УДК 517.938

Топологические и эргодические свойства частично гиперболических диффеоморфизмов и негиперболических ступенчатых косых произведений[1,2]

Л. Х. Диас[3], К. Гелферт[4], М. Рамс[5]

Поступило 15 марта 2017 г.

Дается обзор некоторых эргодических и топологических свойств грубо транзитивных частично гиперболических диффеоморфизмов с одномерным центральным направлением. Также рассматриваются ступенчатые косые произведения со слоем окружность, моделирующие такую динамику. Рассматриваемые примеры существенно негиперболичны и демонстрируют сосуществование эргодических мер с положительными, отрицательными и нулевыми показателями Ляпунова, а также перемежающихся подков, на которых наблюдаются различные виды гиперболического поведения. Кроме того, обсуждаются некоторые недавние результаты, касающиеся топологии пространства инвариантных мер и свойств спектра показателей Ляпунова.

DOI: 10.1134/S0371968517020066

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье [30] был поставлен следующий общий вопрос.

- *В какой мере поведение типичной динамической системы является гиперболическим?*

Там же было отмечено, что многие проблемы в теории динамических систем являются лишь переформулировками этого вопроса. Во времена зарождения теории в конце 1960-х годов Абрахам и Смейл [2] показали, что гиперболические системы не плотны в пространстве динамических систем. Другими словами, существуют открытые множества в пространстве диффеоморфизмов, состоящие из негиперболических отображений. Их результат послужил стимулом для поиска ослабленных аналогов гиперболичности и привел среди прочего к возникновению понятия неравномерной гиперболичности, предложенного Песиным [42], и понятия частичной гиперболичности [32].

[1] Статья представлена на английском языке. Оригинал будет опубликован в англоязычной версии журнала: *Díaz L.J., Gelfert K., Rams M.* Topological and ergodic aspects of partially hyperbolic diffeomorphisms and nonhyperbolic step skew products // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V. 297.

[2] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке бразильского фонда FAPERJ (в рамках программы CNE) и Национального совета по научно-техническому развитию (CNPq) Бразилии (Л.Х.Д., К.Г.), Национального научного центра Польши (проект 2014/13/B/ST1/01033, М.Р.) и программы EU Marie-Curie IRSES “Brazilian–European partnership in Dynamical Systems” (проект FP7-PEOPLE-2012-IRSES 318999 BREUDS).

[3] Departamento de Matemática PUC-Rio, Gávea, Rio de Janeiro, Brazil.
E-mail: lodiaz@mat.puc-rio.br

[4] Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro, Cidade Universitária – Ilha do Fundão, Rio de Janeiro, Brazil.
E-mail: gelfert@im.ufrj.br

[5] Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa, Poland.
E-mail: rams@impan.pl

Рассмотрим гладкую динамическую систему $F\colon M \to M$, определенную на компактном многообразии без края M. Напомним, что замкнутое F-инвариантное *транзитивное* (т.е. имеющее точку с плотной в Γ орбитой) множество $\Gamma \subset M$ называется *гиперболическим*, если существуют dF-инвариантное расщепление $E^{\mathrm{s}} \oplus E^{\mathrm{u}} = T_\Gamma M$ касательного расслоения и константы $C > 0$ и $\lambda > 1$ такие, что для любого $x \in \Gamma$ и любого $n \ge 0$ выполнено следующее:

$$\|dF_x^n(v)\| \le C\lambda^n \|v\| \quad \forall\, v \in E_x^{\mathrm{s}}, \qquad \|dF_x^{-n}(w)\| \le C\lambda^n \|w\| \quad \forall\, w \in E_x^{\mathrm{u}}.$$

Прочие определения гиперболического поведения основаны на понятии показателей Ляпунова. Напомним, что точка $x \in M$ называется *регулярной по Ляпунову*, если найдутся положительное целое число $s(x)$, числа $\chi_1(x) < \ldots < \chi_{s(x)}(x)$ и dF-инвариантное расщепление $T_x M = \bigoplus_{i=1}^{s(x)} E_x^i$ касательного пространства в точке x такие, что для всех $i = 1, \ldots, s(x)$ и $v \in E_x^i \setminus \{0\}$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\|dF_x^n(v)\| = \chi_i(x). \tag{1.1}$$

При этом числа $\chi_1(x) < \ldots < \chi_{s(x)}(x)$ называются *показателями Ляпунова* в точке x.

