Wzory Viete'a i ich zastosowanie do układów równań wielomianów symetrycznych dwóch i trzech zmiennych

Paweł Józiak

2007-12-13

1 Pojęcia wstępne

Wielomianem zmiennej rzeczywistej t nazywamy funkcję postaci:

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

Taką postać wielomianu nazywamy postacią kanoniczną. W szczególności interesują nas wielomiany drugiego i trzeciego stopnia:

$$P(t) = at^2 + bt + c$$

oraz

$$Q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

Pierwiastkiem wielomianu nazywamy taka liczbę x, że $P(x) = 0$. Pierwiastki to zwykle to, co interesuje nas najbardziej, dlatego dużo uwagi poświęca się sposobom ich szukania. Znając pierwiastki, możemy przedstawić wielomian w postaci:

$$P(t) = a_n(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3)\cdots(t - x_n) = a_n \prod_{k=1}^{n}(t - x_k) \qquad (*)$$

Dla wielomianów drugiego stopnia istnieją wzory, dzięki którym potrafimy łatwo odnaleźć pierwiastki. Zachodzi poniższy fakt:

Pierwiastki równania kwadratowego $at^2 + bt + c = 0$ można znaleźć dokładnie wtedy, gdy wyróżnik równania, oznaczany symbolem Δ, jest nieujemny.

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

Są one równe:

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad y = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Gdy wyróżnik jest równy zeru, wtedy $x = y$, co oznacza, że wielomian przecina oś OX dokładnie w jednym punkcie; gdy wyróżnik jest ujemny, to wielomian ten nie ma punktów wspólnych z osią odciętych. Dla wielomianów trzeciego stopnia sprawa nie jest już taka łatwa. Co prawda istnieją wzory pozwalające policzyć pierwiastki takiego równania, zwane wzorami Cardano, są one jednak dość skomplikowane i nie dają wymiernych efektów. Mając do czynienia z równaniem trzeciego stopnia, będziemy musieli się zdać na inuicję (przynajmniej w przypadku znajdowania pierwszego pierwiastka: gdy mamy już jeden, możemy znaleźć pozostałe dwa licząc wyróżnik pozostałej części).

Dalej, interesuje nas zagadnienie dzielenia wielomianów: bo jeśli znajdziemy (zgadniemy) jeden pierwiastek równania trzeciego stopnia, to zamiast pisać

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

możemy zapisać to w postaci zbliżonej do (*):

$$P(t) = a(t - z)(t^2 + et + f)$$

A pierwiastki równania $(t^2 + et + f)$ potrafimy znaleźć licząc wyróżnik.
Dla uproszczenia notacji, bedziemy przyjmować, ze współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1 (zawsze mozemy równanie podzielić przez różną od zera stałą).

2 Pojęcia główne

Zachodzi bardzo interesujący fakt:
x, y są pierwiastkami wielomianu $P(t) = t^2 + at + b$ dokładnie wtedy, gdy: $x + y = -b$ oraz $xy = c$. Dowód tego prostego faktu pozostawimy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie (wykorzystujące wzory z wyróżnikiem).
Zapisujemy to także w postaci: Pierwiastkami równania

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0$$

sa liczby x, y. Fakt ten nazywamy wzorami Viete'y. Zachodzi naturalne rozwinięcie wzorów Viete'y dla wielomianów wyższych stopni: Pierwiastkami równania

$$t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz = 0$$

są liczby x, y, z. I analogicznie dla kolejnych wielomianów: wspolczynnik przy najwyższej potędze to 1, przy kolejnej: suma pierwiastków ze znakiem minus, przy kolejnej: suma iloczynów par pierwiastków, dalej: suma trójek ze znakiem minus, suma czwórek ze znakiem plus etc, aż dochodzimy do wyrazu wolnego (tj. takiego, który stoi przy t^0), który jest równy iloczynowi wszystkich pierwiastków (z odpowiednim znakiem: plus, jeśli mamy parzystą ilość pierwiastków i minus, jeśli nieparzystą). Fakt ten jest łatwo zauważalny, jeśli z postaci (*) przechodzimy do postaci kanonicznej wielomianu. Oznaczmy przez σ_n współczynnik stojący przy n-tym wyrazie od przodu (za wyjątkiem pierwszego) wielomianu w postaci kanonicznej, przy czym σ będzie zapominać znak, tj. sigmy będą równe sumom odpowiednich iloczynów. Dla przykładu, dla wielomianu trzeciego stopnia będziemy mieli:

