$ zachodzi:

- $\rho(s)^2 = I$,
- $\langle \rho(s)x | \rho(s)y \rangle = \langle x | y \rangle$,
- rząd $\rho(s)\rho(s')$ to dokładnie $m_{ss'}$,
- ρ jest reprezentacją wierną.

Które pozwalają nam faktycznie mówić, że to jest reprezentacja (pseudo-)ortogonalna (forma może mieć duże jądro). Rozważamy teraz system pierwiastków Φ dla tej reprezentacji, niech więc $\Phi = \{\rho(w)e_s : s \in S, w \in W\}$. Znane są następujące własności systemu pierwiastków:

Fakt 4 (Bourbaki). Dla $\varphi \in \Phi$ mamy $\varphi = \sum a_s e_s$, gdzie wszystkie współczynniki a_s są tego samego znaku (można zatem pisać $\varphi > 0$ lub, odpowiednio, $\varphi < 0$). Ponadto, $\rho(s)(\varphi) < 0$ dla pewnego $\varphi > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi = e_s$.

Powyższy fakt motywuje zatem pisanie $\Phi^+ = \{\varphi \in \Phi : \varphi > 0\}$ oraz $\Phi^- = -\Phi^+$. Dla krótkości opuszczając będziemy symbol ρ mówiąc o działaniu grupy W na V . Oznaczając przez $\#$ licznosc zbioru, zdefiniujemy teraz funkcję $n: W \rightarrow \mathbb{N}$ wzorem:

$$n(w) = \#(\Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-) = \#\{\varphi > 0 : w\varphi < 0\} = \#(\Phi^+ \setminus w^{-1}\Phi^+)$$

Funkcja n daje nam kombinatoryczną interpretację funkcji długości słowa w grupie Coxetera (W, S) . Precyzyjniej, zachodzi następujące

Twierdzenie 5. Dla dowolnego $w \in (W, S)$ mamy $n(w) = l(w)$.

Dowód tego klasycznego wyniku można odnaleźć np. w [6], chapter 2. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym; odległość (metryka) grafowa jest zakodowana w E : $\partial_G(x, y) = \partial(x, y)$ to długość najkrótszej ścieżki w grafie, która łączy $x, y \in V$. Dla sformułowania głównego twierdzenia tego rozdziału potrzebna jest

Definicja 2. Metryka jest warunkowo ujemnie określona (oznaczamy przez **(CND)**), gdy:

$$\forall \lambda: V \rightarrow \mathbb{C} \left(\#\text{supp}(\lambda) < \infty \wedge \sum_{x \in V} \lambda(x) = 0 \right) \Rightarrow \sum_{x, y \in V} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \partial(x, y) \leq 0$$

Metryka jest silnie warunkowo ujemnie określona (oznaczamy przez **(SCND)**), gdy:

$$\forall \lambda: V \rightarrow \mathbb{C} \left(0 < \#\text{supp}(\lambda) < \infty \wedge \sum_{x \in V} \lambda(x) = 0 \right) \Rightarrow \sum_{x, y \in V} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \partial(x, y) < 0$$

Warunek **(SCND)** należy rozumieć jako: nierówność z definicji **(CND)** jest zawsze ostra, z wyjątkiem trywialnej przeszkody w postaci zerowego układu współczynników.

2.2 Proste fakty o wolnych grupach Coxetera

Kluczowa dla naszych rozważań obserwacja jest zawarta w poniższym fakcie:

Fakt 6. Jeśli $s, t \in S$ oraz $w \in W$ są takie, że $w(e_t) = e_s$, to $s = wt w^{-1}$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$\langle w^{-1}(v) | e_t \rangle = \langle v | w(e_t) \rangle = \langle v | e_s \rangle \quad (2.1)$$

gdzie pierwsza równość wynika z ortogonalności reprezentacji, zaś druga to założona własność w . Rozważmy $y = wt w^{-1}s$. Wtedy dla dowolnego $v \in V$ mamy:

$$\begin{aligned} y(v) &= wt w^{-1}(v - 2\langle v | e_s \rangle e_s) = wt(w^{-1}(v) - 2\langle v | e_s \rangle w^{-1}(e_s)) = \\ &= wt(w^{-1}(v) + (-2\langle v | e_s \rangle) e_t) = w(w^{-1}(v) - 2\langle w^{-1}(v) | e_t \rangle e_t + 2\langle v | e_s \rangle e_t) \stackrel{(2.1)}{=} \\ &= w(w^{-1}(v)) = v, \end{aligned}$$

co wobec wierności działania daje nam, że $y = e$, co kończy rozumowanie. $\square$

Wniosek 7. W wolnej grupie Coxetera nigdy nie zdarzy się, by $w(e_t) = e_s$ dla pewnych $s, t \in S$ oraz $e \neq w \in W$.

Dowód. Załóżmy *a contrario*, że mamy taką sytuację. Wtedy z poprzedniego faktu, $s = wtw^{-1}$. Niech $w = s_1 \cdot \dots \cdot s_l$ będzie zapisem w w najkrótszej postaci. Ponieważ w wolnej grupie Coxetera nie ma żadnych relacji poza trywialnymi, zaś $s = s_1 \cdot \dots \cdot s_l \cdot t \cdot s_l \cdot \dots \cdot s_1$, muszą zachodzić jakieś skracania, a jedyne możliwe to te postaci $u^2 = e$ dla pewnego generatora $u \in S$. Skoro lewa strona ma długość 1, po prawej musi zachodzić skracanie, więc to skracanie musi być dokładnie na końcu w , czyli $s_l = t$. W takim razie pozostaje napis $s_1 \cdot \dots \cdot s_{l-1} \cdot s_l s_{l-1} \cdot \dots \cdot s_1$, który jest w formie nieskracalnej, bowiem wcześniej napisaliśmy w w formie nieskracalnej, więc w szczególności $s_{l-1} \neq s_l$. Skoro słowo to jest nieskracalne, a ma długość 1, to $l = 1$ i w szczególności $w = t$. Mamy zatem: $s = t \cdot t \cdot t = t$, ale w tej sytuacji $s(e_s) = -e_s \neq e_s$, co kończy rozumowanie. $\square$

Wniosek 8. Niech $s_1, \dots, s_k, s \in S$, zaś grupa Coxetera (W, S) będzie wolna. Wówczas $s_k \cdot \dots \cdot s_1(e_s) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_1 = s$.

Dowód. Nim zaczniemy dowód, zbierzmy potrzebne obserwacje. Oczywiście, $t(e_s) = e_s + 2e_t$, wszak $(e_s|e_t) = -1$ dla $s \neq t$. W takim razie także

$$t\left(\sum_{s \in S} \alpha_s e_s\right) = \sum_{s \in S \setminus \{t\}} \alpha_s e_s + (2\left(\sum_{s \in S \setminus \{t\}} \alpha_s\right) - \alpha_t) e_t \quad (2.2)$$

Założmy najpierw, że $s \neq s_1$. Aby dowieść powyższego faktu, dowiedzimy indukcyjnie ze względu na długość słowa l , że dla $w_l = s_l \cdot \dots \cdot s_1$ w postaci zredukowanej oraz $\varphi_l = w_l(e_s) = \sum_{s \in S} \alpha_s^l e_s$ ciąg $\beta_l = \max\{\alpha_s^l : s \in S\}$ jest ściśle rosnący, a najwyższy współczynnik stoi przy e_{s_l} , czyli wektorze odpowiadającemu ostatnio dokonанemu odbiciu. Dla $l = 1, 2$ teza jest oczywista, a wobec (2.2) krok indukcyjny także (w odpowiedniej sumie poprzedni największy współczynnik pojawia się dwukrotnie, więc jego dwukrotność pomniejszona o coś ściśle mniejszego jest większa od wyjściowego współczynnika). Skoro ciąg β_l jest ściśle rosnący, a początkowy wektor był w dodatnim oktancie, także i końcowy tam będzie. W drugą stronę: jeśli $s_1 = s$, to $s_k \cdot \dots \cdot s_2 \cdot s_1(e_{s_1}) = s_k \cdot \dots \cdot s_2(-e_{s_1}) = -s_k \cdot \dots \cdot s_2(e_{s_1})$, bo działanie jest liniowe, a wobec poprzedniego kroku, $s_k \cdot \dots \cdot s_2(e_{s_1}) > 0$, czyli $s_k \cdot \dots \cdot s_2 \cdot s_1(e_{s_1}) < 0$. $\square$

2.3 Główny rezultat

Wykorzystując powyższe można udowodnić następujące

Twierdzenie 9 (Bożejko-Januszkiewicz-Spatzier). Niech (W, S) będzie grupą Coxetera, Φ jej systemem pierwiastkowym z dodatnim oktantem Φ^+ .

1. Funkcja $W \ni w \mapsto \alpha(w) = \chi_{w\Phi^+} - \chi_{\Phi^+} \in \ell^2(\Phi)$ jest 1-kocyklem lewej regularnej reprezentacji (W, S) na $\ell^2(\Phi)$ (χ_A to funkcja charakterystyczna zbioru A).
2. Dla $v, w \in W$ zachodzi tożsamość $2l(w^{-1}v) = \|\alpha(v) - \alpha(w)\|^2$
3. Funkcja długości słowa na (W, S) jest (CND).