Согласно мультипликативной эргодической теореме Оселедца (см. [40]) для любой F-инвариантной эргодической вероятностной меры μ множество регулярных по Ляпунову точек имеет полную меру, а $s(\cdot) = s(\mu)$ и $\chi_i(\cdot) = \chi_i(\mu)$, $i = 1, \ldots, s(\mu)$, постоянны μ-почти всюду; числа $\chi_i(\mu)$ называются *показателями Ляпунова* меры μ. Если $\chi_\ell(\mu) = 0$ для некоторого ℓ, то мера μ называется *негиперболической*. В противном случае она называется *гиперболической*. Мы будем называть количество отрицательных показателей Ляпунова у меры μ ее (*устойчивым*) *индексом*. Когда речь идет о негиперболических мерах, мы всегда подразумеваем, что они эргодичны и, таким образом, исключаем из рассмотрения нетривиальные выпуклые комбинации эргодических мер. Простейшими примерами эргодических мер являются меры с носителями на периодических орбитах (мы будем называть такие меры просто *периодическими*). *Индексом* гиперболической периодической орбиты называется индекс (единственной) инвариантной меры с носителем на этой орбите. Ниже мы будем называть меру *нетривиальной*, если ее носитель несчетен; очевидно, такая мера не может быть периодической. Простейший пример негиперболической меры — периодическая мера с носителем на орбите негиперболической периодической точки. Гиперболическую периодическую орбиту, у которой есть как положительные, так и отрицательные показатели Ляпунова, мы будем называть *седлом*.

Сказанное выше приводит к следующему вопросу.

- *В какой мере эргодическая теория позволяет отслеживать негиперболическую динамику?*

Этот вопрос опять же является переформулировкой вопроса, с которого мы начали (хотя заметим, что термин “негиперболическая динамика” расплывчат и имеет разные значения в разных контекстах). Ответ на него отрицательный, поскольку имеются примеры негиперболических систем (в том смысле, что неблуждающее множество негиперболично), для которых все эргодические меры гиперболичны и имеют показатели Ляпунова, равномерно отделенные от нуля [4, 16]. Заметим, что эти примеры являются неустойчивыми в том смысле, что они могут быть разрушены посредством малого возмущения. С другой стороны, по теореме Купки–Смейла (см., например, [41, Ch. 3]) в топологически типичном случае[6] все периодические точки гиперболичны. Значит, рассматривая негиперболические периодические меры, можно получить системы с негиперболическими *эргодическими* мерами лишь на плотном подмножестве дополнения к множеству гиперболических динамических систем. Таким образом, чтобы

[6] *Топологически типичное* свойство — это свойство, которым обладают точки из остаточного подмножества, т.е. множества, содержащего счетное пересечение открытых всюду плотных множеств.

получить нечто большее, чем плотное подмножество, нужно исследовать негиперболические меры, не являющиеся периодическими. Это впервые было сделано в работе [30], где был введен метод периодических приближений, позволяющий строить нетривиальные эргодические меры как $*$-слабые пределы периодических мер.

В размерности строго больше 2 нужно иметь в виду, что *априори* различные типы гиперболического поведения могут сосуществовать с негиперболическим. Например, возможно сосуществование гиперболических периодических орбит разных *устойчивых индексов* (размерностей устойчивого расслоения), которые грубым образом вместе содержатся в одном *транзитивном множестве* (т.е. содержащем плотную орбиту), что приводит к перемежаемости различных типов гиперболического поведения в одном и том же транзитивном множестве. Например, именно это происходит в случае, исследованном в [30].

С учетом сказанного перефразируем поставленный выше вопрос следующим образом.

- *В какой мере эргодическая теория позволяет различать различные типы гиперболического поведения в негиперболических динамических системах*?

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением систем, транзитивных на всем фазовом пространстве (что исключает наличие аттракторов и репеллеров). В этом случае множество эргодических мер $\mathcal{M}_{\mathrm{erg}}$ разделяется на несколько непересекающихся компонент, которые мы будем рассматривать по отдельности (см. (2.1)).

2. ЧАСТИЧНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Чтобы продвинуться в поставленных выше вопросах, используя существующие методы, нам придется предполагать наличие у наших динамических систем дополнительной структуры. Мы вынуждены потребовать наличия глобально определенного расщепления касательного расслоения (так называемого *расщепления с доминированием*) на непрерывно зависящие от слоя инвариантные подрасслоения, которые, как следствие, включают в себя подпространства из расщепления Оселедца. Точнее говоря, мы потребуем, чтобы динамическая система была *частично гиперболической* с тремя такими расслоениями: $TM = E^{\mathrm{ss}} \oplus E^{\mathrm{c}} \oplus E^{\mathrm{uu}}$, где E^{ss} является равномерно сжимающимся, а E^{uu} — равномерно растягивающимся. Соответственно нулевые показатели Ляпунова автоматически оказываются связанными только с *центральным расслоением* E^{c}. Показатели, соответствующие векторам расслоения E^{c}, мы будем называть просто *центральными показателями*. Обозначим через $\mathbf{PH}^1(M)$ множество C^1-диффеоморфизмов компактного многообразия без края M, для которых имеется описанное выше частично гиперболическое расщепление с тремя невырожденными направлениями, причем центральное имеет размерность 1.[7]

В дальнейшем $F\colon M \to M$ будет частично гиперболическим транзитивным C^1-диффеоморфизмом риманова многообразия. Мы будем предполагать, что рассматриваемая нами система *грубо* транзитивна, *грубо* негиперболична и что найдется некоторая F-инвариантная компактная замкнутая кривая $\gamma = F(\gamma)$. Последнее свойство тоже оказывается грубым ввиду нормальной гиперболичности. Обозначим соответствующее открытое множество через $\mathbf{RTPH}^1(M)$ (здесь мы подразумеваем равномерную топологию в пространстве C^1-диффеоморфизмов). Заметим, что в силу сказанного выше кривая γ всюду касается E^{c}, так что мы будем называть ее *компактным центральным слоем*. Также заметим, что требование грубой негиперболичности исключает патологические случаи, такие как случай диффеоморфизмов тора $\mathbb{T}^3$, являющихся прямым произведением диффеоморфизма Аносова на $\mathbb{T}^2$ и иррационального поворота. Заметим, что для $F \in \mathbf{RTPH}^1(M)$ множество эргодических мер $\mathcal{M}_{\mathrm{erg}}$ разбивается на три

[7] В дальнейшем для простоты будем предполагать, что расщепление определено над всем фазовым пространством; аналогичный подход можно использовать в случае, когда расщепление определено только локально.

непересекающиеся компоненты:

$$\mathcal{M}_{\mathrm{erg}} = \mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0} \cup \mathcal{M}_{\mathrm{erg},0} \cup \mathcal{M}_{\mathrm{erg},>0}, \tag{2.1}$$

где меры из $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},0}$ негиперболические, а меры из $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ и $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},>0}$ гиперболичны. Кроме того, меры из $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ имеют $\dim E^{\mathrm{ss}}+1$ отрицательных и $\dim E^{\mathrm{uu}}$ положительных показателей Ляпунова, а меры из $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},>0}$ имеют $\dim E^{\mathrm{uu}}+1$ положительных и $\dim E^{\mathrm{ss}}$ отрицательных показателей.

2.1. Гиперболические и негиперболические меры. Прежде всего заметим, что в открытом и плотном в C^1-топологии подмножестве из $\mathbf{RTPH}^1(M)$ диффеоморфизмы имеют гиперболические периодические точки, которые притягивают в центральном направлении, и гиперболические периодические точки, которые отталкивают в центральном направлении. Кроме того, есть еще и подковы, которые притягивают или отталкивают в центральном направлении. Стало быть, в множествах $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ и $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},>0}$ есть гиперболические эргодические меры с положительной энтропией. На самом деле в этом случае существование гиперболической эргодической меры с положительной энтропией влечет за собой существование подков и, как следствие, гиперболических периодических орбит соответствующего типа согласно теореме Катка о наличии подковы (см. [34, 26]).

