Rozmaite techniki dowodzenia nierówności

Paweł Józiak

5 stycznia 2017

Na kółku gimnazjalnym zajmujemy się rozdziałami 1-6; na kółku licealnym zajmujemy się rozdziałami 4-8; na kółku olimpijskim zajmujemy sie rozdziałami 9-12. Dziś zakładamy, że wszystkie liczby x, y, a, b, c to liczby rzeczywiste dodatnie, zaś m, n, k to liczby naturalne - $1, 2, 3, \ldots$

1 Prawda czy fałsz?

Oceń prawdziwość nierówności - udowodnij, że dana nierówność jest prawdziwa dla liczb dodatnich albo podaj kontrprzykład:

1. $a^2 \geqslant a$,
2. $a^3 + 1 \geqslant a$,
3. $a^3 + a^2 \geqslant a$,
4. $a^3 + 1 \geqslant a^2$,
5. $2x + \frac{1}{x} \geqslant 3$,
6. $x + \frac{2}{x} \geqslant 2$,
7. $x^2 + y^4 \geqslant 2xy$.

2 Nierówności rozgrzewkowe

Przekształć nierówności do postaci, w której są oczywiste:

1. $2x^2 + 6xy + 7y^2 \leqslant 12x^2 + 8y^2$,
2. $a^3 + 2 \geqslant 2a\sqrt{a}$,
3. $\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 3(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$,
4. $n \leqslant \frac{1}{2}[(n+1)^2 - n^2]$,
5. $\frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$,
6. $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

3 Metoda teleskopowa

Zwana czasem sumowaniem nierówności stronami. Być może warto spróbować wykorzystać nierówności z poprzedniej części:

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\leqslant 1$,
2. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 3\sqrt{n+1}-3$,
3. $1+2+3+\ldots+n\leqslant \frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}$,
4. $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\frac{1}{m^2}\geqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{m+1}$.

4 Średnia arytmetyczna i geometryczna

Podstawą będzie teraz dla nas nierówność, której dowiedliśmy w punkcie 2.6: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$. Udowodnij:

1. $1+a\geqslant 2\sqrt{a}$,
2. $\frac{1}{a}+a\geqslant 2$,
3. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$,
4. $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$,
5. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$,
6. $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$,
7. * $\frac{1}{1+a_1}+\frac{2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\ldots+\frac{n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}<2$, gdy liczby $a_1,a_2,\ldots,a_n$ spełniają warunek: $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k\geqslant 1$ dla dowolnego $1\leqslant k\leqslant n$.

Jeśli zadanie 4.7 nie wychodzi od razu, spróbuj zrobić je w nieco prostszej wersji: $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\ldots+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}<1$ przy tych samych założeniach o liczbach $a_1,\ldots,a_n$. Potem pewien trick pozwoli rozwiązać i zadanie 4.7.

5 Uzupełnianie do pełnego kwadratu

Jak w tytule: uzupełnij wyrażenie do pełnego kwadratu i skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia. Tą metodą udowodnij:

1. $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant(a+b+c)d$
2. $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\geqslant ab-ac+2bc$
3. $a^2+b^2+ab\geqslant 3(a+b-1)$
4. $a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$
5. $a^4+b^4+c^2+1\geqslant 2a(ab^2-a+c+1)$

6 Sumy kwadratów

Zwana także nierównością o monotoniczności indeksów. Główny pomysł wygląda tak: Niech dane będą liczby $a_1, \ldots, a_n$, przyjmijmy oznaczenie $a_{n+1} = a_1$. Mamy:

$$(a_i - a_{i+1})^2 = a_i^2 - 2a_ia_{i+1} + a_{i+1}^2$$

Dodajmy to stronami, wówczas:

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_1)^2 + \ldots + (a_n - a_1)^2 = 2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - 2(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots a_na_1)$$

Dzieląc obie strony przez 2 i zamieniając strony mamy:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots a_na_1) = \frac{1}{2}[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_1)^2 + \ldots + (a_n - a_1)^2] \geqslant 0$$

więc innymi słowy:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots a_na_1$$

Udowodnić nierówności przy pomocy pomysłu pokazanego powyżej:

1. $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$
2. $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$
3. $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant a + b + c$
4. $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$