Dowód. 1. Dla $w \in W$ mamy $l(w) = l(w^{-1}) = \#\{\varphi \in \Phi^+ : w\varphi < 0\}$, więc nośnik funkcji $\alpha(w)$ jest skończony, zatem $\alpha(w) \in \ell^2(\Phi)$. Tożsamość kocyklowa jest oczywista, bo $w \cdot \alpha(t) = \chi_{wt\Phi^+} - \chi_{w\Phi^+}$.

2. Dla dowolnych dwu zbiorów A, B zachodzi: $(\chi_A - \chi_B)^2 = |\chi_A - \chi_B| = \chi_{A \Delta B}$.
Zatem w naszym przypadku, dla $w, v \in W$ oraz $\varphi \in \Phi$ mamy: $|\chi_{w\Phi^+} - \chi_{v\Phi^+}|(\varphi) = \chi_{w\Phi^+ \setminus v\Phi^+}(\varphi) + \chi_{v\Phi^+ \setminus w\Phi^+}(\varphi)$, zatem sumując z kwadratem po wszystkich elementach Φ mamy, że

$$\begin{aligned} \|\alpha(w) - \alpha(t)\|^2 &= \sum_{\varphi \in \Phi} |\chi_{w\Phi^+} - \chi_{t\Phi^+}|^2(\varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} |\chi_{w\Phi^+} - \chi_{t\Phi^+}|(\varphi) = \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} \chi_{w\Phi^+ \setminus t\Phi^+}(\varphi) + \sum_{\varphi \in \Phi} \chi_{t\Phi^+ \setminus w\Phi^+}(\varphi) = \#(t\Phi^+ \setminus w\Phi^+) + \#(w\Phi^+ \setminus t\Phi^+) = \\ &= \#(\Phi^+ \setminus t^{-1}w\Phi^+) + \#(\Phi^+ \setminus w^{-1}t\Phi^+) = n(t^{-1}w) + n(w^{-1}t) = 2l(w^{-1}t). \end{aligned}$$

3. Ustalmy $\lambda: (W, S) \rightarrow \mathbb{C}$. Mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{x, y \in W} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} d(x, x) &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in W} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \|\alpha(x) - \alpha(y)\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in W} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \langle \alpha(x) - \alpha(y) | \alpha(x) - \alpha(y) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in W} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \|\alpha(x)\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{x, y \in W} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \|\alpha(y)\|^2 - \sum_{x, y \in W} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \langle \alpha(x) | \alpha(y) \rangle = (*) \end{aligned}$$

przy czym pierwsze dwa składniki są równe zeru ze względu na to, że $\sum_{x \in W} \lambda(x) = 0$, zaś trzeci można napisać w tej postaci, gdyż $\langle \alpha(x) | \alpha(y) \rangle \in \mathbb{R}$. Kontynuując te rachunki mamy, że:

$$(*) = - \left\langle \sum_{x \in W} \lambda(x) \alpha(x) \middle| \sum_{y \in W} \lambda(y) \alpha(y) \right\rangle = - \left\| \sum_{x \in W} \lambda(x) \alpha(x) \right\|^2 \leq 0 \quad (2.3)$$

□

Wniosek 10. *Wolne grupy Coxetera mają własność (SCND).*

Dowód. Wobec tożsamości (2.3) wystarczy pokazać, że dla danego układu $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ takich, że $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 0$, $\prod_{j=1}^N \lambda_j \neq 0$ i parami różnych punktów $x_1, \dots, x_N \in W$ funkcja $F(\varphi) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \alpha(x_i)(\varphi)$ nie jest tożsamościowo równa zeru. Przypomnijmy sobie, że $\alpha(x) = \chi_{w\Phi^+} - \chi_{\Phi^+}$, tak więc wobec faktu, że $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0$ mamy

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \alpha(x_i) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (\chi_{x_i\Phi^+} - \chi_{\Phi^+}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \chi_{x_i\Phi^+} - \sum_{i=1}^N \lambda_i \chi_{\Phi^+} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \chi_{x_i\Phi^+}$$

Zauważmy, że:

$$\varphi' \in x\Phi^+ = \{x\varphi : \varphi > 0\} \iff \exists \varphi > 0 \quad x(\varphi) = \varphi' \iff x^{-1}(\varphi') > 0.$$

Najprościej pokazać, że F nie jest tożsamościowo równa zeru poprzez wskazanie konkretnego elementu, na którym przyjmuje ona niezerową wartość. Postać tej funkcji sugeruje szukanie takiego φ , który będzie należeć do nośnika dokładnie jednego spośród $\chi_{x_i\Phi^+}$ - wtedy funkcja da na nim wartość λ_i - albo, równoważnie, szukanie takiego φ , który siedzi we wszystkich zbiorach $x_i\Phi^+$ z wyjątkiem jednego - wtedy $F(\varphi) = -\lambda_i$.

Rozważmy teraz najdłuższe słowo wśród $x_1, \dots, x_N$ - bez straty ogólności niech będzie to x_1 i niech jego najkrótsze przedstawienie to $x_1 = s_1 \cdot \dots \cdot s_l$. Rozważmy element $\varphi = s_1 \cdot \dots \cdot s_{l-1}(e_{s_l}) = s_1 \cdot \dots \cdot s_{l-1} \cdot s_l \cdot s_l(e_{s_l}) = x_1 s_l(e_{s_l})$. Zgrupujmy kilka jego własności

1. $\varphi > 0$ - to właśnie po to napisaliśmy wniosek 8.
2. $\varphi \notin x_1\Phi^+$: wobec ciągu równoważności chwilę wcześniej sprawdzamy, że $x_1^{-1}(\varphi) = x_1^{-1}(x_1 \cdot s_l(e_{s_l})) = s_l(e_{s_l}) = -e_{s_l} < 0$.

3. $\varphi \in x_i\Phi^+$ przy $i > 1$: ponieważ wybraliśmy najdłuższe słowo, skracania powodują, że $x_i^{-1} \cdot x_1 \cdot s_l$ ma długość co najmniej 1 i nie jest to s_l , jeśli ma długość 1, a jeśli większą, to wobec wniosku 8, ponieważ pierwsza litera tego słowa jest różna od s_l , jest to element dodatni.

Mamy zatem, że $\varphi \notin x_1\Phi^+$ oraz $\varphi \in x_i\Phi^+$ dla $i > 1$, co pozwala nam policzyć, że $\sum_{i=1}^N \lambda_i \chi_{x_i\Phi^+}(\varphi) = \sum_{i=2}^N \lambda_i = -\lambda_1 \neq 0$. $\square$

Rozdział 3

Podstawowa przeszkoda do posiadania własności (SCND)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym; odległość (metryka) grafowa jest zakodowana w E : $\partial_\Gamma(x, y) = \partial(x, y)$ to długość najkrótszej ścieżki w grafie, która łączy $x, y \in V$. Przyglądając się definicji (SCND), możemy podsumować kilka prostych uwag.

Uwaga 1. W naszych rozważaniach nie jest istotne, czy graf jest prosty, czy nie: potencjalne wielokrotne krawędzie i jednopunktowe pętle i tak nie będą wpływać na długość najkrótszej drogi między ustalonymi punktami grafu.

Uwaga 2. Niech $G_0 \subset G$ będzie podgrafem takim, że ta inkluzja jest izometrycznym włożeniem grafów traktowanych jako przestrzenie metryczne. Jeśli G ma metrykę (SCND), to G_0 też.

Uwaga 3. Poprzednia uwaga mówi przede wszystkim o tym, że jeśli w grafie znajdziemy mały podgraf bez (SCND) - taki, że dodatkowe krawędzie w dużym grafie nie wpływają na odległości w małym grafie, to i wyjściowy graf nie może mieć (SCND).

Definicja 3. Prostokątem w grafie nazwiemy taki układ czterech wierzchołków $(x_i)_{i=1}^4$, że ich macierz odległości ma postać:

$$D = [\partial(x_i, x_j)]_{i,j=1}^4 = \begin{bmatrix} 0 & k & n+k & n \\ k & 0 & n & n+k \\ n+k & n & 0 & k \\ n & n+k & k & 0 \end{bmatrix}$$

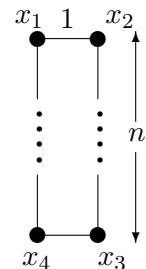
Fakt 11. Graf zawierający prostokąt nie może mieć metryki (SCND).

Dowód. To proste: wektor $v = (1, -1, 1, -1)$ jest w jądrze macierzy metryki, co należy czytać: funkcja $\lambda(x_i) = (-1)^{i+1}$, $\lambda(x) = 0$ dla $x \neq x_i$, przy oznaczeniach jak wyżej, zeruje szukaną sumę. $\square$

Fakt 12. Jeśli w grafie minimalny cykl ma długość parzystą, to daje się weń wpisać prostokąt.