Существование негиперболических мер установить несколько сложнее. Дело в том, что в $\mathbf{RTPH}^1(M)$ плотны диффеоморфизмы с негиперболическими периодическим орбитами, а значит, с тривиальными негиперболическими мерами (см. [3])[8]. Поскольку у топологически типичных диффеоморфизмов есть только гиперболические периодические орбиты, мы можем получить *в лучшем случае* плотное подмножество в $\mathbf{RTPH}^1(M)$, состоящее из диффеоморфизмов с тривиальными негиперболическими мерами. Стало быть, чтобы получить более массивные множества диффеоморфизмов с негиперболическими мерами, нужно исследовать вопрос о том, как часто встречаются нетривиальные негиперболические меры. В [30] авторы предложили метод периодических приближений, который позволяет построить нетривиальную негиперболическую (эргодическую) меру как $*$-слабый предел гиперболических периодических мер, и применили этот метод к некоторым специальным ступенчатым косым произведениям. Этот метод основан на существовании контролируемых переходов между седлами разных индексов. При помощи него в работах [24, 7, 17] было получено C^1-типичное множество C^1-диффеоморфизмов с негиперболическими нетривиальными (эргодическими) мерами (см. также [12]). С использованием этого метода в [35] были построены некоторые особые открытые множества грубо негиперболических диффеоморфизмов тора $\mathbb{T}^3$ с такими мерами. Используя другой подход — так называемую *флип-флоп конфигурацию*, опирающуюся на понятие блендера, которое мы опишем ниже, в работе [5] авторы доказали, что открытое и плотное подмножество в $\mathbf{RTPH}^1(M)$ составляют диффеоморфизмы с негиперболическими мерами с положительной энтропией. Действительно, было показано, что существует компактное инвариантное множество с положительной топологической энтропией, состоящее из точек, центральные показатели Ляпунова которых нулевые, а следовательно, можно использовать вариационный принцип из [52], чтобы получить нужные меры. Заметим, что метод периодических приближений может дать только меры с нулевой энтропией (см. [36]).

Подводя итог, можно сказать, что на открытом и плотном подмножестве в $\mathbf{RTPH}^1(M)$ каждая компонента разложения (2.1) непуста и содержит меры с положительной энтропией. Таким образом, возникает естественный вопрос о том, какой вид поведения (с отрицательным,

[8] Заметим сначала, что C^1-открытым и плотным в $\mathbf{RTPH}^1(M)$ образом у диффеоморфизмов есть периодические точки. Напомним, что множество $\mathcal{F}^1(M)$ определяется как C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, у которых есть только гиперболические периодические орбиты. Согласно [3] множество $\mathcal{F}^1(M)$ содержится в множестве диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A. Наше утверждение теперь следует из того, что диффеоморфизмы из $\mathbf{RTPH}^1(M)$ не удовлетворяют аксиоме A.

нулевым или положительным показателем) превалирует. В нашем случае представляется естественным количественно подходить к этому вопросу в терминах энтропии. У нас есть два способа это сделать. Первый состоит в том, чтобы для центрального показателя Ляпунова α, взятого из спектра центральных показателей, определить максимальную энтропию эргодических мер с этим показателем:

$$\sup\{h_\mu(F)\colon\ \mu\in\mathcal{M}_{\mathrm{erg}},\ \chi_{\mathrm{c}}(\mu)=\alpha\}. \tag{2.2}$$

Второй состоит в том, чтобы для фиксированного значения центрального показателя определить топологическую энтропию множества регулярных по Ляпунову точек с этим показателем:

$$h_{\mathrm{top}}(F,\mathcal{L}(\alpha)),\qquad \text{где}\quad \mathcal{L}(\alpha)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{x\colon\ \chi_{\mathrm{c}}(x)=\alpha\}. \tag{2.3}$$

Максимальная энтропия из первого способа имеет отношение к ограниченным вариационным принципам и неявно определяет топологическую энтропию из второго способа при проведении мультифрактального анализа (см. теорему 3.5 ниже). Поскольку между эргодическими мерами и соответствующими типичными точками существует тесная связь, мы ожидаем, что две определенные выше энтропии совпадают при некоторых разумных дополнительных условиях (см. п. 3.3, где этот вопрос обсуждается более подробно).