7 Nierówności między średnimi

Oznaczmy $M_t(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[t]{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^t}{n}}$ dla $t \neq 0$, $M_0(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Zachodzi następujący fakt: jeśli $t < s$, to $M_t(a_1, \ldots, a_n) \leqslant M_s(a_1, \ldots, a_n)$ oraz równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. W zwyczajowych przypadkach będą nas interesować zastosowania tej nierówności w przypadku, gdy $n = 2, 3, 4$, zaś $t = -1$ (tzw. średnia harmoniczna), $t = 0$ (tzw. średnia geometryczna), $t = 1$ (tzw. średnia arytmetyczna), $t = 2$ (tzw. średnia kwadratowa). Można teraz udowodnić kilka ładnych nierówności:

1. $a^6 + b^9 \geqslant 12a^2b^3 - 64$
2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4$
3. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geqslant 6$
4. $\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{bcd} + \sqrt[3]{cda} + \sqrt[3]{dab} \leqslant a + b + c + d$
5. $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-a_i} \geqslant \frac{nS}{n-S}$, gdzie $0 < a_i < 1$, a $S = a_1 + \ldots + a_n$
6. $\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$
7. $\sqrt{2a + 1} + \sqrt{2b + 1} + \sqrt{2c + 1} \leqslant \sqrt{15}$, o ile $a + b + c = 1$
8. $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S-a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$, gdzie $S = a_1 + \ldots + a_n$
9. $2(a^3 + b^3)^2 \geqslant (a^2 + b^2)^3$
10. $a + b + c \leqslant 9$ dla a, b, c takich, że $a^3 + b^3 + c^3 = 81$
11. $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}$ dla a, b, c takich, że $a^2 + b^2 + c^2 = 8$

12. $\sqrt[n]{ab}+\sqrt[n]{bc}+\sqrt[n]{ca}\leqslant\sqrt[n]{3^{n-2}}$ dla a,b,c takich, że $a+b+c=1$

13. $\frac{1}{a+ab+abc}+\frac{1}{b+bc+bca}+\frac{1}{c+ca+cab}\leqslant\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{abc}}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

14. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^m>n^{m+1}$

8 Nierówność Bernoulliego

Tym razem wystarczy nam, by $x>-1$. Zachodzi następujący fakt, zwany nierónością Bernoulliego:

- jeśli $0<\alpha<1$, to $(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x$
- jeśli $\alpha>1$, to $(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$

zaś równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=0$. Można teraz udowodnić kilka nierówności:

1. $(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$,
2. $(\frac{n^2}{n^2-1})^n<\frac{n}{n-1}$ dla $n\geqslant 2$,
3. $n^n>(n+1)^{n-1}$,
4. $(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$,
5. $\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$ dla $a>1$.

9 Monotoniczność indeksów

Tym razem tak naprawdę (*vide: Sumy kwadratów*), czyli jako uogólnienie metody sumy kwadratów z punktu 6. Załóżmy, że mamy dwa ciągi $a_1,\ldots,a_n$ oraz $b_1,\ldots,b_n$. Dokonujemy sparowania elementów tych dwu ciągów, to znaczy: każdego a_k żenimy z jednym b_j tak, aby żaden z b_j nie miałdwu mężów. Tak dobraną parę mnożymy (algebraicznie) i sumujemy wszystkie wyniki. Kiedy otrzymamy największą wartość, a kiedy najmniejszą? Okazuje się, że nawiększa wartość będzie wtedy, gdy największy a_k ożenimy z największym b_j, drugi największy a_k z drugim największym b_j, ..., najmniejszy a_k z najmniejszym b_j (w skrócie, powiemy, że ciągi a_k i b_j są jednakowo uporządkowane), zaś najmniejsza wtedy, gdy a_k ożenimy z namniejszym b_j, drugi największy a_k z drugim najmniejszym b_j, ..., najmniejszy a_k z największym b_j (w skrócie, powiemy, że ciągi a_k i b_j są przeciwnie uporządkowane). Wszystkie pośrednie sparowania dadzą jakieś wyniki pośrednie. Przy pomocy tego faktu, można pokazać kilka ładnych nierówności:

1. (XXIV MOM, '83) $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab$
2. $a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\geqslant a_1^2a_2+a_2^2a_3+\ldots+a_{n-1}^2a_n+a_n^2a_1$
3. $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\ldots+a_n$
4. $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\geqslant a^2+b^2$
5. $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$
6. $\frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{b^3}\sqrt{\frac{a}{b}}\geqslant\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}$
7. $\frac{a_1}{a_2^2}+\frac{a_2}{a_3^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n^2}+\frac{a_n}{a_1^2}\geqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$
8. $2(a^3+b^3+c^3)\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$
9. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$

10 Nierówność Czebyszewa

Przy oznaczeniach jak w poprzednim paragrafie, zachodzi poniższy fakt:

- $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$, jeśli ciągi a_k, b_j są jednakowo uporządkowane.
- $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$, jeśli ciągi a_k, b_j są przeciwnie uporządkowane.