Dowód. Narysujmy ten najkrótszy cykl, niech ma on długość $2n+2$. Przy oznaczeniach jak obok, macierz wzajemnych odległości $(x_i)_{i=1}^4$ ma postać:

$$D = [\partial(x_i, x_j)]_{i,j=1}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & n+1 & n \\ 1 & 0 & n & n+1 \\ n+1 & n & 0 & 1 \\ n & n+1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$



bo gdyby $\partial(x_1, x_4) < n$, to istniałby ciąg krawędzi łączący x_1, x_4 długości mniejszej niż n , ten układ krawędzi wraz z układem krawędzi z minimalnego cyklu tworzyłby cykl o długości $< n + n < 2n + 2$, sprzeczność. To samo dla $\partial(x_2, x_3)$, podobnie dla $\partial(x_1, x_3), \partial(x_2, x_4)$. $\square$

Fakt 13. *Jeśli grupa Coxetera ma nietrywialną relację, to nie ma własności (SCND).*

Dowód. Rozważmy $s \neq t$ takie, że $m_{s,t} \geq 2$ jest minimalne wśród relacji. Wystarczy teraz zauważyć, że podgrupa naszej wyjściowej grupy Coxetera generowana przez te dwa elementy ma graf Cayleya będący $2m_{s,t} \geq 4$ -kątem foremnym, zatem można w nim znaleźć prostokąt. Z drugiej strony, włożenie tej podgrupy w wyjściową grupę zachowuje odległości między punktami na grafie Cayleya tej podgrupy, bo jest to najkrótszy cykl - specjalnie wybraliśmy najmniejsze $m_{s,t}$. $\square$

Ten fakt, wraz z ostatnim wnioskiem z rozdziału 2, dowodzi zaanonowanego we wstępie twierdzenia 1.

Rozdział 4

Konstrukcja II: Interpretacja geometryczna

4.1 Konstrukcja Schoenberga

Zacznijmy od kilku prostych faktów i definicji.

Definicja 4. *Jądrem hermitowskim* na zbiorze X nazwiemy funkcję $K: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ taką, że $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

Definicja 5. *O jądrze hermitowskim K powiemy, że jest [warunkowo] dodatnio (ujemnie) określone, jeśli*

$$\forall \lambda: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \sum_{x, y \in V} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} K(x, y) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad [dla \sum_{x \in X} \lambda(x) = 0]$$

Oczywiście K jest [warunkowo] dodatnio (ujemnie) określone wtedy i tylko wtedy, gdy $-K$ jest [warunkowo] ujemnie (dodatnio) określone, więc dla ustalenia uwagi, wszystkie pojawiające się w tym rozdziale dalej jądra będą [warunkowo] ujemnie określone.

Fakt 14. *Niech K będzie jądrem ujemnie określonym. Wówczas istnieje przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ oraz odwzorowanie $\gamma: X \rightarrow \mathcal{H}$ takie, że $\langle \gamma(x) | \gamma(y) \rangle = -K(x, y)$.*

Dowód. Dowód jest bardzo prosty: rozważmy przestrzeń liniową

$$FIN(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} : \# \text{supp}(f) < +\infty\}$$

oraz pre-iloczyn skalarny na tej przestrzeni zadany przez formułę

$$\langle f | g \rangle_{FIN} = - \sum_{x, y \in X} f(x) \overline{g(y)} K(x, y).$$

Dzięki ujemnej określoności K , jest to forma dodania określona, zatem wobec nierówności Cauchy’ego-Buniakowskiego-Schwartz’a, zbiór $N = \{f \in FIN(X) : \langle f | f \rangle = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową w $FIN(X)$. Definiujemy teraz

$$\mathcal{H} = \widetilde{FIN(X)} / N$$

gdzie duża tylda oznacza uzupełnienie, zaś $\gamma(x) = \delta_x + N$. Sprawdzenie, że tak zdefiniowane odwzorowanie spełnia tezę faktu, jest natychmiastowe. $\square$

Łatwo zauważyć, że dowolne takie odwzorowanie zadaje jądro ujemnie określone przez powyższą formułę, jest to zatem charakteryzacja jąder ujemnie określonych.

Fakt 15. *Niech A będzie warunkowo ujemnie określonym jądrem na zbiorze X . Wtedy istnieją: jądro ujemnie określone K oraz funkcja $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że $K(x, y) = A(x, y) + F(x) + \overline{F(y)}$.*

Dowód. Ustalmy dowolny $e \in X$, definiujemy

$$K(x, y) = A(x, y) - A(x, e) - A(e, y) + A(e, e)$$

$$F(x) = -A(x, e) + \frac{1}{2}A(e, e).$$

Dzięki hermitowskości jądra A powyższa formuła jest spełniona, pozostaje sprawdzić, że jądro K faktycznie jest ujemnie określone. Dla $f, g \in FIN(X)$ (zdefiniowane jak poprzednio) oznaczmy

$$\langle f|g \rangle_A = \sum_{x, y \in X} A(x, y) f(x) \overline{g(y)},$$

analogicznie wprowadzamy symbol $\langle \cdot | \cdot \rangle_K$ z jądrem K w miejscu A . Zauważmy, że

$$\langle f|f \rangle_K = \langle f|f \rangle_A - t \langle \delta_e | f \rangle_A - \bar{t} \langle f | \delta_e \rangle + |t|^2 \langle \delta_e | \delta_e \rangle_A = \langle f - t\delta_e | f - t\delta_e \rangle_A,$$

gdzie $t = \sum_{x \in X} f(x)$, oraz $\sum_{x \in X} (f(x) - t\delta_e(x)) = 0$, więc jądro K faktycznie jest **(CND)**. $\square$

Twierdzenie 16 (Schoenberg). *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Jeśli metryka d jest **(CND)**, to istnieje przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ oraz odwzorowanie $\alpha: X \rightarrow \mathcal{H}$ takie, że $\|\alpha(x) - \alpha(y)\|^2 = d(x, y)$ (tożsamość tę traktujemy jako definicję **włożenia kwadratowo-izometrycznego**).*

Dowód. Dowód jest bardzo prosty: wobec poprzedniego faktu,

$$d(x, y) = K(x, y) + F(x) + \overline{F(y)} = K(x, y) + F(x) + F(y),$$

gdzie $F(x) = -d(x, e)$ dla pewnego ustalonego $e \in X$ (więc w szczególności jądro K jest rzeczywiste). Rozważmy przestrzeń $\mathcal{H}$ i odwzorowanie γ jak w fakcie 14. Kładąc $\alpha: X \rightarrow \mathcal{H}$, $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma(x)$, bezpośredni rachunek daje nam tezę. $\square$

Łatwo zauważyć, że każde odwzorowanie o powyższych własnościach pokazuje warunkową ujemną określoność metryki, jest to więc charakteryzacja przestrzeni metrycznych, które wkładają się kwadratowo-izometrycznie w przestrzeń Hilberta. Naturalnym jest zadanie pytania, co więcej można powiedzieć o powyższym odwzorowaniu, jeśli metryka jest **(SCND)**. Okazuje się, że oznacza to dokładnie, iż obraz przestrzeni metrycznej przez powyższe odwzorowanie jest afinicznie niezależny. Detale zebrane są w poniższej sekcji.

4.2 Kilka uwag o afinicznej niezależności

Ustalmy układ wektorów $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq V$, gdzie V - przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbf{K}$ (w zasadzie do zastosowań istotne będzie tylko ciało $\mathbb{R}$). Potrzebna będzie informacja o współczynnikach (jądro próby konstrukcji bazy dualnej do ustalonych wektorów):

$$U = \{ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1} : \sum_{k=0}^n \lambda_k v_k = 0 \},$$

jasnym jest, że ten zbiór stanowi przestrzeń liniową.

Oznaczmy także:

$$W_n = \text{aff span}\{v_0, \dots, v_n\} = \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k v_k : \sum_{k=0}^n \lambda_k = 1 \right\},$$

$$\mathbf{K}_0^{n+1} = \left\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1} : \sum_{k=0}^n \lambda_k = 0 \right\}.$$

Jak powszechnie wiadomo, istnieje jedyny $w \in W_n$ taki, że $W_n - w$ jest podprzestrzenią liniową V - jej wymiar traktujemy jako definicję wymiaru W_n . Rozpocznijmy formułując następujący

Fakt 17. *Następujące warunki są równoważne:*

- (a) $\dim W_n = n$,
- (b) Układ wektorów $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ jest liniowo niezależny,
- (c) $\mathbf{K}_0^{n+1} \cap U = \{0\}$ (a zatem w szczególności U jest co najwyżej jednowymiarowy),
- (d) (w przypadku, gdy $\mathbf{K} = \mathbb{R}$) istnieje jedyna $n - 1$ -wymiarowa sfera w V , na której leżą wszystkie punkty $\{v_0, \dots, v_n\}$.

Dowód. Pokażmy najpierw, że $W_n - w = \text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$. Oznaczmy $w = \sum_{k=0}^n w_k v_k$ dla pewnych współczynników w_k .

$\subseteq$:

$$x \in W_n - w \iff x + w \in W_n \iff \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \quad x + w = \sum_{k=0}^n \lambda_k v_k, \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k = 1,$$

wtedy oczywiście $x = \sum_{k=0}^n (\lambda_k - w_k) v_k = \sum_{k=0}^n \lambda'_k v_k$, gdzie w naturalny sposób $\lambda'_k = \lambda_k - w_k$. Oczywiście $\sum_{k=0}^n \lambda'_k = 0$, więc $\lambda'_0 = -\sum_{k=1}^n \lambda'_k$, skąd mamy także, że

$$x = -\sum_{k=1}^n \lambda'_k v_0 + \sum_{k=1}^n \lambda'_k v_k = \sum_{k=1}^n \lambda'_k (v_k - v_0) \in \text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}.$$

$\supseteq$: dowód jest w zasadzie taki sam,

$$x \in \text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\} \Rightarrow x = \sum_{k=1}^n \lambda_k (v_k - v_0)$$

dla pewnego układu współczynników $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Kładąc $\lambda_0 = -\sum_{k=1}^n \lambda_k$ mamy, że $x = \sum_{k=0}^n \lambda_k v_k$ oraz $\sum_{k=0}^n \lambda_k = 0$. Wtedy $\sum_{k=0}^n (\lambda_k + w_k) = 1$, zatem

$$x + w = \sum_{k=0}^n (\lambda_k + w_k) v_k \in W_n.$$

Równoważność (a) i (b) z powyższego już wynika, wszak układ $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ jest liniowo niezależny $\iff n = \dim \text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\} = \dim (W_n - w) \iff \dim W_n = n$.