$$\sigma_1 = x + y + z$$

$$\sigma_2 = xy + yz + zx$$

$$\sigma_3 = xyz$$

I wielomian zapiszemy jako:

$$P(t) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$$

Oznaczamy oprócz tego sumę potęgową, czyli sumę n-tych potęg:

$$S_n = x^n + y^n + z^n$$

(odpowiednio, $s_n = x^n + y^n$ dla wielomianów drugiego stopnia - dla czytelności sumę potęgową trzech zmiennych będziemy oznaczać dużym S, dwu zmiennych - s). Jeszcze tylko jedna obserwacja i możemy stosować poznaną wiedzę.
Dla wielomianów drugiego stopnia mamy:

$$s_{n+2} = x^{n+2} + y^{n+2} = x^{n+2} + y^{n+2} + x^{n+1}y + y^{n+1}x - x^{n+1}y - y^{n+1}x$$

$$= x^{n+1}(x+y) + y^{n+1}(x+y) - x^n xy - y^n xy$$
$$= (x^{n+1} + y^{n+1})(x+y) - xy(x^n - y^n) = s_{n+1}\sigma_1 - s_n\sigma_2$$

Analogiczne przekształcenia dla sum potęgowych trzech wyrazów dają nam wyrażenie:

$$S_{n+3} = S_{n+2}\sigma_1 - S_{n+1}\sigma_2 + S_n\sigma_3$$

Zauważmy teraz jeszcze tylko, ze dla wielomianów dwu zmiennych:

$$\sigma_1 = x + y = s_1$$

$$s_2 = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

A dla wielomianów trzech zmiennych:

$$S_1 = x + y + z = \sigma_1$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 2(xy + yz + zx) =$$
$$= (x+y+z)^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$
$$S_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3$$

Mając pierwsze wyrazy tego ciągu, możemy zawsze łatwo wyznaczyć sigmy: a znając sigmy, położyć je do wielomianu i znaleźć pierwiastki.

3 Zadania

1. Liczby x, y, z spełniają równosci:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

   Udowodnij, że co najmniej jedna z nich równa się a.

2. Suma trzech liczb całkowitych x, y, z jest równa 0. Udowodnij, że liczba $2x^2 + 2y^2 + 2z^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.

3. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

4. Rozwiąż układ równan:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

5. Udowodnij, ze dla liczb nieujemnych x, y, z, których suma jest równa 1, zachodzi poniższe szacowanie:

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$$

6. Rozwiązać układ równań.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 371 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 2483 \\ x \cdot y \cdot z = 21 \end{cases}$$

7. Rozwiązać układ równań.

$$\begin{cases} x^3 & + & y^3 & = & 35 \\ x & \cdot & y & = & 6 \end{cases}$$

8. Rozwiązać układ równań.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & = & 3 \\ x^3 & + & y^3 & = & \frac{9}{8} \end{cases}$$

9. Rozwiązać układ równań.

$$\begin{cases} x & + & y & = & 5 \\ x^4 & + & y^4 & = & 97 \end{cases}$$

4 Rozwiązania

1. Pomnóżmy drugie wyrażenie przez xyz, mamy:

$$xy + yz + zx = \frac{xyz}{a}$$

$$\sigma_3 = a\sigma_3$$

oraz oczywiście

$$\sigma_1 = a$$

Napiszmy zatem wielomian o pierwiastkach x, y, z:

$$P(t) = t^3 - at^2 + \sigma_2 t - \sigma_2 a = t^2(t-a) + \sigma_2(t-a) = (t-a)(t^2 - \sigma_2)$$

Jednym z pierwiastków wielomianu $P(t)$ jest a, więc jedną z liczb x, y, z musi byc a, cbdo.

