Solą uprawiania matematyki jest zawsze rozwiązywanie zadań, szukanie dowodów nowych, a czasem też i starych, faktów. Z tego też powodu zebraliśmy kilka ciekawszych zadań, które polecamy do samodzielnego rozwiązania. Aby ułatwić wdrożenie się w ten styl zadań, napisaliśmy rozwiązania kilku z nich, a do kilku podaliśmy wskazówki tudzież szkice rozwiązań.

Zadanie 1. Wykaż, że iloczyn odległości ognisk danej elipsy od prostej stycznej do tej elipsy nie zależy od wyboru stycznej.
Rozwiązanie: Oznaczmy przez F_1, F_2 - ognika elipsy, E - punkt stycznoci. Oczywiście bez straty ogólności $EF_2 \geq EF_1$; P_1, P_2 - rzuty F_1, F_2 na styczną. Odbicie symetryczne ogniska F_1 przez prostą styczną oznaczamy F_1', punkt przecicia prostej F_2P_2 i prostej równoległej do stycznej przechodzcej przez F_1' oznaczamy F_2'. Jako Q oznaczamy punkt przecicia prostej P_2F_2 i prostej równoległej do stycznej przechodzącej przez F_1. Trójkąty P_1EF_1 i P_1EF_1' są przystające, więc $F_1E = F_1'E$. Kąty F_1EP_1 i F_2EP_2 są równe, bo prosta P_1P_2 jest styczn, stąd kąty P_1EF_1' i F_2EP_2 są równe, więc F_2, E, F_1' leżą na jednej prostej. Kąty F_1P_1E, EP_2Q, F_1QF_2, $P_1F_1'F_2'$, $F_1'F_2'P_2$ s proste, wic $F_1Q = F_1'F_2'$ i $F_1P_1 = P_1F_1' = P_2F_2' = P_2Q$. Korzystając z tw. Pitagorasa mamy:

$$F_1'F_2^2 - F_2'F_2^2 = F_1'F_2'^2 = F_1Q^2 = F_1F_2^2 - F_2Q^2$$
$$(F_2E + EF_1')^2 - (F_2P_2 + P_2F_2')^2 = F_1F_2^2 - (F_2P_2 - P_2Q)^2$$
$$(F_2E + EF_1)^2 - (F_2P_2 + F_1P_1)^2 = F_1F_2^2 - (F_2P_2 - F_1P_1)^2$$
$$(F_2E+EF_1)^2 - F_2P_2^2 - F_1P_1^2 - 2F_1P_1 \cdot F_2P_2 = F_1F_2^2 - F_2P_2^2 - F_1P_1^2 + 2F_1P_1 \cdot F_2P_2$$
$$F_1P_1 \cdot F_2P_2 = \frac{(F_2E + EF_1)^2 - F_1F_2^2}{4}$$

Lewa strona to iloczyn odległości ognisk od stycznej, a prawa strona nie zależy od wyboru stycznej, bo F_1F_2 - odległość ognisk i $F_2E + EF_1$ - suma odległości punktu od ognisk - stałe.

Zadanie 2. Znajdź zbiór punktów, z których daną elipsę widać pod kątem prostym.

Zadanie 3. W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, punkt H - ortocentrum. Udowodnij, że na bokach AB, BC, CA istnieją odpowiednio takie punkty F, E, D, że $OD + DH = OE + EH = OF + FH$
Wskazówka: Wystarczy pokazać, że można wpisać w ten trójkąt elipsę o ogniskach: H, O.

Zadanie 4. Dany jest czworościan $ABCD$. Pokazać, że sfera wpisana jest styczna do ściany BCD w jej ortocentrum wtedy i tylko wtedy, gdy sfera dopisana do ściany BCD jest styczna w środku okręgu opisanego.

Zadanie 5. Punkt P leżący wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ ma tę własność, że jego rzuty na boki czworokąta leżą na jednym okręgu. Pokazać, że jest on współliniowy ze środkami przekątnych czworokąta.

Zadanie 6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkty P i Q leżą wewnątrz tego trójkąta, przy czym $\angle PAC = \angle ABQ$ oraz $\angle PBC = \angle BAQ$.

Pokazać, że punkty C, P, Q są współliniowe.

Zadanie 7. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa niż π rad oraz zachodzi równość $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD. Udowodnić, że $\angle PCB = \angle ACD$.

Zadanie 8. Mamy daną hiperbolę, tzn. jej dwa ogniska F_1, F_2 oraz punkt P leżący na jednej z gałęzi. Znaleźć zbiór środków okręgów wpisanych w trójkąty F_1F_2P, przy zmieniającym się P.
Rozwiązanie: Bez straty oglności $F_2P \geq F_1P$. A, B, C - punkty styczności okrgu wpisanego z bokami F_1F_2, F_1P, F_2P odpowiednio, X - środek okręgu wpisanego. P leży na hiperboli, więc $c = F_2P - F_1P$ nie zależy od P. $c = F_2C + CP - PB - F_1B = F_2C - F_1B = F_1A - F_2A$, stąd $F_1A = c + F_2A$. $F_1F_2 = F_1A + F_2A = c + 2 \cdot F_2A$, więc $F_2A = \frac{F_1F_2 - c}{2}$. Zatem A nie zależy od P. Wiemy, że X leży na prostej prostopadłej do F_1F_2 przechodzącej przez A, stąd szukanym zbiorem jest ta prosta.