2.2. Инвариантные слоения. Опишем, наконец, кратко геометрические свойства диффеоморфизмов класса $\mathbf{RTPH}^1(M)$, которые также важны для изучения обсуждавшихся выше эргодических свойств и множеств уровня из (2.2) и (2.3). В частности, этими свойствами мотивирована модель, которую мы будем рассматривать в разд. 3. Из наличия частично гиперболического расщепления $TM=E^{\mathrm{ss}}\oplus E^{\mathrm{c}}\oplus E^{\mathrm{uu}}$ следует наличие инвариантных слоений $\mathcal{F}^{\mathrm{ss}}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{uu}}$, касательных к E^{ss} и E^{uu} и называемых *сильно устойчивым* и *сильно неустойчивым слоениями* соответственно (см. [32]). Согласно [9, 46], ввиду того что по нашему предположению центральное расслоение E^{c} одномерно и притом имеется компактный центральный слой, существует C^1-открытое и C^1-плотное подмножество $\mathbf{ORTPH}^1(M)$ класса $\mathbf{RTPH}^1(M)$, состоящее из диффеоморфизмов, для которых оба слоения *минимальны* (т.е. каждый слой слоения плотен во всем фазовом пространстве). Можно выделить случай, когда есть центральное слоение (касательное к E^{c}), у которого *все* слои компактны. Топологически такие системы являются косыми произведениями. Важный пример, по-прежнему служащий источником вдохновения для постановки открытых вопросов, содержится в работе [47][9]. Мы подробнее рассмотрим этот вопрос в п. 4.1.

Упомянутые выше геометрические свойства присущи большому семейству ступенчатых косых произведений, которое мы определим и обсудим в разд. 3. С другой стороны, свойства этого семейства, на наш взгляд, отражают те существенные динамические свойства диффеоморфизмов класса $\mathbf{RTPH}^1(M)$, которые позволяют исследовать рассмотренные выше множества уровня и некоторые эргодические свойства и изучать топологию пространства инвариантных мер. Последнюю мы более подробно обсудим в следующем пункте.

2.3. Топология пространства мер: общие свойства. Посмотрим теперь на топологию пространства $\mathcal{M}$ борелевских вероятностных мер, инвариантных относительно непрерывного отображения компактного метрического пространства. Будучи снабженным $*$-слабой топологией, $\mathcal{M}$ становится компактным метризуемым топологическим пространством [52, § 6.1]. Обозначим через $\mathcal{M}_{\mathrm{erg}}\subset\mathcal{M}$ подмножество эргодических мер. Напомним, что $\mathcal{M}$ является

[9] Например, в [28] авторы спрашивают, верно ли, что для типичного эргодического сохраняющего меру диффеоморфизма, достаточно C^1-близкого к частично гиперболическому линейному автоморфизму $L\colon\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$ вида $L(x,y,z)=(A(x,y),z)$, где A — линейный диффеоморфизм Аносова, эргодические меры плотны в пространстве борелевских инвариантных мер. Рассматриваемый класс также включает системы из работы [47].

непустым симплексом Шоке (см. [52, § 6.2]). В частности, это множество выпукло и компактно. Крайние точки пространства $\mathcal{M}$ являются эргодическими мерами.

В целом есть множество свойств, которые могут представлять интерес при исследовании топологии пространства $\mathcal{M}$, например плотность и энтропийная плотность множества эргодических мер (в $\mathcal{M}$), а также связность множества эргодических мер. Плотность эргодических мер в $\mathcal{M}$ сразу же приводит к очень важным следствиям. Действительно, в этом случае $\mathcal{M}$ либо состоит из одной точки (т.е. отображение строго эргодично), либо является нетривиальным симплексом Шоке, в котором плотны крайние точки; в последнем случае $\mathcal{M}$ называется *симплексом Полсена*. Полсен [44] первым построил пример пространства с такими свойствами. Согласно [38] любые два метризуемых нетривиальных симплекса, в которых плотны крайние точки, совпадают с точностью до аффинных гомеоморфизмов, а значит, можно считать $\mathcal{M}$ тем же самым симплексом Полсена. Заметим, что, например, $\mathcal{M}_{\mathrm{erg}}$ в этом случае линейно связно (см. [38, Sect. 3, property 4]). В заключение напомним следующее определение. Говорят, что эргодические меры *энтропийно плотны*, если для любой меры $\mu \in \mathcal{M}$ и любого $\varepsilon > 0$ любая окрестность меры μ содержит эргодическую меру ν, для которой $h_\nu(F) > h_\mu(F) - \varepsilon$.[10]

Плотность эргодических (более того, периодических) мер была впервые продемонстрирована в работах [48, 49] в предположении, что отображение удовлетворяет условию периодической спецификации (в [50] была получена связность множества эргодических мер для сдвига Маркова, что, как было объяснено выше, согласно [38] является прямым следствием плотности). Напомним, что в случае гладких динамических систем периодическая спецификация имеет место для любого базисного множества любого удовлетворяющего аксиоме A диффеоморфизма (см. [13]). В более общем контексте в [1] было показано, что если $\Lambda \subset M$ — изолированное нетривиальное транзитивное множество C^1-типичного диффеоморфизма, то его периодические меры плотны (а также обладают и другими интересными свойствами, см. [27]). Ниже мы обсудим два более свежих результата из [31, 11].

