Józef Maria Hoene-Wroński jako wizjoner i reformator matematyki

Wiesław Wójcik

I. Sytuacja w matematyce za czasów Hoene-Wrońskiego

W czasie, gdy Józef Maria Hoene-Wroński rozpoczyna swoją działalność naukową wielu matematyków mówiło o potrzebie gruntownej przebudowy matematyki i uściślenia jej podstaw. W analogicznym okresie działali Bernard Bolano, Augustin Cauchy oraz Carl Friedrich Gauss. Wszyscy oni korzystali z ogromnego dorobku Leonarda Eulera, który, umierając w roku 1783, pozostawił nową dziedzinę matematyki – analizę matematyczną – badającą pojęcia i metody, które pojawiły się wraz z rachunkiem różniczkowym i całkowym oraz innymi nowożytnymi teoriami matematycznymi. Słynną pracę Eulera *Introductio in analysin infinitorum* można traktować jako fundament analizy matematycznej. W tej pracy mają miejsce badania nad ideą funkcji, nieskończonych szeregów, rozwijania funkcji w szeregi nieskończone (m.in. funkcji $\sin$, $\cos$, e^x), pojawiają się metody obliczania liczby π, liczby Eulera *e*, słynny wzór Eulera $e^{i\pi} + 1 = 0$ i wiele innych wyników. W pracy Eulera, obok ścisłych pojęć i dowodów, występują rozważania pełne genialnej intuicji, jednak pozbawione jednoznaczności i oczekiwanej przez matematyków ścisłości. Przykładowo, funkcja traktowana jest przez Eulera raz jako pojęcie analityczne, w innych miejscach znów jako krzywa narysowana na płaszczyźnie. Podobna sytuacja miała miejsce przy wykonywaniu operacji na szeregach nieskończonych: czasami traktuje Eulera wszystkie szeregi jako zbieżne, kiedy indziej znów bada ich zbieżność jako kluczową przy wykonywaniu różnych działań.

To wszystko domagało się badań i uściśleń. Ponadto Euler działa w okresie dominującej ideologii oświecenia, która, między innymi, dążyła do oddzielenia filozofii od nauk ścisłych uważając, że filozofia jest dla tych nauk szkodliwa a przynajmniej niepotrzebna. Większość matematyków dziewiętnastego wieku (w tym Gauss i Cauchy) podążało tym torem.

Jednymi z nielicznych, którzy nie godzili się z takim rozdziałem byli Bolzano i Hoene-Wroński. Wszyscy jednak dążyli do uściślenia podstawowych pojęć matematycznych.

Bolzano, na przykład, rozpoczął swój program przebudowy matematyki od definicji podstawowych pojęć geometrii. Uważał to za niezbędne do postawienia matematyki na solidnych podstawach i dążył do sformułowania precyzyjnych definicji linii, powierzchni oraz bryły[1]. W *Betrachtungen* podaje definicję linii wolnej od poza-logicznych pojęć rozumianych jedynie intuicyjnie[2]. Chciał włączyć do matematyki te obiekty, które do jego czasów były rozumiane intuicyjnie i miały jedynie „przed-matematyczny charakter". Dalsza analiza podanych przez niego definicji podstawowych pojęć geometrii doprowadziła Bolzano do badań teoriomnogościowych i topologicznych. W innej znów pracy[3], stara się udowodnić wzory całkowe na długość krzywej, pól powierzchni i objętości brył. Są to rozważania topologiczne i właśnie geometryczno-topologiczną podstawę pragnął dać całemu gmachowi analizy. Przyjmuje, że figury geometryczne (krzywe, powierzchnie i bryły) są zbiorem punktów (tym samym podstawą jego geometrii staje się teoria mnogości), a kluczowe, w dalszej części, staje się wyjaśnienie, w jaki sposób punktu „wiążą" się ze sobą tworząc krzywe, powierzchnie i bryły[4]. Uważał, że odnajdywane w matematyce zależności są obiektywne i są bezpośrednim odbiciem rzeczywistości – według Bolzano prawa matematyki regulują istnienie rzeczywistości[5] (jak w koncepcji pitagorejskiej).

Natomiast Cauchy, pomiędzy 1814 a 1824 rokiem, podjął się wysiłku niemal całkowitej przebudowy podstaw analizy matematycznej. Jego wysiłki zostały zebrane w dwóch fundamentalnych pracach: *Analyse algébrique* oraz *Calcul infinitésimal* wydanych odpowiednio w latach 1821 i 1823. Zasadniczym przedmiotem jego badań było pojęcie granicy, które, odpowiednio uściślone i zdefiniowane, miało służyć do budowania nowych ścisłych pojęć takich jak: ciągłość funkcji, pochodna, całka oznaczona czy zbieżność szeregów. Mimo braku pełnej ścisłości w używaniu pojęcia granicy i popełnianiu błędów (m.in. nierozróżnialnie zbieżności punktowej i jednostajnej funkcji czy „udowodnienie", iż suma szeregu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą) Cauchy uczynił to pojęcie centralnym pojęciem analizy matematycznej.

Również pojęcie funkcji było przedmiotem jego badań. Do czasów Cauchy'ego nie istniało jednoznaczne rozumienie pojęcia funkcji, na przykład powszechnie uważano za funkcje wyrażenie, które miały reprezentacje w postaci wielomianów lub były utworzone z innych funkcji przy pomocy działań

---

[1] B. Bolzano, *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung.* Praga 1810, Vorrede, s. V.

[2] B. Bolzano, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementrargeometrie.* Praga 1804, s. 57.

[3] B. Bolzano, *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt.* Leipzig 1817.

[4] Ibidem, s. 20-21.

[5] B. Bolzano: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Prague 1817, s.7.

algebraicznych; dopuszczano również nieskończone sumy, iloczyny czy ułamki ciągłe. Zakładano, że każda funkcja posiada funkcję pierwotną, która niekoniecznie może być explicite wskazana, a uzasadnienie oparte było na założeniu, że każdą funkcję można rozwinąć w szereg potęgowy oraz że zawsze możliwe jest całkowanie szeregów nieskończonych „wyraz po wyrazie”. To wszystko Cauchy starał się uporządkować i uściślić.

Gauss w końcu dostrzegł w teorii liczb doskonałą teorię matematyczną, którą bardzo intensywnie rozwijał i starał się by właśnie ona uporządkowała całą matematykę. Był też wrogiem rachunku na wielkościach nieskończenie małych (jak i nieskończenie dużych), który stosowany był wówczas przez wielu matematyków (kontynuujących pracę Leibniza). Poza Gaussem również wielu matematyków (m.in. Lagrange) starało się wyeliminować „operacje nieskończone” z matematyki, traktując je jako nieścisłe i nienaukowe.

II. Filozofia absolutna i prawo tworzenia

W takim klimacie, podziału metodologicznego matematyki i pracą nad umocnieniem i uściśleniem podstaw matematyki, pojawił się Wroński. Pragnął w swojej refleksji ukazać i wytworzyć jedność matematyki i całej wiedzy ludzkiej. Tworzony przez niego system wiedzy rodził się w polemice z filozofią Kanta. System ten stanowią trzy podstawowe elementy: filozofia absolutna, prawo tworzenia oraz wiedza najwyższa (jako architektonika prawa tworzenia).