Można teraz udownidnić łatwo poniższą nierówność:
$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$ dla $n \geqslant 2$, $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
Ale ciekawsze zastosowania nierówności Czebyszewa mają miejsce, gdy uogólnimy to na przypadek większej ilości ciągów:
Niech $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$, $m \geqslant 2$ będą ciągami liczb nieujemnych. Jeśli ciągi te są jednakowo uporządkowane (tzn. każde dwa są jednakowo uporządkowane), to zachodzi nierówność:

$$n^{m-1}\sum_{j=1}^{n}(\prod_{i=1}^{m} a_{i,j}) \geqslant \prod_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j})$$

$$n^{m-1}(a_{1,1}a_{2,1}\cdot\ldots\cdot a_{m,1} + a_{1,2}a_{2,2}\cdot\ldots\cdot a_{m,2} + \ldots + a_{1,n}a_{2,n}\cdot\ldots\cdot a_{m,n}) \geqslant$$
$$\geqslant (a_{1,1} + a_{1,2} + \ldots + a_{1,n})(a_{2,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{2,n})\ldots(a_{m,1} + a_{m,2} + \ldots + a_{m,n})$$

Jak zawsze, w zastosowaniach konkursowych powyższe twierdzenie jest interesujące głownie dla $m = 2, 3, 4$ i n podobnego rzędu. Można teraz łatwo udowodnić poniższe nierówności:

1. $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leqslant \frac{a^6+b^6}{2}$
2. $9(a^6 + b^6 + c^6) \geqslant (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)$
3. $(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b})(\frac{1}{a^2}) \geqslant 3(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c+a})$
4. $(h_a + h_b + h_c)(a + b + c) \geqslant 18S$, gdzie a, b, c - długości boków trójkąta o polu S, zaś h_a, h_b, h_c są długościami wysokości opuszczonych na boki a, b, c, odpowiednio.

11 Monotoniczność indeksów - więcej!

Załóżmy, że mamy m ciągów $a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}$, dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Dokonujemy sparowania elementów tych ciągu, to znaczy: każdego $a_{k,1}$ żenimy z jednym $a_{j,2}$, tych zaś z jednym $a_{l,3}$ *et cetera* tak, aby żaden z $a_{j,i}$ pojawił się w tylko jednym takim układzie. Tak dobraną m-kę mnożymy (algebraicznie) i sumujemy wszystkie wyniki. Kiedy otrzymamy największą wartość? Okazuje się, że nawiększa wartość będzie wtedy, gdy wszystkie ciągi $a_{k,i}$ są parami jednakowo uporządkowane. Możemy podowodzić teraz kilku sympatycznych nierówności:

1. $a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \ldots a_n^{2n+1} \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^2$
2. $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \geqslant (a + b + c + d)abcd$
3. $\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geqslant \frac{a\sqrt{b}}{b+c} + \frac{b\sqrt{c}}{c+a} + \frac{c\sqrt{a}}{a+b}$
4. $\frac{a^3-b^2c}{b^2+c^2} + \frac{b^3-c^2a}{c^2+a^2} + \frac{c^3-a^2b}{a^2+b^2} \geqslant 0$

12 Nierówność Jensena

Funkcję f nazywamy wypukłą, jeśli dla każdych dwu punktów jej dziedziny, odcinek łączący odpowiadające tym punktom punkty wykresu leży ponad wykresem. Formalnie: $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$. Okazuje się, że analogiczną rzecz można napisać dla dowolnie dużej ilości punktów: $f(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$, gdzie $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Zadania do tej nierówności:

1. $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$
2. $\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leqslant \sqrt{4-(a+b)^2}$ dla $-1 \leqslant a, b \leqslant 1$
3. $\prod_{i=1}^n a_i^{a_i} \geqslant (\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n})^{\sum_{i=1}^n a_i}$
4. $(\frac{a^2-b^2}{2})^2 \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}$, gdy $a, b \geqslant \frac{1}{2}$
5. $\sum_{i=1}^n (\frac{1}{a_i} - a_i) \geqslant (n-1)\sqrt{n}$

13 Odpowiedzi i rozwiązania

Prawda czy fałsz?