(b) $\iff$ (c): jeśli mamy układ skalarów $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}_0^{n+1} \cap U$, to $\lambda_0 = -\sum_{k=1}^n \lambda_k$ oraz oczywiście $0 = \sum_{k=0}^n \lambda_k v_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k - \sum_{k=1}^n \lambda_k v_0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k (v_k - v_0)$, co wobec

liniowej niezależności $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ pociąga, że $\lambda_k = 0$ dla każdego $k = 0, 1, \dots, n$. Odwrotnie: jeśli mamy układ skalarów $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ taki, że $0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k (v_k - v_0)$, to dookreślając jak wcześniej $\lambda_0 = -\sum_{k=1}^n \lambda_k$ mamy, że $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}_0^{n+1} \cap U = \{0\}$, co dowodzi liniowej niezależności układu $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$.

(b) $\iff$ (d): Jasnym jest, że trzy różne punkty na płaszczyźnie, jeśli nie są współliniowe, wyznaczają okrąg. Dalej rozumujemy indukcyjnie: wobec (b) skoro $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ jest liniowo niezależny, także $\{v_1 - v_0, \dots, v_{n-1} - v_0\}$ jest liniowo niezależny, więc z założenia indukcyjnego istnieje $n - 2$ -wymiarowa sfera S w $\{v_n - v_0\}^\perp$: niech jej środek nazywa się x . Rozważmy teraz rodzinę $n - 1$ -wymiarowych sfer S_t o środkach w $x + t \cdot (v_n - v_0)$ dla $t > 0$ i promieniach takich, by $\{v_n - v_0\}^\perp \cap S_t = S$ dla każdego $t > 0$ - jasnym jest, że dla każdego t istnieje jedyny taki promień. Krótka obserwacja mówi nam także, że tylko dla jednego t pewna sfera S_t zawiera punkt v_n oraz każda sfera S' zawierająca wszystkie te punkty musi spełniać $\{v_n - v_0\}^\perp \cap S' = S$ (dla naturalnego iloczynu skalarowego w $\mathbb{R}^n$, więc musi być tożsama z właśnie skonstruowaną sferą S_t . Odwrotnie: jeśli mamy układ punktów $\{v_0, \dots, v_n\}$ nie spełniający założenia (b) i mamy jakąś $n - 1$ -wymiarową sferę S o środku w x spełniającą warunek d, w V istnieje jakiś kierunek ortogonalny do $\text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ i przesuwając x w tymże kierunku ortogonalnym w podobny sposób jak wcześniej dostajemy nieskończenie wiele sfer zawierających wspomniane wyżej punkty. $\square$

W momencie pisania autorowi wydawało się, że warunek (d) będzie użyteczny - okazało się, że nie, ale ponieważ jest w jakimś sensie ładny, pozostał on w powyższej klasyfikacji. Niemniej jednak, dzięki temu faktowi poprawna jest następująca

Definicja 6. Układ wektorów $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq V$ nazwiemy **afinicznie niezależnym** jeśli zachodzi którykolwiek (równoważnie: każdy) z powyższych warunków (a), (b), (c), (d).

Wykorzystamy jeszcze jeden, bardzo klasyczny, wynik.

Twierdzenie 18 (Courant-Fischer-Weyl). Jeśli A jest macierzą symetryczną $n \times n$ nad $\mathbb{R}$, zaś $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ to wartości własne tej macierzy, to wyrażone są one formułą

$$\lambda_k = \max\{\min\{\frac{\langle Ax|x \rangle}{\langle x|x \rangle} : x \in V, x \neq 0\} : V < \mathbb{R}^n, \dim V = k\}$$

$$\lambda_k = \min\{\max\{\frac{\langle Ax|x \rangle}{\langle x|x \rangle} : x \in V, x \neq 0\} : V < \mathbb{R}^n, \dim V = n - k + 1\}$$

Dowód tego twierdzenia w powyższej wersji jest elementarny, zaś jego znacznie ogólniejszą wersję, dla operatorów zwartych na przestrzeni Hilberta, można odnaleźć na przykład w [14], chapter XIII.

Fakt 19. Jeśli $G = (V, E)$ jest skończonym grafem z własnością (CND), zaś $\alpha : V \rightarrow \mathcal{H}$ jest wspomnianym włożeniem, to następujące warunki są równoważne:

- (a) $0 \notin \sigma(D)$, gdzie $D : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(V)$ jest zdefiniowany jako $D\delta_w = \sum_{v \in V} \partial(w, v)\delta_v$ (innymi słowy, macierz D metryki jest nieosobliwa),
- (b) Układ wektorów $\{\alpha(v) : v \in V\}$ jest afinicznie niezależny,
- (c) G ma własność (SCND).

Dowód. (c) $\iff$ (a): wprost z twierdzenia mini-maksowego Couranta-Fischera-Weyla o wartościach własnych macierzy.

(c) $\iff$ (b): ponieważ $\partial(v, w) = \|\alpha(v) - \alpha(w)\|^2 = \|\alpha(v)\|^2 + \|\alpha(w)\|^2 - 2\langle \alpha(v) | \alpha(w) \rangle$, mamy:

$$\begin{aligned} 2\left\| \sum_{v \in V} \lambda(v) \alpha(v) \right\|^2 &= 2 \sum_{v, w \in V} \lambda(v) \overline{\lambda(w)} \langle \alpha(v) | \alpha(w) \rangle = \sum_{v, w \in V} \lambda(v) \overline{\lambda(w)} \left(\|\alpha(v)\|^2 + \|\alpha(w)\|^2 - \partial(v, w) \right) \\ &= \left(\sum_{v \in V} \lambda(v) \right) \left(\sum_{v \in V} \lambda(v) \|\alpha(v)\|^2 \right) + \left(\sum_{v \in V} \lambda(v) \right) \left(\sum_{v \in V} \overline{\lambda(v)} \|\alpha(v)\|^2 \right) - \sum_{v, w \in V} \lambda(v) \overline{\lambda(w)} \partial(v, w), \end{aligned}$$

jeśli więc weźmiemy dowolny układ współczynników $\lambda : V \rightarrow \mathbb{C}$ taki, że $\sum_{v \in V} \lambda(v) = 0$ widzimy, że ostatnia strona tożsamości jest równa wielkości z definicji **(SCND)**, więc jest ona dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy układ wektorów $\{\alpha(v) : v \in V\}$ jest afinicznie niezależny (definicja (c)). $\square$

Możemy sformułować następujący

Wniosek 20 (Finitarność). *Jeśli $G = (V, E)$ jest **(CND)**, to G jest **(SCND)** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podgraf metryczny $G_0 \subseteq G$ ma własność **(SCND)**.*

Dowód. $\Rightarrow$: Jeśli G ma własność **(SCND)**, to oczywiście każdy metryczny podgraf tego grafu także ma tę własność, zgodnie ze sformułowaną już uwagą 2.

$\Leftarrow$: Jeśli każdy skończony podgraf metryczny ma tę własność, to dowolna $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$ ma nośnik zawarty w jakimś skończonym podgrafie metrycznym: wystarczy zauważyć, że dany skończony układ punktów wyznacza nam skończoną macierz wzajemnych odległości, więc punkty te możemy modelować na jakimś skończonym podgrafie, który - dzięki temu, że jest modelem dla tego układu wzajemnych odległości, jest izomorficzny z metrycznym podgrafem wyjściowego grafu. Ponieważ związane z tym układem skalarów włożenie daje obraz afinicznie niezależny, szukana wielkość jest niezerowa. $\square$

Wniosek 21 (Pytanie Fendlera). *Dla grafu skończonego $G = (V, E)$, minimalny wymiar przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ dopuszczającej takie włożenie wynosi $\#V - 1$.*

Dowód. Dzięki temu, że obraz przez α jest afinicznie niezależny, wynosi co najmniej $\#V - 1$. Z drugiej strony, jeśli α jest włożeniem takim, że obraz jest liniowo niezależny, możemy złożyć to odwzorowanie z translacją i przesłać dowolny (ustalony) wierzchołek w $0 \in \mathcal{H}$; obraz złożenia nie może być liniowo niezależny, więc w szczególności, rozpinana przez obraz podprzestrzeń Hilberta ma wymiar istotnie mniejszy niż $\#V$, co daje szacowanie przeciwne. $\square$

4.3 Suma Markowa. Fundamentalny lemat konstrukcyjny

Konstrukcja, która będzie używa we wszelkich wyliczeniach, sprowadza się do obserwacji poczynionej już niegdyś przez M. Bożejkę [3]: niech dane będą dwa grafy, $(V_1, E_1), (V_2, E_2)$ ze zbiorami krawędzi, których pisanie będziemy dalej pomijać, i ustalone punkty $v_i \in V_i$. Tworzymy graf $V = V_1 \sqcup V_2 / \sim =: V_1 \underset{v_1}{\star} v_2 V_2 = V_1 \star V_2$, gdzie relacja jest najprostsza z możliwych: $v_1 \sim v_2$ i nic poza tym. W literaturze, teoretycy grafów nazywają tę konstrukcję *sumą Markowa grafów*, zaś topolodzy - *bukietem zbazowanych przestrzeni topologicznych*.