Все известные результаты, касающиеся таких свойств, как плотность (в том числе энтропийная) и связность, получены с использованием приближения гиперболических эргодических мер либо периодическими мерами, либо марковскими эргодическими мерами с носителями на подковах. Мы увидим, что тот же метод можно иногда использовать в негиперболическом случае, когда, например, множество эргодических мер содержит меры разных индексов и негиперболические меры.

Заметим, что связность и (энтропийная) плотность эргодических мер не всегда имеют место. В [27] приведено несколько контрпримеров для сдвигов Маркова, однако в дальнейшем мы сосредоточимся на частично гиперболических системах, поэтому отметим примеры костистых компактных инвариантных множеств частично гиперболических транзитивных C^1-диффеоморфизмов, исследованные в работах [25, 37, 20, 21]. В этих примерах спектр центральных показателей Ляпунова имеет как минимум две непересекающиеся компоненты, а также как минимум две связные компоненты есть у множества эргодических мер. В частности, отсюда следует, что эргодические меры не всюду плотны.

2.4. Топология пространства мер: классы пересечения и гомоклинические классы. Чтобы понять топологию пространства $\mathcal{M}$, оказывается полезным рассмотреть так называемые классы пересечения и гомоклинические классы гиперболических периодических точек. Для более точной формулировки результатов кратко напомним определения. Будем говорить, что две гиперболические периодические точки одного и того же индекса *гомоклинически*

[10] Наше определение следует, например, работе [43] и является чуть более общим, чем определение из [31]. Заметим, однако, что согласно [19] любой частично гиперболический C^1-диффеоморфизм F с одномерным центральным расслоением является h-разделяющим, а значит, согласно [14] отображение энтропии $\mu \mapsto h_\mu(F)$ полунепрерывно сверху. Таким образом, в нашем случае эти два определения совпадают.

зацеплены, если инвариантные множества их орбит пересекаются циклическим образом (заметим, что в нашем частично гиперболическом случае с одномерным центральным направлением не требуется, чтобы пересечения были трансверсальными; подробности приведены в разд. 5). Заметим, что это отношение эквивалентности на множестве гиперболических периодических точек, и будем называть классы эквивалентности для отношения гомоклинической зацепленности *классами пересечения*. Для гиперболической периодической точки P будем обозначать ее класс пересечения через $\mathrm{Int}(P)$.

Класс пересечения гиперболической периодической точки впервые был рассмотрен в лекциях Ньюхауса [39], назывался там *h-классом* и использовался для описания так называемого спектрального разложения для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A. В этой терминологии *гомоклинический класс* (названный в [39] *h-замыканием*) есть замыкание содержащегося в нем класса пересечения. Заметим, что гомоклинический класс всегда является транзитивным инвариантным множеством. Более того, гомоклинический класс гиперболической периодической точки может содержать периодические точки, которые с ней не зацеплены гомоклинически, и, следовательно, может содержать несколько различных классов пересечения. Действительно, негиперболический гомоклинический класс может содержать носители эргодических мер разных индексов и/или негиперболических эргодических мер [30, 24, 5]. Более того, существуют примеры негиперболических гомоклинических классов, допускающих только гиперболические эргодические меры, но содержащих одновременно носители эргодических мер, имеющих отрицательные и положительные центральные показатели Ляпунова (см. [25, 37]).

Мы будем называть (не обязательно эргодическую) меру $\mu \in \mathcal{M}$ *гиперболической с отрицательным центральным показателем Ляпунова*, если μ-почти все точки имеют отрицательный центральный показатель Ляпунова, и будем обозначать множество всех таких мер через $\mathcal{M}_{<0}$. Аналогично определим *гиперболические меры с положительным центральным показателем Ляпунова* и множество $\mathcal{M}_{>0}$. Говоря о *$*$-слабой энтропийной сходимости*, мы имеем в виду, что последовательность мер сходится в $*$-слабой топологии и энтропии этих мер также стремятся к энтропии предельной меры.