1. Nieprawda, podstaw $a = \frac{1}{2}$
2. Prawda, jeśli $a \geqslant 1$, to $a^3 \geqslant a$, jeśli $a < 1$, to jedynka załatwia sprawę.
3. Nieprawda, podstaw $a = \frac{1}{2}$
4. Prawda, jeśli $a \geqslant 1$, to $a^3 \geqslant a^2$, jeśli $a < 1$, to jedynka załatwia sprawę.
5. Nieprawda, podstaw $a = \frac{9}{10}$
6. Prawda, ponieważ $x > 0$, możemy przemnożyć nierówność stronami i zapisać ją w postaci $(x-1)^2 + 1 \geqslant 0$
7. Nieprawda, podstaw $x = y = \frac{1}{2}$

Nierówności rozgrzewkowe

1. $0 \leqslant x^2 + (3x-y)^2$
2. $(a\sqrt{a}-1)^2 + 1 \geqslant 0$
3. $\sqrt{1+\frac{1}{k}} \leqslant 2$
4. $n \leqslant n + \frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{k+1}$
6. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$

Metoda teleskopowa

1. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$,
2. Przez zsumowanie stronami nierówności z zadania 2.3,
3. Przez zsumowanie stronami nierówności z zadania 2.4,
4. Przez zsumowanie stronami nierówności z zadania 2.5.

Średnia arytmetyczna i geometryczna

1. $1 + a \geqslant 2\sqrt{a}$ wprost z wyjściowej nierówności,
2. $\frac{1}{a} + a \geqslant 2$ wprost z wyjściowej nierówności,
3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ wprost z wyjściowej nierówności,
4. $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$ wprost z wyjściowej nierówności,
5. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)} \geqslant 0$ z wyjściowej nierówności po spierwiastkowaniu licznika,
6. $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$ po trzykrotnym, osobno dla każdego nawiasu, zastosowaniu wyjściowej nierówności
7. Najpierw wskazówkę: zajmijmy się pojedynczym mianownikiem.

   $$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_k) \geqslant 2\sqrt{1 \cdot a_1} \cdot 2\sqrt{1 \cdot a_2} \cdot \ldots \cdot 2\sqrt{1 \cdot a_k} = 2^k \sqrt{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} \geqslant 2^k,$$

   więc po przejściu do mianownika, $\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)} \leqslant \frac{1}{2^k}$, czyli $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \ldots + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} < 1$.
   Jak z tego wynika nasze zadanie? Jak powyżej, mamy $\frac{k}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)} \leqslant \frac{k}{2^k}$, więc $\frac{1}{1+a_1} + \frac{2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \ldots + \frac{n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}) + \ldots + (\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < 2$

Uzupełnianie do pełnego kwadratu

1. $(a - \frac{d}{2})^2 + (b - \frac{d}{2})^2 + (c - \frac{d}{2})^2 + (\frac{d}{2})^2 \geqslant 0$
2. $(\frac{a}{2} - b + c)^2 \geqslant 0$
3. $(b + \frac{a-3}{2})^2 + \frac{3}{4}(a - 1)^2 \geqslant 0$
4. $(a - \frac{\sqrt{3}}{2a})^2 + (b + \frac{1}{2a})^2 \geqslant 0$
5. $(b^2 - a^2)^2 + (c - a)^2 + (a - 1)^2 \geqslant 0$

Sumy kwadratów

1. Wprost z wyjściowej nierówności, po rozpisaniu lewej strony
2. $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \geqslant (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geqslant ab^2c + bc^2a + ca^2b = abc(a + b + c)$
3. Po przemnożeniu obu stron przez abc otrzymujemy nierówność w postaci jak w drugim kroku zadania 2.
4. Po podniesieniu do kwadratu otrzymujemy nierówność w postaci jak w zadaniu 1.