Graficznie oznacza to dokładnie tyle, że sklejamy te dwie przestrzenie jednopunktowo. W szczególności, metryka na V jest zadana przez:

$$\partial(x, y) = \begin{cases} \partial_1(x, y) & \text{gdy } x, y \in V_1, \\ \partial_1(x, v_1) + \partial_2(v_2, y) & \text{gdy } x \in V_1, y \in V_2, \\ \partial_2(x, v_2) + \partial_1(v_1, y) & \text{gdy } x \in V_2, y \in V_1, \\ \partial_2(x, y) & \text{gdy } x, y \in V_2, \end{cases}$$

gdzie ∂_i to metryka na V_i , $i = 1, 2$. Suma Markowa grafów jest ważna z punktu widzenia wolnej probabilistyki i analizy spektralnej na grafach: macierz incydencji takiej konstrukcji, traktowana jako operator na $\ell^2(V)$ rozpada się na sumę dwu boolowsko niezależnych operatorów: macierzy incydencji grafów składowych. Ponadto konstrukcja ta jest przydatna do innych konstrukcji teoriografowych, jak produkt grzebieniowy (związany z monotoniczną niezależnością) oraz produkt wolny (związany z wolnością), więcej szczegółów można odnaleźć na przykład w [9]. Prawdziwy jest następujący

Fakt 22. *Jeśli $V_i \ni v_i$ są grafami z wyróżnionymi punktami posiadającymi (SCND), to $V_1 \star V_2$ też ma (SCND).*

Dowód. Niech $\alpha_i: V_i \rightarrow \mathcal{H}_i$ będą włożeniami jak w poprzedniej sekcji, przy czym, ponieważ wszystkie własności włożenia zostaną zachowane, jeśli złożymy je z przesunięciem, można bez straty ogólności przyjąć, że $\alpha_i(v_i) = 0$. Definiujemy $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2: V_1 \star V_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ i jasnym jest, że włożenie to, zgodnie z definicją metryki na produkcie Markowa grafów, jest kwadratowo-izometryczne: dzięki temu, że przestrzenie te są ortogonalne w sumie prostej oraz twierdzeniu Pitagorasa, odwzorowanie to spełnia formułę kwadratowej izometrii; raz jeszcze dzięki ortogonalności, obraz przez α grafu $V_1 \star V_2$ jest afinicznie niezależny. $\square$

Produkt grzebieniowy dwu grafów (patrz na przykład [9] albo [10]) konstruuje się w podobny sposób: niech dane będą dwa grafy, $(V_1, E_1), (V_2, E_2)$ ze zbiorami krawędzi, których pisanie będziemy dalej pomijać, i ustalony punkt $v_2 \in V_2$. Tworzymy graf $V = V_1 \triangleright_{v_2} V_2 = V_1 \triangleright V_2$ przez doklejanie do każdego punktu V_1 kopii V_2 zbazowanej w v_2 , czyli: dla każdego wierzchołka $v \in V_1$ wykonujemy operację opisaną przez sumę Markowa $V_1 \star_{v \star v_2} V_2$. Dzięki poprzedniemu spostrzeżeniu mamy oczywiście następujący

Fakt 23. *Jeśli V_i są grafami jak wyżej posiadającymi metryki (SCND), to $V_1 \triangleright V_2$ też jest (SCND).*

Produkt wolny grafów ma znacznie żmudniejszą konstrukcję, choć dla osoby zaznajomionej z konstrukcją grupy wolnej nie jest niczym zaskakującym. Formalnie definiuje się go następująco: dla rodziny zbiorów z wyróżnionym punktem $(S_i, e_i)_{i \in I}$ definiujemy ich produkt wolny jako zbiór z wyróżnionym punktem $(S, e) = (*_{i \in I} S_i, e)$, gdzie:

$$S = \{e\} \cup \{s_1 \dots s_m : s_k \in S_{i_k} \setminus \{e_{i_k}\} \text{ oraz } i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_m, m \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiorem wierzchołków produktu wolnego grafów jest zbiór $*_{i \in I}(V_i, v_i)$. Odpowiadający produktowi wolnemu grafów $(V_i, E_i)_{i \in I}$ zbiór krawędzi definiujemy przez:

$$*_{i \in I} E_i = \{\{vu, vu'\} : \{v, v'\} \in \bigcup_{i \in I} E_i \text{ oraz } u, vu, v'u \in *_{i \in I} V_i\}.$$

Wiecej o tej konstrukcji można znaleźć na przykład w [1]. Dzięki temu, że w $G_1 * G_2$ można wybrać rosnący ciąg podgrafów $\{H_n\}$ taki, że

- H_n powstaje poprzez skończenie wiele powtórzeń operacji sumy Markowa dla grafów G_1, G_2 ,

- H_n daje się izometrycznie włożyć w $G_1 * G_2$,
- $G_1 * G_2$ jest granicą induktywną H_n .

mamy już za darmo następujący

Fakt 24. *Jeśli (V_i, v_i) , $i = 1, 2$ są grafami z wyróżnionymi punktami posiadającymi metryki **(SCND)**, to $V_1 * V_2$ też jest **(SCND)**.*

Najbardziej interesujące są aplikacje tego zjawiska dla grafów Cayleya grup dyskretnych. Dzięki poprzednim faktom mamy następujący

Fakt 25. *Jeśli $\Gamma_i = \langle S_i | R_i \rangle$, $i = 1, 2$ są grupami dyskretnymi takimi, że $\text{Cay}(\Gamma_i, S_i)$ jest **(SCND)**, to i $\text{Cay}(G_1 * G_2, S_1 \cup S_2)$ jest **(SCND)**.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że graf Cayleya produktu wolnego jest induktywną granicą ciągu podgrafów utrzymywanych przez skończoną ilość operacji sumy Markowa grafów $\text{Cay}(\Gamma_i, S_i)$. $\square$

Zauważmy, że grafy mające ≤ 3 wierzchołki mają metryki **(SCND)** z pobudek czysto arytmetycznych, więc daje to nam zgrabniejszy dowód twierdzenia z rozdziału 2.

Rozdział 5

Zastosowania i przykłady

5.1 Kilka prostych przykładów grafowych

Fakt 26. *Każdy graf pełny o $n + 1$ wierzchołkach ma (SCND) dla $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. W grafie takim wystarczy popatrzeć na maksymalną macierz metryki (czyli λ o maksymalnym nośniku), gdyż jego podgrafy metryczne także są pełne. Ma ona postać:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy dla dowolnego układu współczynników $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1})^T$, oznaczając przez $\Lambda = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$ mamy: $D\lambda = (\Lambda - \lambda_1, \Lambda - \lambda_2, \dots, \Lambda - \lambda_n, \Lambda - \lambda_{n+1})^T \neq 0$ dla $\lambda \neq 0$, co wobec faktu 19(a) daje nam tezę. $\square$

Wniosek 27. (SCND) jest własnością metryki, nie grupy.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że wobec powyższego faktu, $\text{Cay}(\mathbb{Z}/4, \{0, 1, 2, 3\})$ ma własność (SCND), zaś dzięki faktowi 11, $\text{Cay}(\mathbb{Z}/4, \{1\})$, nie. $\square$

Fakt 28. $(2n + 1)$ -kąt foremny ma własność (SCND).

Dowód. Oznaczmy przez $\tau_A = \chi_A - \chi_{A'}$ - funkcję przyjmującą wartość $+1$ na zbiorze A oraz -1 na jego dopełnieniu. Z dokładnością do stałej normalizującej można napisać bardzo ładne włożenie: $k \mapsto \tau_{\{1, \dots, 2k\}}$, gdy $0 \leq k \leq n$, $(n + k) \mapsto \tau_{\{1, \dots, 2k-1\}}$, gdy $0 \leq k \leq n + 1$ i teraz krótka kontemplacja pozwala na stwierdzenie, że włożenie to faktycznie jest kwadratowo-izometryczne oraz wierzchołki są liniowo (więc w szczególności: afinicznie) niezależne. $\square$

Wniosek 29. $PSL(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$ ma własność (SCND) względem zbioru generatorów $\{a, b\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że (przy powyższych oznaczeniach) $a^2 = -Id = b^3$, zaś dzięki temu, że elementy te to dokładnie inwersja oraz złożenie translacji z inwersją, przy

interpretacji jako grupa izometrii płaszczyzny hiperbolicznej $\mathbb{H}^2$, elementy te generują całą grupę, zatem po wydzieleniu przez $\{Id, -Id\}$ mamy, że

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rangle_{\sim} * \langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rangle_{\sim} = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3.$$

□

Fakt 30. $SL(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4 *_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/4$ nie ma własności **(SCND)** względem zbioru generatorów $\{a, b\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Dowód. Zauważmy, że w tej sytuacji, podobnie jak powyżej, mamy relację $a^4 = 1$, która jest najkrótszą relacją, więc w tym grafie Cayleya można odnaleźć prostokąt, co daje tezę za faktem 12. □

Wniosek 31. Własność **(SCND)** nie musi być dziedziczona przez rozszerzenia **(SCND)**-**(SCND)** przez ciągi dokładne.

Dowód. Mamy ciąg dokładny $\{e\} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \{e\}$, gdzie drugi i czwarty element ciągu ma własność **(SCND)**, zaś odwzorowanie zachowuje zbiór generujący (identycznościowo), jednak graf Cayleya grupy tak rozszerzonej nie ma **(SCND)**. □

Fakt 32. Produkt wolny z amalgamacją nie musi dziedziczyć własności **(SCND)**.