Chociaż wszystkie te elementy są ze sobą ściśle powiązane, to punktem wyjścia jest filozofia absolutna (Wroński poznał ją poprzez doświadczenie mistyczne). To ona pozwala nam odkryć prawo tworzenia. Jednak to prawo bez architektoniki, której pierwszym i najdoskonalszym wyrazem jest matematyka, nie miałoby mocy generowania rzeczywistości, byłoby jedynie poznaniem rzeczywistości Absolutu. Postaram się pokazać tę kwestię dokładniej w dalszej części.

Kant podzielił władze umysłu na intelekt, rozum (czysty oraz praktyczny) i władzę sądzenia. Intelekt w oparciu o aprioryczne formy zmysłowości i kategorie konstytuuje poznawane rzeczy, tworzy ich jedność oraz jedność poznawanego świata. Ponieważ jednak poznanie przez intelekt jest zawsze częściowe, rozum scala fragmentaryczne poznanie przez odniesienie świata fenomenów do przedmiotów nieskończonych. Czyni to w oparciu o idee regulatywne w nim zawarte tzn. ideę świata jako całości, duszy i Boga. Jednak rozum tych przedmiotów nieskończonych nie dosięga – najgłębsza potrzeba rozumu – potrzeba „pełni” i poznania bytów samych w sobie, nie może być zaspokojona przez sam czysty rozum. Metafizyka rodzi się jako nauka dopiero poprzez „czyn etyczny”, dzięki rozumowi praktycznemu – uzasadnieniem dla istnienia dobra są postulaty rozumu praktycznego: wolność, nieśmiertelność i Bóg. Natomiast władza sądzenia, dotycząca upodobania estetycznego, odnosi się do konkretnych obiektów i sądy estetyczne mimo, że subiektywne pretendują do powszechności (to co mnie się podoba powinno podobać się wszystkim). Mamy tu więc do czynienia z podporządkowaniem i nadaniu rangi powszechnej temu, co konkretne i szczególne.

Ten kantowski podział władz umysłu Wroński zachowuje, jednak zmienia jego znaczenie. Przede wszystkim odrzuca kantowskie założenie, że rozum nie dosięga przedmiotów nieskończonych. Jego filozofia absolutna jest poznaniem czystego istnienia. Zauważa, że poszczególne władze umysłu działają według pewnych ogólnych algorytmów. Władza intelektu oparta jest o algorytm sumowania, który łączy i wyodrębnia w sposób nieciągły i w ten sposób nadaje zjawiskom jedność. Władza rozumu próbuje połączyć to, co skończone z tym, co nieskończone (za pomocą ciągłości), a algorytmem jej działania jest algorytm stopniowania, wzrastania. I w końcu władza sądzenia, ukazując nadrzędność i wpływ rozumu na intelekt, neutralizuje ciągłość i nieciągłość – działa zgodnie z algorytmem reprodukcji, odtwarzania.

Według Wrońskiego te trzy algorytmy mają rangę ogólną i są podstawą tworzenia wszelkich innych algorytmów, pozwalających generować całą rzeczywistość.

Algorytmy odnoszą się do prawa tworzenia. Samo prawo tworzenia składa się z jedenastu zasad ukazujących istotę Absolutu, w tym najważniejsze (pierwotne) są trzy najwyższe, z których pozostałe zasady wynikają w oparciu o odpowiednie relacje. I tak zasadą ukazującą absolutną jedność oraz istnienie samo przez się jest rzeczywistość Absolutu – w architektonice odpowiada jej algorytm reprodukcji (mnożenie i dzielenie). Kolejne dwie zasady wskazują na heterogeniczność istoty Absolutu: są to wiedza (spontaniczność, twórczość, wolność i różnorodność) – odpowiada jej algorytm stopniowania oraz byt odsłaniający konieczność i „ustawiczną” stałość Absolutu – tu z kolei mamy algorytm sumowania[6].

Budowany przez Wrońskiego system uniwersalnej wiedzy wynika z zasad najwyższych i dlatego wszystkie jego propozycje i projekty mogą być zrozumiałe jedynie w odniesieniu do prawa tworzenia. Tak przynajmniej uważa sam Wroński. Tym samym prawo tworzenia ukazuje dwie drogi: drogę poznawczą „w górę”, gdy docieramy do samej rzeczywistości Absolutu i uzyskujemy moc tworzenia oraz drogę „w dół”, kiedy, w oparciu o poznane zasady, tworzymy rzeczywistość.

Filozofia absolutna Wrońskiego dąży więc do zharmonizowania świata w oparciu o wiedzę najwyższą, a jej częściami składowymi są teoria (poznawanie rzeczywistości) i technia (generowanie rzeczywistości).

III. Architektonika matematyki

[6] J. M. Hoene-Wroński, *Wstęp do filozofii matematyki oraz technii algorytmii.* Tł. P. Chomicz. Warszawa 1937, *Od tłumacza*, s. 3-4.

Wroński wyróżnia dwa obszary badań świata fizycznego i związane z nimi dwie nauki: forma świata, określająca jego sposoby bytowania (jest to przedmiot ogólny matematyki) oraz treść jako istota działania fizycznego (przedmiot ogólny fizyki). Analizując formę świata dostrzega, podobnie jak Kant, że składa się ona z czasu i przestrzeni. Definiuje tym samym matematykę jako naukę o prawach czasu i przestrzeni, jednak, inaczej niż Kant, traktuje je jako dane w doświadczeniu elementy świata zewnętrznego. Dla Kanta bowiem czas i przestrzeń są jedynie podmiotowymi formami zmysłowości. Transcendentalna analiza świata prowadzi więc, według Wrońskiego, do poznania praw tego świata, a nie tylko form i kategorii podmiotowych. Tym samym kantowska metoda transcendentalna staje się w rękach Wrońskiego narzędziem poznawania rzeczywistości jako jedni, której zasadniczym elementem jest matematyka. Zresztą to matematyka pozwala poznawać i generować rzeczywistość. W tym zawiera się anty-kantowski i pitagorejski rys filozofii Wrońskiego.

Matematyka jako nauka o prawach form świata fizycznego, a dokładniej o prawach czasu i przestrzeni dzieli się, według Wrońskiego, na filozofię matematyki oraz matematykę właściwą. Filozofia matematyki ma za zadanie wyprowadzić na drodze subiektywnej zasady filozoficzne matematyki (czyli jej pierwsze i podstawowe prawa) w oparciu o ogólne prawa wiedzy – są to prawa logiczne i transcendentalne, opisujące umysł ludzki i jego działanie. Dopiero z tak otrzymanych zasad matematyki, matematyka właściwa wyprowadza w sposób obiektywny swoje twierdzenia. Filozofia matematyki odkrywa z jednej strony prawa wiedzy człowieka w odniesieniu do przedmiotu matematyki (mamy tu architektonikę matematyki, badającą treść wiedzy matematycznej oraz metodologię matematyki, która bada formę wiedzy, czyli różne sposoby badań), a z drugiej prawa samej matematyki – jest to metafizyka matematyki. Dlatego w tym znaczeniu filozofia matematyki jest niezbędnym wstępem do badań matematycznych.