Nierówności między średnimi

1. Proste.
2. Proste.
3. Dodając i odejmując w każdym liczniku brakującą literę sprowadzamy to do $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geqslant 9$, które jest równoważne $M_1(a,b,c) \geqslant M_{-1}(a,b,c)$.
4. Do każdego ze składników stosujemy nierówność $M_0 \leqslant M_1$.
5. Dodając i odejmując 1 w każdym liczniku dochodzimy do równoważnej postaci $M_1(\frac{1}{1-a_1},\ldots,\frac{1}{1-a_n}) \geqslant \frac{n}{n-S}$. Teraz stosujemy $M_1 \geqslant M_{-1}$.
6. Skorzystać z $M_{-1}(a+b,b+c,c+a) \leqslant M_1(a+b,b+c,c+a)$.
7. Skorzystać z $M_{1/2}(2a+1,2b+1,2c+1) \leqslant M_1(2a+1,2b+1,2c+1)$.
8. Odejmując i dodając S do każdego licznika przekształcamy do równoważnej postaci $\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{a_i}{S}}}{n} \geqslant \frac{n}{n-1}$ i korzystamy z $M_1(\frac{1}{1-\frac{a_1}{S}},\ldots,\frac{1}{1-\frac{a_n}{S}}) \geqslant M_{-1}(\frac{1}{1-\frac{a_1}{S}},\ldots,\frac{1}{1-\frac{a_n}{S}})$.
9. Proste
10. Korzystamy z $M_1 \leqslant M_3$.
11. Korzystamy z $M_2 \leqslant M_3$
12. Korzystamy z $M_{1/n}(ab,bc,ca) \leqslant M_0(ab,bc,ca) = M_0(a,b,c)^2 \leqslant M_1(a,b,c)^2$.
13. Mnożąc obie strony przez 3, możemy napisać $M_1(a,ab,abc)^{-1}+M_1(b,bc,bca)^{-1}+M_1(c,ca,cab)^{-1} \leqslant M_0(a,ab,abc)^{-1}+M_0(b,bc,bca)^{-1}+M_0(c,ca,cab)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}})$. Pozostaje więc udowodnić, że $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Korzystamy teraz z $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}} = M_0(a,a,b)^{-1} \leqslant M_{-1}(a,a,b)^{-1} = \frac{2}{3a}+\frac{1}{3b}$ i podobnie dla pozostałych dwóch składników.
14. Przekształcając, badana nierówność jest równoważna nierówności $M_m(1,3,\ldots,2n-1) > n = M_1(1,3,\ldots,2n-1)$. Nierówność jest ostra, gdyż argumenty nie są wszystkie równe.

Nierówność Bernoulliego

1. $(1+\frac{1}{n})^n = \left((1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{n+1}}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\right)^{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ z nierówności Bernoulliego oraz monotoniczności funkcji $x \mapsto x^{n+1}$.
2. $(\frac{n^2}{n^2-1})^n = (1+\frac{1}{n^2-1})^n < 1+\frac{n}{n^2-1} = 1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n-1} < 1+\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$.
3. $n^n = \left((1+(n-1))^{\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1} < (1+n)^{n-1}$.
4. Dzieląc obie strony przez $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$, analizujemy lewą stronę nierówności: $\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n(n+2)} > 1+\frac{1}{n+1}$, gdzie pierwsza nierówność to nierówność Bernoulliego, a druga jest równoważna $(n+1)^2 > n(n+2)$, która jest oczywista.
5. $(1+\frac{a-1}{n})^n > 1+n\frac{a-1}{n} = a$, wyciągamy obustronny pierwiastek stopnia n i przenosimy 1 na drugą stronę nierówności.

Monotoniczność indeksów

1. Jeśli (bso) $a \geqslant b \geqslant c$, to $a^2 \geqslant b^c \geqslant c^2$ oraz $ab \geqslant ca \geqslant bc$. Wówczas $a^2 \cdot ab + b^2 \cdot bc + c^2 \cdot ca \geqslant a^2 \cdot bc + b^2 \cdot ca + c^2 \cdot ab$.

2. Oczywiste

3. Oczywiste

4. Oczywiste

5. Niech (bso) $a \geqslant b$. Wtedy $\frac{1}{\sqrt{b}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$ oraz $a \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \geqslant a \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{b}}$.

6. Niech (bso) $q \geqslant b$. Wtedy $\frac{1}{a^3\sqrt{a}} \leqslant \frac{1}{b^3\sqrt{b}}$ oraz $\sqrt{b} \leqslant \sqrt{a}$. W konsekwencji $\frac{1}{a^3\sqrt{a}} \cdot \sqrt{b} + \frac{1}{b^3\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$.

7. Korzystamy z metody przy $a_k = a_k$ oraz $b_k = \frac{1}{a_k^2}$, prawa strona nierówności daje najmniejsze możliwe sparowanie.

8. Mamy, że $a^3 + b^3 + c^3 + a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + b^2a + c^2b = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$ zgodnie z metodą.

9. Jeśli (bso) $a \geqslant b \geqslant c$, to $\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{1}{a+b}$. Wtedy $(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}) + (\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}) \geqslant (\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}) + (\frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}) = 3$

Nierówność Czebyszewa

Do uzupełnienia.

Monotoniczność indeksów - więcej!

Do uzupełnienia.

Nierówność Jensena

Do uzupełnienia.