Dowód. Rozważmy $\mathbb{Z}/9 *_{\mathbb{Z}/3} \mathbb{Z}/9 = \langle a, b | a^9, a^3b^{-3} \rangle$, czyli ze zbiorem generatorów w naturalny sposób pochodzącym od posiadających własność $\mathbb{Z}/9 = \langle a | a^9 \rangle$. Zauważmy, że najkrótsza relacja w tej prezentacji to $a^3 = b^3$, która ma długość parzystą, więc za faktem 12 mamy tezę. □

Fakt 33. Suma prosta $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 = \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \cup \{s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} : s_i \in S_i\} \rangle$ nie ma **(SCND)** dla dowolnych grup $\Gamma_i = \langle S_i | R_i \rangle$, $i = 1, 2$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że w grafie Cayleya sumy prostej relacja postaci $s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1}$ dla $s_i \in S_i$ zadaje izometrycznie włożony prostokąt. □

Fakt 34. Grupy wolne F_n mają własność **(SCND)** dla wolnego zbioru generatorów.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że rozważany graf to $*_{k=1}^n \mathbb{Z} = *_{k=1}^{2n} \mathbb{Z}/2$, o którym już wiemy, że ma metrykę **(SCND)**. □

Definicja 7. Grupą Artina nazywamy grupę Γ zadaną przez prezentację: S - skończony zbiór generatorów, $R = \{ \langle s, t \rangle^{m_{s,t}} = \langle t, s \rangle^{m_{t,s}} : s, t \in S \}$, gdzie $m_{s,t} \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ (relację $\langle s, t \rangle^\infty = \langle t, s \rangle^\infty$ interpretujemy podobnie jak w przypadku grup Coxetera: żadna spośród $\langle s, t \rangle^k = \langle t, s \rangle^k$ nie zachodzi dla $k \geq 1$), symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle^k$, oznaczający uogólnioną relację węzłową, jest uproszczoną formą zapisu iloczynu alternującego długości k , czyli $\langle s, t \rangle^3 = sts$, $\langle s, t \rangle^4 = stst$ etc. $\Gamma = \langle S | R \rangle$

Fakt 35. **(SCND)** w klasie grup Artina charakteryzuje grupy wolne.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dowolna uogólniona relacja węzłowa jest parzysta, więc teza wynika z poprzedniego faktu oraz faktu 11. □

Uwaga 4. Nie wiadomo w ogólności, czy grupy Artina (a nawet grupy warkoczy, czyli takie grupy Artina, w których dla $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, $m_{s_i, s_j} = 2$ dla $|i - j| \geq 2$, $m_{s_i, s_{i+1}} = 3$) mają własność Haagerupa, w szczególności więc: czy metryka długości słów jest **(CND)**.

5.2 Przykład ciągły

W poprzedniej sekcji było więcej przykładów negatywnych niż pozytywnych, co pozwala nabrać przekonania, że zjawisko **(SCND)** jest dość efemeryczne. W szczególności, przykłady pozytywne - inne niż produkty wolne - wydają się być niemal nieosiągalne, dlatego tym ciekawsze jest odnalezienie takowego. Celem tej sekcji będzie pokazanie, że $\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową ma własność **(SCND)**. Wykorzystamy następujące

Twierdzenie 36. Dla dowolnego $t > 0$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^k} e^{-2t\pi\|x\|} e^{-2\pi i\langle \xi|x \rangle} dx = \frac{t \cdot c_k}{(t^2 + \|\xi\|^2)^{\frac{k+1}{2}}}$$

gdzie c_k jest stałą zależną jedynie od wymiaru i wynosi $c_k = \Gamma(\frac{k+1}{2})\sqrt{\pi}^{-(k-1)}$.

Dowód można odnaleźć na przykład w [13], chapter 1.

Twierdzenie 37 (Schoenberg). Metryka euklidesowa na $\mathbb{R}^k$ jest **(SCND)**.

Dowód. Zauważmy najpierw, że $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{-\frac{1}{n}\|x\|} - 1) = -\|x\|$. Ustalmy skończony układ punktów $X \subseteq \mathbb{R}^k$, układ skalarów $\lambda: X \rightarrow \mathbb{C}$ taki, że $\sum_{x \in X} \lambda(x) = 0$. Mamy:

$$-\sum_{x,y \in X} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{x,y \in X} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} (e^{-\frac{1}{n}\|x\|} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{x,y \in X} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} e^{-\frac{1}{n}\|x\|}$$

gdzie ostatnia równość wynika z tego, że $\sum_{x \in X} \lambda = 0$. Skorzystamy teraz z poprzedniego twierdzenia, pisząc odwrotną transformatę Fouriera. Aby być w zgodzie z poprzednimi oznaczeniami, kładziemy $t = \frac{1}{2n\pi}$. Kontynuując:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{x,y \in X} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{t \cdot c_k}{(t^2 + \|\xi\|^2)^{\frac{k+1}{2}}} e^{2\pi i\langle \xi|x-y \rangle} d\xi = \\ &= \frac{c_k}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\sum_{x,y \in X} \lambda(x) \overline{\lambda(y)}}{(t^2 + \|\xi\|^2)^{\frac{k+1}{2}}} e^{2\pi i\langle \xi|x \rangle} e^{2\pi i\langle \xi|y \rangle} d\xi = \\ &= \frac{c_k}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} \left| \sum_{x \in X} \lambda(x) e^{2\pi i\langle \xi|x \rangle} \right|^2 \frac{d\xi}{(t^2 + \|\xi\|^2)^{\frac{k+1}{2}}} = \frac{c_k}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^k} \left| \sum_{x \in X} \lambda(x) e^{2\pi i\langle \xi|x \rangle} \right|^2 \frac{d\xi}{\|\xi\|^{k+1}} \end{aligned}$$

dzięki temu, że funkcja podcałkowa jest nieujemna i niezerowa, gdyż *exponensy* są linowo niezależne (w przypadku jednowymiarowym jest to prosty wniosek ze znanego faktu o wyznaczniku macierzy Vandermonde'a: przypadek ogólny sprowadzamy do przypadku jednowymiarowego przez spostrzeżenie, że ponieważ układ punktów $X \subseteq \mathbb{R}^k$ jest skończony, można dobrać prostą $t \cdot \mathbf{v}$ krojącą się ze zbiorem $\bigcup_{i \neq j} \{x_i - x_j\}^\perp \neq \mathbb{R}^k$ na $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$), zatem dostajemy wyrażenie ściśle dodatnie. $\square$

Zauważmy także, że jeśli potraktujemy otrzymane wyrażenie jako funkcję na $\mathbb{R}^m \ni \lambda$, gdzie $m = \#X$, to jest to odwzorowanie ciągłe, zaś wartość wyrażenia jest proporcjonalna do $\|\lambda\|^2$, więc na sferze jednostkowej przyjmuje jakieś minimum. To motywuje sformułowanie - potrzebnej w następnej sekcji - technicznej definicji.

Jednym z pytań, które motywowało te badania, było to zadane przez Z. Skoczylasa w [12]: czy dla dowolnych punktów $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^k$, $(-1)^n \cdot \det(\|x_i - x_j\|)_{1 \leq i, j \leq N} < 0$? Jasnym jest, że ponieważ wyrażenie owe jest ciągłe, wystarczy pokazać, że się nigdzie nie zeruje (i przetestować na jakimś łatwym układzie punktów) - stąd też pytanie o **(SCND)** w przypadku innych znanych obiektów, jednak brak ciągłości, jak w przypadku przestrzeni euklidesowej, wymusza założenie posiadania co najmniej **(CND)**.

5.3 Opis kwantytatywny

Celem tej sekcji będzie następujące

Twierdzenie 38. *Wśród $\mathbb{R}$ -grafów (**SCND**) charakteryzuje $\mathbb{R}$ -drzewa.*

Oczywiście jeśli w $\mathbb{R}$ -grafie istnieje cykl, to analogon faktu 11 daje nam implikację w jedną stronę. Opis kwantytatywny pozwoli nam uzyskać implikację odwrotną. W tym celu wprowadzona jest pomocnicza

Definicja 8. *Metryka jest silnie warunkowo ujemnie określona (będziemy dalej pisać, że jest (**SCND**)) z ciągiem stałych $c_n > 0$, gdy:*

$$\forall \lambda: V \rightarrow \mathbb{C} \left(0 < \#\text{supp}(\lambda) < \infty \wedge \sum_{x \in V} \lambda(x) = 0 \right) \Rightarrow \sum_{x, y \in V} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} d(x, y) \leq -c_n \|\lambda\|_2^2$$

gdzie $\|\cdot\|_2$ oznacza standardową normę euklidesową, zaś $n = \#\text{supp}(\lambda)$.