W swoim *Wstępie do filozofii matematyki* wyprowadza i analizuje Wroński architektonikę matematyki, która nie ma być opisem istniejącego za życia Wrońskiego podziału matematyki na poszczególne działy, lecz jej ogólną i uniwersalną charakterystyką, obejmującą jej aktualny stan i cały przyszły rozwój.

Spójrzmy teraz jak wygląda podział matematyki właściwej, zgodnie z koncepcją Wrońskiego. Należy podkreślić, że nie jest on opracowany w oparciu o aprioryczne kategorie podmiotowe (jak u Kanta), lecz na podstawie prawa tworzenia, czyli *a posteriori*, poprzez doświadczenie czystej rzeczywistości. Najpierw, w zależności od tego jak rozpatrujemy przedmiot matematyki (*in abstracto* czy *in concreto*), otrzymujemy matematykę czystą i stosowaną.

Matematyka czysta dzieli się znów na algorytmię (bada następstwo chwil czasowych oraz schemat liczby) i geometrię (bada połączenie punktów w całość oraz schemat rozciągłości). Algorytmia wywodzi się przy tym z obiektywnych rozważań czasu, natomiast geometria opiera się na intuicji przestrzeni – tak czas jak i przestrzeń przynależą do zjawisk fizycznych i dane są *a posteriori* (jest to inaczej niż u Kanta, gdzie czas i przestrzeń są dane *a priori* jako podmiotowe formy zmysłowości)[7].

Ten podział dokonany jest przez Wrońskiego w odniesieniu do kantowskiej kategorii ilości oraz stosunku (w tym kategorii przyczynowości i substancji). Wśród kategorii intelektu istnieją jeszcze kategorie jakości oraz modalności (według Kanta). W swoim *Wstępie do filozofii matematyki* Wroński nie analizuje matematyki z punktu widzenia tych kategorii, co wydawałoby się naturalne, jeśli patrzymy na miejsce jakie zajmuje matematyka w jego prawie tworzenia i architektonice wiedzy.

We *Wstępie do wykładu matematyk*[8]*i* podaje Wroński wprawdzie jeszcze trzeci dział matematyki – teorię ruchu, która zajmuje się własnościami ciał, leżącymi u podstaw możliwości ruchu. Nie jest to jednak pełna klasyfikacja i brak jest wyraźnego wskazania o jakie kategorie chodzi. W dalszym rozwoju matematyka odniosła się również do kategorii jakości jak i modalności (poprzez powstanie topologii, teorii mnogości i logiki matematycznej).

W ramach każdego ze wskazanych powyżej działów matematyki możemy wyróżnić prawa i fakty. I tak algebra zajmuje się prawami liczb, a arytmetyka, jako szczegółowa dziedzina algorytmii, faktami liczb. Natomiast w ramach geometrii prawami rozciągłości zajmuje się geometria ogólna, a faktami rozciągłości geometria szczegółowa.

Dalszy istotny podział matematyki dokonuje się w ramach algebry i geometrii ogólnej. Jest to najważniejszy element koncepcji Wrońskiego, przedstawiającej architektonikę matematyki. Tu właśnie pojawia się podział na teorię i technię: odpowiednio algebry i geometrii. Przy czym teoria związana jest z odkrywaniem natury matematyki (a dokładniej kategorii ilości matematycznej), a technia bada miarę tzn. co należy uczynić, aby dane wielkości (ilości) obliczyć. O ile teoria jest rodzajem spekulacji, to technia polega na działaniu. W ramach teorii odkrywamy twierdzenia, natomiast to, co odkrywamy w ramach technii, nazywa Wroński metodami.

Spójrzmy teraz w jaki sposób rozwija Wroński teorię algorytmii. Dzieli się ona na teorię generacji algorytmicznej oraz teorię porównania algorytmicznego.

W ramach generacji algorytmicznej wyróżniona jest część elementarna i systematyczna. Poprzez odkrycie algorytmów pierwotnych (sumowania, stopniowania oraz reprodukcji) ma miejsce tworzenie kolejnych algorytmów i innych bytów matematycznych. I tak w części elementarnej otrzymujemy przede wszystkim numeracje, fakultety oraz logarytmy i sinusy, natomiast w części systematycznej (ukazującej połączenie algorytmów sumowania i stopniowania)

[7] Ibidem, s.1-3.

[8] J. Hoene-Wroński, *A Course of Mathematics.* Wyd. Samuel Bagster. Londyn 1821; tł. L. Niedźwiecki, Paryż 1880, s. 24-25.

teorię różnic (bada przyrosty skończone funkcji), różniczek (bada przyrosty nieskończenie małe), stopni oraz stopników (rozpatruje przyrosty wykładników, odpowiednio skończone i nieskończenie małe). Ten podział ma, między innymi, wyjaśnić znaną antynomię rachunku różniczkowego (tzn. teorii różniczek w rozumieniu Wrońskiego) związaną z posługiwaniem się wielkościami nieskończenie małymi[9]. W końcu ukazana jest harmonia między sumowaniem i stopniowaniem (jako elementami nieredukowalnymi do siebie) – i jest to cel generacji algorytmicznej.

Natomiast teoria porównania algorytmicznego zawiera teorię stosunków oraz równań (np. różniczkowych, kongruencyjnych). Celem tej teorii jest znów ukazanie tożsamości algorytmów numeracji i fakultetów (które jako algorytmy pierwotne całkowicie różnią się od siebie).

Technia algorytmii znów, przez podobny schemat podziału, prowadzi do teorii szeregów (nieskończonych), ułamków ciągłych (łańcuchowych), nieskończonych produktów oraz interpolacji. Istotnymi elementami tego fragmentu matematyki są nieskończone rozwinięcia funkcji m.in. funkcji logarytm, sinus, cosinus. Wroński zauważa, że dzięki nieskończonym rozwinięciom możliwe jest zdefiniowanie logarytmów zespolonych oraz innych funkcji (nazwanych funkcjami analitycznymi).

Natomiast dla realizacji części systematycznej pojawia się absolutne prawo algorytmii (tzw. prawo najwyższe) oraz problemat powszechny algorytmii.

Prawo najwyższe ma następującą postać:

$$F(x) = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + \dots,$$

przy czym *F(x)* jest daną funkcją, której rozwinięcia poszukujemy, $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots$ są funkcjami tworzącymi, natomiast $A_0, A_1, A_2, \dots$ są to współczynniki, które należy wyznaczyć[10]. Powyższy wzór jest najogólniejszym wzorem pozwalającym rozwijać dowolną funkcję w szeregi nieskończone. Funkcje Ω_i są całkowicie dowolne, a rozwinięcia potęgowe czy trygonometryczne byłyby tylko szczególnym przypadkami. Wzór ten zawiera więc w sobie wszystkie możliwe typy rozwinięć funkcji.

Natomiast prawo problematu powszechnego ukazuje powszechną i nieusuwalną różnicę (jak prawo najwyższe jedność). Jeśli chcemy określić naturę danej funkcji F przy pomocy funkcji innego rodzaju, to musimy znaleźć ciąg przybliżeń $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ taki, że różnica $F - F_n \to 0$, jeśli $n \to \infty$. Funkcje tworzące Ω_i otrzymują w tym przypadku konkretną postać, co wiąże się z

[9] Antynomia ta polegała na tym, że w pewnych sytuacjach różniczka traktowana była jak liczba dodatnia, a w innych jak zero.