Zadanie 9. W trzech wersjach:

1. Dana jest prosta l oraz okrąg o, jak na rysunku 1. Znaleźć zbiór środkow okręgów stycznych zewnętrznie do tego okręgu oraz do danej prostej.

2. Dane są okręgi o_1 i o_2 położone względem siebie jak na rysunku 2. Znaleźć zbiór środków okręgów stycznych wewnętrznie do o_1 oraz zewnętrznie do o_2.

3. Dane są dwa rozłączne okręgi o_1 i o_2 położone jak na rysunku 3. Znaleźć zbiór środków okręgów stycznych zewnętrznie do o_1 i o_2.

Wskazówki: Przydatne są definicje stożkowych przy pomocy kierownicy, choć przypadek 2. można zrobić (nawet prościej) bez odwoływania się do tej definicji.

Zadanie 10. Dana jest elipsa, tzn. dane są ogniska F_1 i F_2 oraz punkt P należący do niej. Skonstruować styczną do tej elipsy w punkcie P.
Wskazówka: Styczna ma pewną własność związaną z kątem: jest jego dwusieczną. Który to kąt?

Zadanie 11. Znaleźć zbiór obrazów ogniska F_2 przez symetrie względem stycznych do elipsy.

Zadanie 12. Znaleźć zbiór rzutów prostokątnych ogniska F_2 na styczne do elipsy.
Rozwiązanie: F_1, F_2 - ogniska, S - środek elipsy. Prowadzimy równoległe styczne do elipsy w punktach A i B. Czworokąt F_1BF_2A jest symetryczny względem S, więc jest równoległobokiem. Oznaczmy P, Q rzuty F_1, F_2 na styczną w A i S, R rzuty F_1, F_2 na styczną w B. A' odbicie symetryczne A względem prostej PF_1, wtedy $F_1A' = F_1A$. Z symetrii względem S mamy $A'P = AP = BR$, zatem $PRBA'$ jest równoległobokiem, stąd $PR = A'B$. Punkty A', F_1, B s współliniowe, bo $\alpha = \angle F_1AP = \angle F_2AQ = \angle PA'F_1$, $\angle AF_1B = \pi - \angle F_1AF_2 = \pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$, $\angle A'F_1A = \pi - 2\alpha$, $\angle A'F_1A + \angle AF_1B =$

$\pi - 2\alpha + 2\alpha = \pi$. Mamy $PR = A'B = A'F_1 + F_1B = AF_1 + F_1B = 2a$, gdzie a to duża półoś. Stąd $PS = \frac{1}{2}PR = a$. Zatem P tworzą okrąg o środku w S i promieniu a.

Zadanie 13. Dana jest elipsa (tzn. znamy jej ogniska F_1 i F_2 oraz $2a$ - długość dużej półosi) oraz punkt Y leżący na zewnątrz niej. Skonstruować prostą styczną do elipsy z punktu Y; skonstruować również punkt styczności.
Szkic: Z punktu Y prowadzimy dwie proste przecinające nasza elipsę, oznaczmy punkty przecięcia przez A, B, C, D. Rozważmy punkty: P - środek czworkąta $ABCD$, Q - punkt przecięcia prostych AB, CD i prostą je łacząca. Punkty przecięcia prostej PQ z elipsą to szukane punkty - dlaczego?

Zadanie 14. Ogniska elipsy mają współrzędne: $F_1 = (-3,\ 0)$ i $F_2 = (3,\ 0)$. Prosta styczna do elipsy ma równanie: $x + y = 5$. Znaleźć równanie elipsy.

Zadanie 15. Dana jest parabola: ognisko F i kierownica k oraz punkt P leżący na paraboli. Skonstruować styczną do paraboli w punkcie P.
Rozwiązanie: Oznaczmy: Q - rzut P na k. Styczną jest dwusieczna kąta FPQ. Załóżmy, że nie jest styczną, wtedy istnieje na niej punkt P' różny od P, ktry też leży na paraboli, oznaczmy Q' - rzut P' na k. Trójkąt FPQ jest równoramienny, więc dwusieczna przecina FQ pod kątem prostym i przechodzi przez środek FQ, zatem jest ona symetralną FQ, stąd $FP'{=}P'Q$. Kąt $QQ'P'$ jest prosty, i Q jest różne od Q', zatem $FP' = QP' > Q'P'$ - sprzeczność z $FP' = P'Q'$.

Zadanie 16: Znaleźć zbiór obrazów ogniska paraboli względem stycznych do paraboli.

Zadanie 17: Znaleźć zbiór rzutów prostokątnych ogniska paraboli na styczne do paraboli.