Fakt 39. *Jeśli (X_i, x_i) są zbazowanymi przestrzeniami metrycznymi, których metryki są (**SCND**) z ciągami stałych c_n^i , $i = 1, 2$, to ich bukiet $X_1 \vee X_2$ ma metrykę (**SCND**) z ciągiem stałych $c_n = \frac{1}{2} \min\{c_k^1, c_k^2 : k \leq n\}$.*

Dowód. Niech $\lambda: X_1 \vee X_2 \rightarrow \mathbb{C}$ będzie układem skalarów jak w definicji (**SCND**), rozważmy funkcje:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} \lambda(x) & \text{gdy } x \in X_i \setminus \{x_i\}, \\ -\sum_{y \in X_i \setminus \{x_i\}} \lambda(y) & \text{gdy } x = x_i \\ 0 & \text{gdy } x \in X_{3-i} \setminus \{x_{3-i}\}. \end{cases}$$

Zauważmy, że $\text{supp}(\lambda_i) \subseteq X_i$, $\sum_{x \in X} \lambda_i(x) = 0$ oraz $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = \lambda(x)$, ponadto przynajmniej jedna z tych dwu funkcji jest niezerowa. Jeśli jedna z nich jest zerowa (czyli $\text{supp}(\lambda) \subseteq X_i$ dla pewnego i), to teza jest oczywista. Załóżmy, że żadna z nich nie jest.

$$\begin{aligned} \sum_{x, y \in X_1 \vee X_2} (\lambda_1(x) + \lambda_2(x)) \overline{(\lambda_1(y) + \lambda_2(y))} d(x, y) &= \sum_{x, y \in X_1 \cup \sim X_2} \lambda_1(x) \overline{\lambda_1(y)} d(x, y) \\ &+ \sum_{x, y \in X_1 \cup \sim X_2} \lambda_1(x) \overline{\lambda_2(y)} d(x, y) + \sum_{x, y \in X_1 \cup \sim X_2} \lambda_2(x) \overline{\lambda_1(y)} d(x, y) + \sum_{x, y \in X_1 \cup \sim X_2} \lambda_2(x) \overline{\lambda_2(y)} d(x, y) = (*) \end{aligned}$$

Przy czym druga i trzecia suma jest równa zeru: przekrój nośników tych dwu funkcji jest najwyżej jednopunktowy, a $d(x_1, x_2) = 0$. Korzystając z założeń, możemy całość oszacować:

$$(*) \leq -c_j^1 \|\lambda_1\|_2^2 - c_l^2 \|\lambda_2\|_2^2 \leq -c_n (\|\lambda_1\|_2^2 + \|\lambda_2\|_2^2) \leq -\frac{1}{2} c_n (\|\lambda_1 + \lambda_2\|_2^2)$$

gdzie ostatnie przejście to nierówność $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. $\square$

Warto tutaj dodać komentarz, że bukiet grafów to dokładnie coś, co wcześniej nazywaliśmy produktem Markowa, w szczególności - metryka na bukiecie przestrzeni metrycznych definiuje się podobną formułą. Przyglądając się dowodowi twierdzenia z poprzedniej sekcji, a raczej komentarzowi do niemu, możemy sformułować

Wniosek 40. *$\mathbb{R}$ jest (**SCND**) z pewnym ciągiem stałych $c_n > 0$.*

Fakt 41. *Niech X będzie $\mathbb{R}$ -drzewem. Wówczas metryka grafowa na X jest (**SCND**).*

Dowód. Ustalmy skończenie wiele punktów z X . Leżą one na skończenie wielu gałęziach tego $\mathbb{R}$ -drzewa, więc możemy modelować tę sytuację (konkretniej: macierz wzajemnych odległości tych skończenie wielu punktów) na $\mathbb{R}$ -drzewie, które powstało przy pomocy skończonego ciągu operacji brania bukietu prostych. Skoro tam szukane wyrażenie jest ujemne, to i w wyjściowym $\mathbb{R}$ -drzewie było. $\square$

Uwaga 5. *Rozumowanie to jest de facto stwierdzeniem, że dowolne $\mathbb{R}$ -drzewo powstaje jako granica induktywna obiektów powstałych jako skończony ciąg operacji brania bukietów prostych, podobnie jak argumentowaliśmy posiadanie (SCND) przez produkt wolny grafów.*

Fakt ten daje nam to zatem nietrywialny na pierwszy rzut oka przykład przestrzeni z metryką (SCND)

Wniosek 42. *Płaszczyzna euklidesowa z metryką “rzeka” ma metrykę (SCND).*

Rozdział 6

Uwagi końcowe i problemy

6.1 Uwagi końcowe. Dlaczego “warunkowo”?

Jedną z motywacji do badania jąder mających (SCND) było następujące:

Twierdzenie 43 (Schoenberg). *Niech $K: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ będzie jądrem. Jeśli K jest (CND), to $\forall t > 0 \quad e^{-tK(\cdot, \cdot)}$ jest dodatnio określone. Ponadto, przeciwna implikacja zachodzi dla jąder K spełniających: $K(x, y) \in \mathbb{R}, K(x, x) \geq 0$.*

Prawa strona tej równoważności jest interesująca, gdyż wobec twierdzenia Gelfanda-Naimarka-Segala funkcje dodatnio określone na grupie są w odpowiedniości z cyklicznymi reprezentacjami. Naturalnym pytaniem, jakie można sobie zadać, jest:

Pytanie 2. *Czy jeśli założymy o jądrze (SCND) zamiast (CND), dostaniemy coś więcej? W szczególności, czy dostaniemy jądro ściśle dodatnio określone?*

Tutaj jądro ściśle dodatnio określone rozumiemy w jedyny możliwy sposób, by być w zgodzie ze zdefiniowanymi już pojęciami dodatniej oraz silnej warunkowej dodatniej określoności.

Odpowiedź jest niestety negatywna z bardzo prozaicznych przyczyn. Wystarczy przyrzec się dowodowi twierdzenia Schoenberga: najpierw trzeba pokazać, że punktowy iloczyn jąder dodatnio określonych jest dodatnio określony - wynika to z twierdzenia faktoryzacyjnego (fakt 14) oraz obserwacji, że produkt punktowy (zwany czasem, z dość naturalnych powodów, *produktem Schura macierzy*) odpowiada dokładnie produktowi tensorowemu dwu faktoryzacji. Potem trzeba wykorzystać fakt 15 by stwierdzić, że skoro jądro warunkowo ujemnie określone rozpada się na dwa kawałki, podobnie dział się będzie z *exponentem* oraz wykorzystać obserwację, iż $S(x, y) = e^{F(x)} e^{\overline{F(y)}}$ również jest jądrem dodatnio określonym. Szczegóły można znaleźć na przykład w [4], chapter 1. O ile oba fakty można dość łatwo poprawić, by pasowały do tych założeń z analogiczną tezą, o tyle jądro postaci S zawsze będzie generowało zero w częściowym spektrum. Dłuższy ogląd tego zjawiska pozwolił postawić następujące (tym razem prawdziwe) przypuszczenie, iż jąder ściśle dodatnio określonych - na grupach skończonych, o postaci macierzy Toepliza - w zasadzie nie ma. Wyjaśnimy to w poniższej serii faktów.

Fakt 44. *Jeśli dwie reprezentacje unitarne są równoważne, to są unitarnie równoważne.*

Dowód. Niech $\pi_i: \Gamma \rightarrow U(\mathcal{H}_i)$ będą dwiema reprezentacjami, których równoważność ustala operator A . Ponieważ jest to operator odwracalny, w rozkładzie biegunowym $A = |A|U$ na operator dodatni $|A|$ oraz częściową izometrię U , spektrum operatora A (więc i $|A|$) odcina

się od zera (ze zwartości spektrum), więc istnieje $|A|^{-1}$, zatem: $|A|U\pi_1(x) = \pi_2(x)|A|U$, a ponieważ $|A|$ jest granicą wielomianów od A, A^* , które przeplatają te dwie reprezentacje, możemy pomnożyć z lewej strony przez $|A|^{-1}$ i dostać $U\pi_1(x) = \pi_2(x)U$. Ponieważ jądro A jest trywialne, U jest unitarny, gdyż jest odwracalną częściową izometrią: $U = |A|^{-1}A$ jest iloczynem dwu odwracalnych operatorów. $\square$

Fakt 45. *Niech Γ będzie skończoną grupą, zaś $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ściśle dodatnio określoną (i.e. jądro typu Toeplitza $\Phi: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ zadane wzorem $\Phi(x, y) = \varphi(y^{-1}x)$ jest ściśle dodatnio określone), unormowaną (i.e. $\varphi(e) = 1$). Wówczas reprezentacja związana z tą funkcją jest unitarnie równoważna reprezentacji lewej regularnej.*

Dowód. By dowieść tezy musimy częściowo powtórzyć konstrukcję GNS. Na algebrze grupowej $\mathbb{C}[\Gamma]$ wprowadzamy formę kwadratową wzorem: $\langle \delta_x | \delta_y \rangle = \Phi(x, y)$ i przedłużamy na całą algebrę grupową przez dwuliniowość. Podobnie jak w dowodzie faktu 14, następnym krokiem w konstrukcji GNS jest wydzielenie tej przestrzeni liniowej przez jądro tejże formy kwadratowej. W przypadku jądra ściśle dodatnio określonego, jest to podprzestrzeń trywialna: jeśli $\mathbb{C}[\Gamma] \ni \lambda = \sum_{x \in \Gamma} \lambda(x) \delta_x \neq 0$, to mamy

$$\left\langle \sum_{x \in \Gamma} \lambda(x) \delta_x \middle| \sum_{x \in \Gamma} \lambda(x) \delta_x \right\rangle = \sum_{x, y \in \Gamma} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \langle \delta_x | \delta_y \rangle = \sum_{x, y \in \Gamma} \lambda(x) \overline{\lambda(y)} \Phi(x, y) > 0.$$

Ponadto, dla wektorów bazowych $\langle \delta_x | \delta_x \rangle = 1$, więc jeśli $\mathcal{H}$ określimy jako $\mathbb{C}[\Gamma]$ z tym iloczynem skalarnym, odwzorowanie identycznościowe $\alpha: \mathbb{C}[\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}[\Gamma] \subset \ell^2 \Gamma$ (tę inkluzję rozumiemy jako dziedziczenie normy), ponieważ na skończone-wymiarowych przestrzeniach Banacha wszystkie normy są równoważne, jest ograniczone oraz jej odwrotne również jest ograniczone; ponadto α komutuje z reprezentacją, gdyż w obu przypadkach - jak w dowodzie twierdzenia GNS - jest to po prostu lewe mnożenie. Mając równoważność, unitarną równoważność otrzymujemy dzięki poprzedniemu faktowi. $\square$

W takim razie na grupach skończonych wszystkie funkcje ściśle dodatnio określone są równoważne funkcji δ_e , współczynnikowi reprezentacji lewej regularnej. Oczywiście powyższe stwierdzenie nie jest prawdziwe dla grup nieskończonych: dzięki twierdzeniu Bochnera, na $\mathbb{Z}$ funkcje ściśle dodatnio określone odpowiadają dokładnie miarom o pełnym nośniku na $\hat{\mathbb{Z}} = S^1$ - a istnieją miary o pełnym nośniku, które nie są absolutnie ciągle względem miary Lesbegue'a.