[10] Por. J.M. Hoene-Wroński, *Wstęp do filozofii matematyki,* s. 243-254

ustaleniem ich formy i zapisu np. $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_k$. Tym samym $F(x) = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + \ldots + A_k\Omega_k + r(x)$. Celem badań jest teraz znalezienie reszty $r(x)$, czyli odpowiedniej różnicy lub różniczki w zależności od tego czy suma $A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + \ldots + A_k\Omega_k$ jest skończona, czy nie.

Ponieważ prawo najwyższe odnosi się do generacji algorytmicznej, a problemat powszechny do porównania algorytmicznego, więc potrzebne jest trzecie prawo łączące te dwa poprzednie – jest to prawo teleologiczne.

W ten sam sposób dzielona jest geometria. I tak w części ustanowienia geometrycznego mamy część elementarną (w której pojawia się teoria prostych, kątów i krzywych) oraz część systematyczną jako teorię brył. Natomiast w części dotyczącej porównania geometrycznego wyróżnia Wroński jedynie teorię podobieństwa.

Technia geometrii, a więc nauka ukazująca metody mierzenia (tego, co odkrywa teoria), zawiera teorię przekrojów, zastosowań algorytmii do geometrii (w części elementarnej) oraz geometrię rzutową oraz algorytmiczną, w tym analityczną (w części systematycznej).

W celu wyjaśnienia w jaki sposób, zgodnie z przedstawioną architektoniką matematyki, są tworzone kolejne matematyczne byty zajmiemy się teorią algorytmiczną elementarną. Podstawą tej części matematyki (jest ona zarazem podstawowa dla całej architektoniki) są dwa przeciwstawne algorytmy: sumowania i stopniowania, posiadające dwa bieguny – progresywny i regresywny (odpowiednio: dodawanie i odejmowanie oraz potęgowanie i pierwiastkowanie).

„Dwa te algorytmy pierwotne są, by tak rzec, dwoma biegunami umysłowymi wiedzy ludzkiej w jej zastosowaniu do ilości algorytmicznych. W sumowaniu części ilości są nieciągłe i ekstensywne; mają one właściwie charakter skupienia. W stopniowaniu części ilości, przeciwnie, są ciągłe lub przynajmniej są uważane za takie i są niejako intensywne; przybierają one tym samym charakter narastania”[11].

Powyższe algorytmy (nazywa je Wroński algorytmami elementarnymi) są całkowicie heterogeniczne – nie można ich wzajemnie do siebie zredukować, ani wyprowadzić ich z siebie nawzajem. Nie można ich też zredukować do znanych funkcji arytmetycznych, mają bowiem maksymalną ogólna postać, wynikającą z filozofii absolutnej i prawa tworzenia. Te dwa algorytmy są oparte o dwie niezależne od siebie funkcje umysłu – sumowanie opiera się na prawach intelektu a potęgowanie na prawach rozumu. Algorytm sumowania wyraża się prostym schematem $A + B = C$, które stanowi zarazem podstawowe prawo sumowania, natomiast algorytm stopniowania oparty jest o schemat $A^B = C$, a

[11] Ibidem, s. 7.

podstawowe prawo stopniowania (jego szczególnym przypadkiem jest dwumian Newtona) wygląda następująco[12]:

$$(A+B)^C = A^C + \frac{C}{1}A^{C-1}B^1 + \frac{C(C-1)}{2}A^{C-2}B^2 + \frac{C(C-1)(C-2)}{3!}A^{C-3}B^3 + ...$$

Zasada tożsamości domaga się jednak neutralizacji różnorodności algorytmów elementarnych – i tak powstaje algorytm reprodukcji (algorytm pierwotny), oparty o trzecią władzę umysłu – władzę sądzenia (jego schematem i podstawowym prawem reprodukcji jest $A \times B = C$).

Mimo, iż te trzy algorytmy są całkowicie różne[13], to wchodzą między sobą w odpowiednie relacje, wynikające z prawa tworzenia. W ten sposób powstają algorytmy pochodne. Wroński sądzi, że „nie istnieją i nie mogą istnieć dla człowieka inne funkcje algorytmiczne jak te, które albo bezpośrednio opierają się na trzech tych algorytmach, albo pochodzą od tych algorytmów"[14].

Tak mocne stwierdzenie ma swoje uzasadnienie w przyjętej wcześniej filozofii absolutnej. W kolejnych krokach Wroński pokazuje jak w oparciu o zasady i relacje prawa tworzenia otrzymujemy kolejne algorytmy i dziedziny matematyki. Oczywiście matematyka jest najbardziej podstawowym i najłatwiej generowanym elementem struktury wiedzy. Pozostałe elementy wiedzy również wynikają z pierwotnych algorytmów i to również stara się Wroński wykonać w kolejnych etapach swojej pracy naukowej.

Ponieważ reprodukcja jest już ze swojej istoty połączeniem algorytmu sumowania i stopniowania, więc połączeniami dającymi istotnie nowe algorytmy jest połączenie algorytmów reprodukcji i sumowania oraz reprodukcji i stopniowania. Pierwszy z tych nowych algorytmów nazywa Wroński numeracją, a drugi fakultetami i podaje ich następujące schematy:

1. $A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + ...$

2. $\varphi_0(x)\cdot\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\cdot ...$

przy czym φ_i oznaczają dowolne funkcje zależne od x, a A_i dowolne wielkości od x niezależne. Zauważmy, że „łącząc" przykładowo mnożenie pewnej liczby A z dodawaniem liczb B i C otrzymujemy $A(B+C) = AB + AC$; ten proces możemy kontynuować. Podobnie jest w przypadku fakultetów.

Jako pierwsze „dziecko" algorytmu numeracji pojawiają się fakty liczb, czyli liczby naturalne, natomiast w przypadku fakultetów prawa liczb, czyli „określenie wszystkich wyrażeń algebraicznych, należących do teorii

[12] Jest to postać dwumianu Newtona uogólnionego na dowolne wykładniki C.

[13] „Klasyczne" wyprowadzanie na przykład mnożenia czy potęgowania z dodawania nie może w przypadku koncepcji Wrońskiego mieć miejsca.

[14] Ibidem, s. 7.

algorytmicznej (sinusy, logarytmy, pierwiastki równań immanentnych, całki itd.)".

Stosując konsekwentnie relacje wynikające z prawa tworzenia generujemy kolejne algorytmy. Jeśli będziemy chcieli określić przy pomocy fakultetów numerację, to będziemy musieli znaleźć pewną funkcję φ spełniającą warunek:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \ldots = \varphi(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots).$$

Można łatwo zauważyć, że warunek ten zachodzi, gdy funkcja φ spełnia następującą zależność wykładniczą:

$$a^{\varphi(x)} = x,$$

przy czym a jest dowolną stałą liczbą[15].