2. Oczywiście, wprowadźmy wielomian o pierwiastkach x, y, z. $P(t) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$. Na mocy twierdzenia Viete'a: $\sigma_1 = x + y + z = 0$ Wstawiamy do tego wielomianu x, y, z:

$$\begin{cases} 0 & = & x^3 & + & \sigma_2 x & - & \sigma_3 \\ 0 & = & y^3 & + & \sigma_2 y & - & \sigma_3 \\ 0 & = & z^3 & + & \sigma_2 z & - & \sigma_3 \end{cases}$$

Pomnóżmy te równania odpowiednio przez $2x, 2y, 2z$ i dodajmy stronami. Mamy:

$$2x^4 + 2\sigma_2 x^2 - 2\sigma_3 x + 2y^4 + 2\sigma_2 y^2 - 2\sigma_3 y + 2z^4 + 2\sigma_2 z^2 - 2\sigma_3 z = 0$$

$$2x^4 + 2y^4 + 2z^4 + 2\sigma_2(x^2 + y^2 + z^2) - 2\sigma_3(x + y + z) = 0$$

$$2x^4 + 2y^4 + 2z^4 + 2\sigma_2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Ponadto wiemy, że:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2\sigma_2 = -2\sigma_2$$

Wstawiając to do poprzedniego równania mamy:

$$2x^4 + 2y^4 + 2z^4 = (2\sigma_2)^2$$

3. Mamy, że

$$\sigma_1 = 2$$

$$\sigma_2 = \frac{(x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = \frac{2^2 - 14}{2} = -5$$

$$\sigma_3 = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(x + y + z)}{3} =$$

$$= \frac{S_3 - (S_2 - \sigma_2)\sigma_1}{3} = \frac{20 - 2(14+5)}{3} = -6$$

Mamy zatem wielomian:

$$P(t) = t^3 - 2t^2 - 5t + 6$$

Nietrudno zauważyć, że pierwiastki tego wielomianu to 1, -2 oraz 3.

4. łatwo zauwazyć, ze pierwiastki to 1, 1 i -1.

5. Lewa strona nierówności jest trywialna:

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy - xyz + yz - xyz + zx = xy(1-z) + yz(1-x) + zx =$$

$$= xy(x+y) + yz(y+z) + zx \geq 0$$

Prawa natomiast, już ciekawsza, pozwala na wykorzystanie świeżo zdobytej wiedzy. Oznaczmy zgodnie ze schematem:

$$xy + yz + zx = \sigma_2$$

$$xyz = \sigma_3$$

Nasza nierówność przyjmuje zatem postać:

$$\sigma_2 - 2\sigma_3 \leq \frac{7}{27}$$

Zgodnie z treścia zadania mamy:

$$\sigma_1 = 1$$

No i nasz ulubiony wielomian ma teraz postać:

$$P(t) = t^3 - t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = t^3 - t^2 + \frac{2\sigma_2 t - 2\sigma_3}{2}$$

Widzimy, ze końcówka tego wyrażenia jest dość podobna do wyrażenia, które mamy szacować. Policzmy $P(\frac{1}{2})$:

$$P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{\sigma_2 - 2\sigma_3}{2}$$

Wystarczy zatem pokazać, że $P(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{216}$ I jest to dość jasne: jeśli któraś z liczb x, y, z jest większa od $\frac{1}{2}$, i tylko jedna może taka być, wtedy $P(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{2}-y)(\frac{1}{2}-z) \leq 0$ Jeśli natomiast wszystkie są mniejsze od $\frac{1}{2}$, możemy skorzystać z szacowania pomiędzy średnią geometryczną a arytmetyczną:

$$\sqrt[3]{P(\frac{1}{2})} = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{2}-y)(\frac{1}{2}-z)} \leq \frac{\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} - z}{3} = \frac{1}{6}$$

6. 1, 3, 7.

7. Rozwiązanie: 2, 3.

8. Rozwiązania: $\frac{1}{2}$, 1.

9. Rozwiązanie: 2, 3.