6.2 Kilka problemów otwartych

Jednym z najbardziej naturalnych pytań jest: czy istnieje inny niż podany w rozdziale 3 przykład grafu, który posiada metrykę **(CND)**, ale nie **(SCND)**? Wyliczenia komputerowe dla małych grafów sugerują odpowiedź negatywną: wszystkie grafy mające **(CND)**, ale nie **(SCND)**, miały jako metryczny podgraf prostokąt. Ma to ciekawą interpretację z punktu widzenia informatyki teoretycznej: pytanie tak postawione komputerowi, by mógł je przeliczyć, musi sprawdzać spektra wszystkich podgrafów metrycznych - a ponieważ podzbiorów zbioru n -elementowego jest 2^n -wiele, *a priori* jest to pytanie z klasy **NP** - problemów mających rozwiązanie w czasie wielomianowym (w tym przypadku: eksponencjalnym). Jednak pozytywna odpowiedź na poniższe

Pytanie 3. *Czy jeśli graf (V, E) ma metrykę **(CND)**, ale nie **(SCND)**, musi zawierać jako podgraf metryczny prostokąt?*

redukuje zagadnienie do problemu rozwiązywalnego w czasie wielomianowym - rzędu najwyżej n^4 - gdyż zbadać należy najwyżej wszystkie spektra macierzy opisujących wzajemne odległości czwórki różnych punktów grafu. Osłabieniem tego pytania, na które ewentualna pozytywna odpowiedź miałaby ciekawe konsekwencje dla informatyki, jest

Pytanie 4. *Czy posiadanie zera w spektrum macierzy wzajemnych odległości jest własnością skończenie wielu punktów? Konkretniej: czy istnieje N (globalna stała dla wszystkich grafów), że jeśli wszystkie podmacierze wzajemnych odległości rozmiaru najwyżej $N \times N$ nie mają zera w spektrum, to i pełna macierz będzie nieosobliwa?*

Analogicznie jak poprzednio, dałoby to, że problem o metrykę **(SCND)** jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym n^N (tak naprawdę, należy jeszcze doliczyć czas potrzebny na policzenie tego wyznacznika, który - dzięki metodzie Gaussa - daje się zrobić również w czasie wielomianowym rzędu n^3 - a aby być jeszcze bliżej prawdy, należy dodać, że metoda ta, z powodu problemów z obliczeniami zmiennoprzecinkowymi, ma złożoność n^3 jedynie w prostych przypadkach - jak na przykład w tym kontekście, gdzie wyrazy macierzy są wyłącznie całkowitoliczbowe). Oczywiście charakteryzacja zjawiska **(SCND)** podana w fakcie 19(a) odpowiada nam w sposób niekonstruktywny na pytanie o złożoność tego problemu: ponieważ wystarczy wiedzieć, czy zero należy do spektrum, możemy pozwolić sobie na policzenie metodą Gaussa wyznacznika odpowiedniej macierzy. Jednak nie daje to odpowiedzi na pytanie - w przypadku otrzymania odpowiedzi *zero* - który podgraf spowodował osobliwość tego operatora.

Inną naturalną obserwacją jest to, iż okrąg S^1 z metryką geodezyjną zachowuje się z badanej w tej pracy perspektywy w zasadzie jak prostokąt (istnieje nań układ czterech punktów o macierzy wzajemnych odległości jak w przykładzie prostokąta). W szczególności, ponieważ $S^1 \subset S^n$ dla dowolnego n naturalnego, żadna przestrzeń tego typu nie może posiadać metryki **(SCND)**. Z drugiej strony, jak pokazaliśmy, wszystkie drzewa oraz przestrzenie euklidesowe mają tę własność. Można więc postawić

Pytanie 5. *Czy własność **(SCND)** jest związana z krzywizną metryki? W szczególności, czy żadna przestrzeń o geometrii sferycznej nie ma **(SCND)**, a czy każda przestrzeń o geometrii hiperbolicznej ma tę własność?*

W pracy [7] J. Faraut i K. Harzallah pokazali, że przestrzenie hiperboliczne $\mathbb{H}^n$ mają metrykę będącą **(CND)**, jednak ich dowód nie daje się zaadoptować do naszego pytania i nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy chociaż płaszczyzna hiperboliczna $\mathbb{H}^2$ ma metrykę **(SCND)**.

Znanym i naturalnym pytaniem, związanym z geometrią grup Artina, jest następujące:

Pytanie 6. *Czy metryka długości słów na tych grupach jest **(CND)**? Czy grupy Artina mają własność Haagerupa?*

W fakcie 35 pokazaliśmy, że w zasadzie nie mogą mieć **(SCND)**. Z drugiej strony, jeśli chcemy **(CND)**, ustalamy układ współczynników i badamy warunkową ujemną określoność. Argument użyty w dowodzie wspomnianego faktu pokazuje, że często ta wielkość wynosi 0. Z drugiej strony, jeśli układ współczynników ma nośnik określony na takich elementach, których odległości są modelowane przez wolne grupy Artina (czyli grupy wolne), szukana wielkość jest oczywiście ujemna. W takim razie ewentualnego braku **(CND)** należy upatrywać wśród grup o relacjach “średniej” wielkości, wśród układów współczynników o nośnikach przecinających cykl w grafie Cayleya na “średniej” ilości punktów. Nie pokaże to jednak braku własności Haagerupa tej klasy grup, gdyż twierdzenie Akermanna-Waltersa

zapewnia jedynie istnienie właściwej funkcji warunkowo ujemnie określonej - to wcale nie musi być metryka.

Kolejnym zagadnieniem jest to związane z ostatnią sekcją: zgodnie z twierdzeniem Schoenberga, jeśli na grupie istnieje funkcja typu długości: rzeczywista, nieujemna, która ma własność **(CND)**, to potrafimy zeń wyprodukować cały ciąg funkcji dodatnio określonych - które zgodnie z konstrukcją GNS odpowiadają reprezentacjom z wektorem cyklicznym. Już w poprzedniej sekcji *implicite* postawiliśmy następujące

Pytanie 7. *Czy założenie o funkcji **(SCND)** zamiast **(CND)** daje nam jakieś lepsze własności związanej reprezentacji?*

Oczywiście pierwotne przypuszczenie, jak pokazaliśmy w poprzedniej sekcji, jest dalekie od bycia prawdziwym. Jednak być może istnieją jakieś inne własności, które można z tego opisu wydedukować.

Bibliografia

- [1] **L. Accardi, R. Lenczewski, R. Śaławata**, *Decompositions of the free product of graphs*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **10** (2007), 303–334.
- [2] **M. Bożejko, T. Januszkiewicz, R.J. Spatzier**, *Infinite Coxeter groups do not have Kazhdan's property* *J. Operator Theory* **19** (1988), 63–68
- [3] **M. Bożejko**, *Positive-definite kernels, length functions on groups and noncommutative von Neumann inequality*, *Studia Math.* **XCIV** (1989), 107–118.
- [4] **M. Bożejko**, *Positive-definite kernels on discrete groups*, to appear in Springer Lecture Notes.
- [5] **N. Bourbaki**, *Groupes et algèbres de Lie*, Masson, 1981.
- [6] **R. Carter**, *Simple groups of Lie type*, John Wiley & Sons, 1972.
- [7] **J. Faraut, K. Harzallah**, *Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **24** (1974), 171–217.
- [8] **U. Haagerup**, *An example of a non-nuclear C^* -algebra which has the metric approximation property*, *Inventiones Mat.* **50** (1979), 279–293
- [9] **A. Hora, N. Obata**, *Quantum Probability and Spectral Analysis on Graphs*, Springer, 2007.
- [10] **N. Obata**, *Positive Q -matrices of graphs* *Studia Math.* **179** (2007), 81–97.
- [11] **I.J. Schoenberg**, *Metric spaces and positive definite function*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **44** (1938), 522–536.
- [12] **Z. Skoczylas**, *Konkurs z nagrodą*, http://www.im.pwr.wroc.pl/~skoczylas/konkurs_na_strone_www.pdf.
- [13] **E. M. Stein, G. Weiss**, *Introduction to harmonic analysis on euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.
- [14] **B. Simon, M. Reed**, *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.