W celu znalezienia postaci (natury) funkcji φ Wroński wykonuje następujące obliczenia, korzystając z podstawowego prawa stopniowania:

$$(\sqrt[m]{a})^{\varphi(x)} = [1 + (\sqrt[m]{a} - 1)]^{\varphi(x)} = 1 + \varphi(x)(\sqrt[m]{a} - 1) + \varphi(x)\frac{\varphi(x) - 1}{2}(\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \ldots$$

A ponieważ $(\sqrt[m]{a})^{\varphi(x)} = x^{\frac{1}{m}}$, więc

$$x^{\frac{1}{m}} - 1 = \varphi(x)(\sqrt[m]{a} - 1) + \varphi(x)\frac{\varphi(x) - 1}{2}(\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \ldots,$$

A stąd

$$\frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{\sqrt[m]{a} - 1} = \varphi(x) + \varphi(x)\frac{\varphi(x) - 1}{2}(\sqrt[m]{a} - 1) + \varphi(x)\frac{\varphi(x) - 1}{2}\frac{\varphi(x) - 2}{3}(\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \ldots$$

Jeśli m dąży do nieskończoności, to wówczas wyrażenie po prawej stronie powyższej równości wynosi $\varphi(x)$, natomiast lewa strona jest wyrażeniem

[15] Wroński nie zakłada jaki to rodzaj liczby. Może to być liczba rzeczywista, urojona, nieskończenie mała czy duża lub jeszcze jakaś inna. Wroński zakłada (na podstawie swojej filozofii absolutnej), że szczególną rangę mają liczby urojone i nieskończone, ponieważ „wynoszą" matematykę poza wewnętrzne konstrukcje umysłu w świat poza-umysłowy. Zauważmy ponadto, że na początku XIX wieku, gdy Wroński pisze swoje prace matematyczne, nie ma jeszcze ustalonej definicji liczby (ani rzeczywistej, ani zespolonej). Jak wiadomo ścisła definicja liczby rzeczywistej została sformułowana dopiero po śmierci Wrońskiego w latach 70-tych XIX wieku, natomiast logiczna możliwość używania liczb nieskończonych pokazał A. Robinson w swojej analizie niestandardowej.

nieoznaczonym $\left(\frac{0}{0}\right)$, które może przyjmować wartości skończone rzeczywiste dla pewnych liczb a. Wroński nie stosuje jednak procedury granicznej, lecz podstawia za m liczbę nieskończenie dużą $\infty\cdot$ To użycie liczby nieskończonej jest dla Wrońskiego „operacją transcendentalną" dokonywaną przez rozum i wyprowadzającą poza granice intelektu – prowadzi więc do nowych bytów matematycznych.

Wyrażenie po prawej stronie powyższej równości staje się ilorazem dwóch wielkości (liczb) nieskończenie małych, co ma dla Wrońskiego (podobnie jak dla Leibniza) „normalny" liczbowy sens. Na wielkościach nieskończenie małych (jak i nieskończenie dużych) możemy wykonywać wszystkie operacje arytmetyczne). Otrzymuje więc następujące wyrażenie określające funkcje φ [16]:

$$\varphi(x) = \frac{x^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{a} - 1}.$$

Tę postać funkcji φ nazywa podstawowym prawem teorii logarytmów i uważa, że można z niej wyprowadzić całą teorię logarytmów. Przykładowo, mnożąc licznik i mianownik powyższego wyrażenia przez liczbę nieskończoną ∞ otrzymujemy:

$$\varphi(x) = \frac{\infty\,(x^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\infty\,(\sqrt[m]{a} - 1)}.$$

Funkcja φ przyjmuje „najprostszą" postać, gdy mianownik jest równy 1. Ma to miejsce, jeśli a jest liczbą Eulera e, bowiem, jeśli $\infty\,(\sqrt[m]{a} - 1) = 1,$ to

$$e = a = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = 1 + \infty\,\frac{1}{\infty} + \frac{\infty\,(\infty - 1)}{2!}\left(\frac{1}{\infty}\right)^2 + \frac{\infty\,(\infty - 1)(\infty - 2)}{3!}\left(\frac{1}{\infty}\right)^3 + \ldots$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{\infty}{\infty}\frac{\infty - 1}{\infty} + \frac{1}{3!}\frac{\infty}{\infty}\frac{\infty - 1}{\infty}\frac{\infty - 2}{\infty} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots,$$

[16] Zauważmy, że wyrażenie $\sqrt[\infty]{a} - 1$ jest wielkością nieskończenie małą i dlatego wszystkie składniki po lewej stronie równości $x^{\frac{1}{m}} - 1 = \varphi(x)(\sqrt[m]{a} - 1) + \varphi(x)\frac{\varphi(x) - 1}{2}(\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \ldots$, poza pierwszym, zerują się. Jest to jednak prawdziwe przy założeniu, że mamy tylko jedną liczbę nieskończenie dużą i automatycznie tylko jedną nieskończenie małą. Załóżmy bowiem, że d jest wielkością nieskończenie małą (dodatnią). Oznacza to, że d jest liczba mniejszą od każdej innej liczby dodatniej, lecz większą od zera). Zatem $d^2 < d$. Gdyby bowiem $d^2 \geq d$, to $d \geq 1$, co jest niemożliwe. Stąd wynika, że $d^2 = 0$, ponieważ istnieje tylko jedna liczba nieskończenie mała. Zauważmy przy okazji, że nie istnieje liczba ∞^2, gdyż musiałaby być ona odwrotnością zera.

gdyż $\frac{\infty - n}{\infty} = 1$, dla każdej liczby skończonej n. W tym przypadku funkcja $\varphi(x)$ staje się logarytmem naturalnym $\ln x$ tzn. $\ln x = \varphi(x) = \infty(x^{\frac{1}{\infty}} - 1)$, a w przypadku dowolnego a mamy oczywiście $\varphi(x) = \frac{\infty(x^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\ln a} = \log_a x$. Wracając do wcześniejszej postaci funkcji φ, dla $a = e$, mamy $\ln x = \frac{x^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{e} - 1}$.

W podobny sposób rozumuje Wroński, kiedy pokazuje jak przy pomocy numeracji otrzymać fakultety, co sprowadza się do znalezienia funkcji ψ spełniającej własność:

$$\psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \cdot \psi(x_3) \cdot \ldots = \psi(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots).$$

I znów funkcja wykładnicza, tym razem postaci $\psi() = a^{mx}$, spełnia powyższy warunek i daje możliwość znalezienia natury funkcji ψ. Okazuje się, że aby otrzymać nowy rodzaj funkcji trzeba wyjść poza potęgi rzeczywiste m. „Lecz, gdy wykładnik m zawiera nieskończoność albo jest urojony, funkcja ta wychodzi poza klasę zwykłego algorytmu stopniowania, ponieważ jest ona możliwą tylko przez wpływ kierowniczy rozumu, który czyni ją wtedy funkcją transcendentną. Otóż, wypadkiem, kiedy wykładnik m zawiera nieskończoność, jest wypadek logarytmów czyli funkcji, które tylko co rozpatrzyliśmy; pozostają tedy w niniejszym zagadnieniu funkcje rzeczywiste nowe tylko w wypadku, kiedy wykładnik m jest urojony”[17].

Te słowa Wrońskiego ukazują jego sposób rozumowania i jak łączy nierozdzielnie z rozumowaniem *stricte* matematycznym argumenty filozoficzne. Szczególnie, kiedy chcemy otrzymać nowy rodzaj bytów matematycznych, potrzebne jest użycie „funkcji transcendentnych” lub „transcendentalnych” (jak nazywa je Wroński), pozwalające wyjść poza wewnętrzne struktury umysłu. Kolejnym filozoficznym argumentem Wrońskiego jest „argument z prostoty” badanej struktury. Tak było poprzednio, gdy pojawiła się liczba Eulera e oraz logarytm naturalny jako najprostsza liczba i funkcja (odpowiednio) w rozpatrywanej sytuacji, Z tego też powodu liczbę e nazywa Wroński „liczbą filozoficzną”, a wyrażenie $x = (1 + \frac{1}{\infty}\ln x)^{\infty}$ (otrzymane ze wzoru na funkcję logarytm $\ln x = \infty(x^{\frac{1}{\infty}} - 1)$ przy pomocy prostych przekształceń arytmetycznych na liczbie nieskończenie dużej ∞) **„schematem filozoficznym” stopniowania** (mają one znaczenie również poza-matematyczne).

[17] Ibidem, s. 14-15.

Podobnie w aktualnie rozpatrywanym przypadku „najprostsza" sytuacja ma miejsce, gdy $m = \sqrt{\pm 1}$. W takiej sytuacji (biorąc tylko $+i$ jako jedną z czterech możliwych wartości *m*) mamy $\psi(x) = a^{ix}$.
Po zastosowaniu schematu filozoficznego stopniowania i podstawowego prawa stopniowania do liczby $y = \psi(x) = a^{ix} = (1 + \frac{1}{\infty}\ln y)^{\infty}$ Wroński otrzymuje:

$$a^{ix} = 1 + \ln y + \frac{1}{2!}(\ln y)^2 + \frac{1}{3!}(\ln y)^3 + \ldots = 1 + \frac{\ln a}{1}xi - \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 - \frac{\ln^3 a}{3!}x^3 i + \ldots,$$

ponieważ $\ln y = \ln a^{ix} = ix \ln a$.

W powyższej sumie można wydzielić składniki rzeczywiste oraz zawierające liczbę urojoną $\sqrt{-1} = i$ – są to funkcje oznaczone odpowiednio $F(x)$ oraz $f(x)$. Stąd $\psi(x) = F(x) + if(x)$ lub ogólniej $\psi(x) = F(x) + \sqrt{\pm 1} f(x)$. Otrzymany wzór nazywa Wroński podstawowym prawem teorii sinusów. Wrońskiemu zależy na maksymalnej ogólności tego prawa, gdyż zbyt szybkie przejście do przypadku szczególnego (np., gdy $a = e$).
W prosty sposób z tego prawa otrzymujemy ogólne wzory na $F(x)$ oraz $f(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(a^{x\sqrt{\pm 1}} + a^{-x\sqrt{\pm 1}}\right) \text{ oraz}$$
$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pm 1}}\left(a^{x\sqrt{\pm 1}} - a^{-x\sqrt{\pm 1}}\right).$$

Zauważmy, że, gdy $a = e$ mamy $F(x) = \cos x$ oraz $f(x) = \sin x$ (jeśli w powyższych wzorach bierzemy $\sqrt{-1}$) lub $F(x) = \cosh x$ oraz $f(x) = \sinh x$ (jeśli bierzemy $\sqrt{+1}$).

Powyżej otrzymane funkcje (tzn. logarytmy, sinusy i cosinusy) uznaje Wroński za elementarne funkcje algorytmiczne[18]. Tym samym wyłącza trygonometrię z dziedziny geometrii. Trygonometria staje się więc w architektonice Wrońskiego częścią teorii logarytmów „Przede wszystkim trzeba zauważyć, że rozważane funkcje są w istocie algorytmiczne, nie zaś geometryczne, jak mniemano, zdaje się, dotychczas: mają one i koniecznie winny mieć swój początek w algorytmii, której stanowią, jak i potęgi, logarytmy itd., część elementarną i istotną; tylko przez zastosowanie algorytmii do geometrii można je odnaleźć w tej ostatniej, i jest ta okoliczność całkiem przygodna"[19].

Łatwo zauważyć, że funkcje $F(x)$ oraz $f(x)$ spełniają warunki:

---

[18] Przez elementarną funkcję algorytmiczną rozumie Wroński funkcje, której postać (algorytmiczną) można otrzymać wprost z algorytmów pierwotnych.
[19] Ibidem, s. 17.

1. $(F(x))^2 + (f(x))^2 = 1$, gdy w definicji funkcji $F(x)$ i $f(x)$ mamy $\sqrt{-1}$ oraz
2. $(F(x))^2 - (f(x))^2 = 1$, gdy w tych definicjach mamy $\sqrt{+1}$.

Pierwsza z tych własności jest szczególnie interesująca, gdyż jest ona cechą charakterystyczna pierwiastków zespolonych z jedynki (jeśli $a+bi$ jest pierwiastkiem z jedności, to $a^2+b^2=1$). A ponieważ funkcja $\psi(x) = a^{ix} = F(x) + if(x)$ istnieje taka możliwość, że pewne jej wartości są pierwiastkami z jedynki. Wśród pierwiastków z jedynki jest jeden szczególny – jest to też jedynka (jest to „najprostsza" z możliwych sytuacji i „najprostszy" pierwiastek). Czy istnieje wobec tego takie *x*, że $\psi(x) = a^{ix} = 1$?

W celu znalezienia tej liczby *x* załóżmy, że dla pewnego *x* liczba a^{ix} jest pierwiastkiem czwartego stopnia z jedynki tzn. $a^{ix} = 1$. Istnieją cztery pierwiastki, w tym dwa zespolone postaci: $a^{\frac{1}{4}xi} = i$ oraz $a^{-\frac{1}{4}xi} = -i$ (oczywiście $\left(a^{\pm\frac{1}{4}xi}\right)^4 = a^{xi} = 1$). Ponieważ $i = \frac{1+i}{1-i}$, więc $\ln a^{\frac{1}{4}xi} = \ln i = \ln\frac{1+i}{1-i}$. Stąd otrzymujemy $\frac{1}{4}xi\ln a = \ln\frac{1+i}{1-i}$ i w końcu

$$x = \frac{4\ln i}{i\ln a} = \frac{4}{i\ln a}(\ln(1+i) - \ln(1-i)).$$

Korzystając ze wzoru na logarytm $\ln y = \infty(y^{\frac{1}{\infty}} - 1)$ możemy znaleźć rozwinięcie funkcji $\ln(1+i) - \ln(1-i)$, mianowicie

$$\ln(1+i) - \ln(1-i) = \infty(1+i)^{\frac{1}{\infty}} - 1) - \infty(1-i)^{\frac{1}{\infty}} - 1) = \infty((1+i)^{\frac{1}{\infty}} - (1-i)^{\frac{1}{\infty}})\cdot$$

Korzystając z podstawowego prawa stopniowania i pamiętając, że $d = \frac{1}{\infty}$ jest liczbą nieskończenie małą (co oznacza, że $d^n = 0$, dla $n > 1$) mamy:

$$(1+i)^d = 1 + di + \frac{d(d-1)}{2!}i^2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{3!}i^3 + \ldots = 1 + di + \frac{d^2-d}{2}i^2 + \frac{d^3-3d^2+2d}{3!}i^3 + \ldots$$
$$= 1 + di - \frac{d}{2}i^2 + \frac{d}{3}i^3 - \ldots = 1 + di + \frac{d}{2} - \frac{d}{3}i + \frac{d}{4} - \ldots$$

Podobnie

$$(1-i)^d = 1 - di + \frac{d}{2} - \frac{d}{3}i + \frac{d}{4} - \ldots.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia do poprzedniego wzoru otrzymujemy:

$$\ln(1+i) - \ln(1-i) = \infty\,(1 + di + \frac{d}{2} - \frac{d}{3}i + \frac{d}{4} - \ldots - (1 - di + \frac{d}{2} - \frac{d}{3}i + \frac{d}{4} - \ldots)) =$$
$$2i\infty\, d(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots) = 2i(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots).$$

Podstawiając otrzymaną różnicę logarytmów do wcześniej wyprowadzonego wzoru na x mamy:

$$x(a) = \frac{4}{i\ln a} 2i(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots) = \frac{8}{\ln a}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots).$$

Otrzymana liczba jest szukaną liczbą spełniającą warunek $a^{ix} = 1$. W przypadku, gdy a jest liczbą Eulera e otrzymujemy liczbę 2π tzn.

$$x(e) = 2\pi = 8(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots).$$

W ten sposób przy pomocy pierwotnych funkcji algorytmicznych została wygenerowana liczba π (podobnie jak liczba Eulera e). „Tu znajduje się ostatni cel rozumu; jest to cel, przynajmniej utajony, który prawodawca ten naszej wiedzy postawił wszystkim tym, którzy do dziś zajmowali się w geometrii poszukiwaniem chimerycznym skonstruowania za pomocą linii stosunku obwodu do promienia koła”[20].

Przeprowadzone obliczenia ukazują ponadto piękny związek między odkrytą jeszcze w starożytności przez Archimedesa liczbą π, a liczbą Eulera e oraz liczbą urojoną i, a mianowicie:

$$e^{2\pi i} = 1 \text{ oraz } \pi = \frac{2\ln i}{i}.$$

Co więcej obie liczby zostały otrzymane jako „najprostsze” w rozpatrywanych sytuacjach.

W ramach teorii algorytmii przedstawiona powyżej konstrukcja, prowadząca do wygenerowaniu funkcji elementarnych przy pomocy algorytmów pierwotnych, stanowi dopiero pierwszą część architektoniki matematyki (nie licząc filozofii matematyki), zwaną częścią elementarną. Kończy się ona ukazaniem jedności pierwotnych algorytmów poprzez wyprowadzenie wzoru łączącego funkcję sinus oraz logarytm.

IV. Zgodność koncepcji Wrońskiego z przyszłym rozwojem matematyki

[20] Ibidem, s. 23.

Fundamentalny dla koncepcji Wrońskiego podział na teorię i technię odnosi się nie tylko do architektoniki matematyki, lecz również do jej dziejów.

Podzielił dzieje matematyki na pięć okresów, przy czym pierwsze trzy związane były z teorią (były więc poznawaniem natury matematyki), a dwa ostatnie, po dotarciu w ramach teorii do zasad pierwotnych, są rozwijaniem technii matematyki – rozpoczyna się wówczas generowanie rzeczywistości. Ten kluczowy moment w dziejach zaczął się od powstania rachunku różniczkowego. Pojawiły się cztery potężne środki: rozwijanie funkcji w szereg Taylora, funkcje tworzące Laplace'a, ułamki ciągłe Eulera, funkcje analityczne Lagrange'a. Miało miejsce wówczas uniwersalne użycie szeregów nieskończonych.

Jednak celem całych dziejów matematyki jest osiągnięcie absolutnej jedności (a w końcu osiągnięcie jedności całej wiedzy ludzkiej). Wszystkie prawa matematyki będą wynikały wtedy z jednej uniwersalnej zasady najwyższej traktowanej jako prawda absolutna. Będą obejmowały wszystkie działy matematyki, a prawa uniwersalne jej poszczególnych dziedzin będą jej szczególnym przypadkami. Jak wiemy Wroński odkrył i sformułował prawo najwyższe algorytmii; analogiczne prawo powinno zostać odkryte dla geometrii, po uprzednim odkryciu praw uniwersalnych dla poszczególnych dziedzin geometrii. W końcu dziejów matematyki nastąpić ma odkrycie prawa, z którego, w oparciu o pierwotne algorytmy, cała matematyka byłaby generowana. Unifikacja dotyczy nie tylko matematyki (ona jest pierwsza), lecz całej wiedzy ludzkiej. Kres ludzkości zostanie osiągnięty, gdy taka najwyższa uniwersalna zasada, generująca cała wiedzę, zostanie odsłonięta.

Na początku jednak występuje Wroński z propozycją reformy algorytmii matematyki. Nastąpiło to w 1810 roku w memoriale, który przedstawił Wydziałowi Nauk Fizycznych i Matematycznych Instytutu Francuskiego. Memoriał ten zatytułowany *Pierwsza zasada metod analitycznych* formułował absolutne prawo algorytmiczne (prawo najwyższe). Sprawozdawcami przedstawionego memoriału byli Lacroix oraz Lagrange, którzy uchylili się od jego jednoznacznej oceny wskazując na zbyt daleko idącą ogólność tez oraz podkreślając, że wzór podany przez Wrońskiego pozwala otrzymać wszystkie znane wzory na rozwinięcie funkcji. Tę ocenę Wroński uznał za niedokładną oraz nierzetelną i w końcu wszedł w konflikt z matematykami francuskimi. Jego propozycja nie znalazła więc większego uznania. Głównym dziełem podejmującym zagadnienie reformy matematyki jest analizowany wcześniej *Wstęp do filozofii matematyki i technii algorytmii* wydany w drugiej połowie 1810 roku. Na początku 1812 roku wychodzi praca *Ogólne rozwiązania równań wszystkich stopni*[21]. W pracy tej swoją metodę rozwiązywania równań wyprowadzał z tzw. problematu powszechnego matematyki – te rozważania zostały rozwinięte w pracy *Reforma absolutna, a przeto finalna wiedzy ludzkiej*

[21] J. Hoene-Wroński, *Résolution générale des équation de tous les dégrès, Paryż 1812.*

wydanej 30 lat później[22]. Również w pracy *Wstęp do wykładu matematyki*[23], który Wroński pisze i wydaje w Anglii, podejmuje zagadnienie reformy matematyki, ukazując jej rolę w dziejach.. Uzasadnia w niej, że wszystkie nauki zawdzięczają swój rozwój matematyce i, że są od niej zależne. Tam właśnie dzieli całe dzieje matematyki na pięć okresów.

Chciałbym teraz przedstawić jak wizja Wrońskiego, odpowiada rzeczywistemu, przyszłemu rozwojowi matematyki. Zauważmy, że w okresie opracowywania architektoniki matematyki, i krótko potem, powstało wiele nowych działów matematyki, o których Wroński nic nie wspomina. Przede wszystkim są to: geometrie nieeuklidesowe, teoria Galois, prowadząca do teorii grup i algebry abstrakcyjnej, teoria liczb i funkcji rzeczywistych, teoria mnogości, logika matematyczna. Przyjrzyjmy się stanowi matematyki sto lat później, aby przekonać się czy nowe teorie matematyczne nie mieszczą się w koncepcji Wrońskiego.

Zygmunt Janiszewski, przedstawiając stan matematyki na początku XX wieku, wyróżnia kilka centralnych teorii, wokół których grupują się pozostałe. Po stronie algorytmii (trzymając się nazewnictwa Wrońskiego) umieszcza około 40 różnych teorii, z których najważniejsze to: teoria liczb, algebra, teoria funkcji rzeczywistych oraz analitycznych, teoria szeregów nieskończonych i teoria równań różniczkowych. Natomiast po stronie geometrii znajduje się ponad 20 teorii (m.in. topologia, geometrie nieeuklidesowe, trygonometria, teoria stożkowych i powierzchni drugiego stopnia, teoria krzywych i powierzchni algebraicznych), w tym cztery (geometria syntetyczna, analityczna, elementarna i różniczkowa) odgrywają rolę centralną. Jedność całej matematyki zapewnia bogaty system relacji i powiązań pomiędzy poszczególnymi teoriami oraz nowe teorie badające podstawy matematyki, z których najważniejsze to teoria grup i teoria mnogości.

Trudno bezpośrednio porównywać architektonikę Wrońskiego z podziałem matematyki dokonanym przez Janiszewskiego, ponieważ oparte są one o inne zasady: Janiszewski podaje jedynie przybliżony układ teorii matematycznych w swoich czasach nie pretendując do ogarnięcia całości ciągle rozwijającej się matematyki, co czyni Wroński. Ponadto, według Janiszewskiego, algebra i geometria nie różnią się przedmiotem badań (przypomnijmy, że dla Wrońskiego przedmiotem badań algorytmii, w tym algebry jest następstwo chwil czasowych oraz schemat liczby, a geometrii połączenie punktów w całość oraz schemat rozciągłości), a jedynie sposobem ujęcia. „Bardziej jednak zasadniczym podziałem matematyki wydaje nam się podział na matematykę utworów ciągłych i nieciągłych. Do ostatniej zaliczamy

[22] J. Hoene-Wroński, *Réforme absolute du savoir humain*, t. I-III, Paryż 1847.
[23] J. Hoene-Wroński, *A Course of Mathematics.* Wyd. Samuel Bagster. Londyn 1821; tł. L. Niedźwiecki, Paryż 1880.

teorię liczb i teorię grup nieciągłych wraz z algebrą. Do pierwszej – resztę analizy (analizę w znaczeniu ciaśniejszym) i prawie całą geometrię"[24].

Są to więc całkiem inne podziały, a ponadto Janiszewski nie dostrzega w matematyce niczego, co odpowiadałoby technii Wrońskiego. Myślę, że w koncepcji Wrońskiego mieści się teoria mnogości i topologia (jako część geometrii, badające na poziomie maksymalnie ogólnym sposoby „łączenia w całość" oraz schemat rozciągłości) oraz pozostałe teorie matematyczne z czasów Janiszewskiego.

W pierwszym momencie teoria grup wydaje się nie pasować do schematu Wrońskiego. Rozpatruje ona bowiem całkiem abstrakcyjne działanie, spełniające narzucone warunki. A dla Wrońskiego algorytmy pierwotne oparte są o trzy heterogeniczne względem siebie działania (dodawania, potęgowania i mnożenia) i łączenie ich w jedno na poziomie czysto formalnym wydaje się niedopuszczalne (dzięki tej nieusuwalnej różnicy ma miejsce generowanie innych algorytmów i praw). Pamiętając jednak, że celem ostatecznym i najwyższym jest absolutna jedność, natrafiamy, w przypadku abstrakcyjnej struktury grupy, na prawo najwyższe scalające obszary geometryczne jak i algebraiczne (chociaż niekoniecznie wszystkie, jak pewnie życzyłby sobie Wroński). Tak fundamentalne znaczenie teorii grup dostrzegło wielu matematyków m.in. F. Klein czy H. Poincare.

Na przełomie XIX i XX wieku pojawiło się wiele prób budowania jedności matematyki – myślę, że mieszczą się one w pewnym stopniu w schemacie Wrońskiego. Poszukiwanie uniwersalnego schematu matematyki w teorii mnogości, teorii grup, arytmetyce, logice matematycznej czy później w teorii kategorii i funktorów (ukazującej analogie między strukturami topologii i algebry oraz innych teorii) ma za zadanie bowiem wskazanie prawdziwej i niezmiennej jedności gwałtownie rozwijającej się matematyki – według Wrońskiego różnorodność matematycznych bytów nie może przekreślać jedności matematyki, gdyż właśnie z niej wynika.

Na koniec chciałbym przedstawić przykład rozwoju zagadnienia wielkości niewspółmiernych, który prowadzi, poprzez odkrycie liczb niewymiernych, do poznania maksymalnie ogólnej zasady pozwalającej „uzupełniać" dowolne przestrzenie o „brakujące" elementy. Ten rozwój jest zgodny z historiozofią Wrońskiego – takich przykładów można podać wiele.

Oczywiście problem wielkości niewspółmiernych mógł się pojawić dopiero wtedy, gdy rozpatrywano matematykę w sposób abstrakcyjny. Najwcześniej odkrytymi wielkościami niewspółmiernymi były: stosunek przekątnej kwadratu do jego boku (daje to liczbę $\sqrt{2}$), stosunek boku dziesięciokąta foremnego do promienia okręgu opisanego na tym dziesięciokącie (daje to „złotą liczbę" $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$) oraz stosunek długości okręgu do jego średnicy (liczba π). Ogólne spojrzenie na zagadnienie wielkości

[24] Z. Janiszewski, *Wstęp ogólny*. W: *Poradnik dla samouków*, Warszawa 1914., s. 25.

niewspółmiernych wiązało się z odkrywaniem różnych ogólnych zależności, w których te stosunki niewspółmierne występowały. Najważniejsze jednak było wykorzystanie algorytmu Euklidesa (znajdowania największego wspólnego dzielnika) do przedstawiania wielkości niewspółmiernych przy pomocy ułamków łańcuchowych nieskończonych oraz zastosowanie szeregów nieskończonych. Ułamki ciągłe oraz szeregi nieskończone stały się uniwersalnym narzędziem generowania dowolnych stosunków niewymiernych (miało to miejsce przede wszystkim w pracach Eulera).

Kolejny krokiem stała się teoria Cantora liczb rzeczywistych, pozwalająca z jednej strony skonstruować liczby rzeczywiste, w oparciu o „ciągi fundamentalne" liczb wymiernych, a ponadto dająca możliwość „uzupełniania" dowolnej przestrzeni[25]. Twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwężających w przestrzeniach metrycznych zupełnych (każde takie odwzorowanie musi mieć punkt stały) zawiera w sobie uniwersalna metodę dowodową dla wielu dziedzin matematyki.

Wydaje się, że rzeczywiście rozwój matematyki, poprzez generowanie coraz większej różnorodności pojęć i struktur, zmierza jednak do jedności i sformułowania uniwersalnych praw i formuł, jak przedstawiał to Hoene-Wroński.

[25] J. Hoene-Wroński, *Wstęp do wykładu matematyki*, Biblioteka Polska, Paryż 1880, s. 7-17.