Согласно утверждению [8, Theorem E] упомянутое выше C^1-открытое и C^1-плотное подмножество $\mathbf{ORTPH}^1(M)$ класса $\mathbf{RTPH}^1(M)$ может быть выбрано таким образом, что оно будет состоять из диффеоморфизмов, для которых любые два седла одного индекса гомоклинически зацеплены, т.е. принадлежат одному классу пересечения. Таким образом, для $F \in \mathbf{ORTPH}^1(M)$ существует ровно два класса пересечения, которые мы будем обозначать через $\mathrm{Int}_{<0}$ и $\mathrm{Int}_{>0}$, где

$$\mathrm{Int}_{<0} \overset{\mathrm{def}}{=} \bigl\{P \in M\colon\ P \text{ — гиперболическая периодическая точка},\ \chi_{\mathrm{c}}(P) < 0\bigr\},$$

а $\mathrm{Int}_{>0}$ определяется аналогично. Более того, каждое из этих двух множеств плотно в M. Для гиперболической (но не обязательно эргодической или периодической) меры $\mu \in \mathcal{M}$ определим ее *класс пересечения* $\mathrm{Int}(\mu)$ как класс пересечения гиперболических периодических орбит, для орбит из которого соответствующие периодические меры накапливаются к μ. Тогда для $F \in \mathbf{ORTPH}^1(M)$ либо $\mathrm{Int}(\mu) = \mathrm{Int}_{<0}$, либо $\mathrm{Int}(\mu) = \mathrm{Int}_{>0}$. Согласно работе [11] класс пересечения меры μ определен корректно.

Мы теперь можем, наконец, перейти к двум результатам, касающимся затронутых выше вопросов. Мы коротко переформулируем их для нашего более узкого класса $\mathbf{RTPH}^1(M)$. При этом ключевым моментом в доказательстве того, что к *эргодической* гиперболической мере μ накапливаются гиперболические периодические меры, является теорема Катка о наличии подковы. Заметим также, что этот метод применим для $C^{1+\alpha}$-диффеоморфизмов (см. [34]) или для C^1-диффеоморфизмов при наличии расщепления с доминированием (а значит, в частности, и для класса $\mathbf{RTPH}^1(M)$, см. [26]) и что конструкция Катка позволяет аппроксимировать меру в смысле $*$-слабой энтропийной сходимости.

Прежде всего нужно сказать, что частичный ответ на вопрос о плотности эргодических мер в $\mathcal{M}$ был получен в [11], где было показано, что для $F \in \mathbf{RTPH}^1(M)$ любая мера $\mu \in \mathcal{M}_{<0}$ (не обязательно эргодическая) аппроксимируется в $*$-слабой топологии эргодическими мерами тогда и только тогда, когда почти все эргодические меры в эргодическом разложении меры μ (по отношению к соответствующему распределению на множестве эргодических мер) имеют один и тот же класс пересечения (в этом случае μ с необходимостью имеет тот же индекс, что и гиперболические периодические орбиты этого класса). Как следствие получаем, что для $F \in \mathbf{ORTPH}^1(M)$ эргодические меры плотны в $\mathcal{M}_{<0}$ и в $\mathcal{M}_{>0}$. Однако есть основания предполагать, что множество $\mathcal{M}_0$ устроено намного сложнее.

Далее, согласно [31] для $F \in \mathbf{ORTPH}^1(M)$ и седла P диффеоморфизма F множество эргодических мер с носителем в $\overline{\mathrm{Int}(P)}$ и тем же индексом, что и у P, линейно связно. Заметим, что в [31] авторы предполагали $C^{1+\alpha}$-регулярность, чтобы применить результат Катка. Как было объяснено выше, это требование можно заменить на C^1-гладкость в сочетании с частичной гиперболичностью. Другое важное условие состоит в том, что замыкание $\overline{\mathrm{Int}(P)}$ должно быть изолировано (заметим, что в силу этого условия аппроксимирующие меры остаются в том же пространстве, что и μ). В нашем случае это выполнено автоматически, поскольку все фазовое пространство M является гомоклиническим классом. Еще одно дополнительное условие состоит в том, что любые два седла одного индекса гомоклинически зацеплены, и это также выполнено в нашем случае.

3. МОДЕЛЬНЫЕ СТУПЕНЧАТЫЕ КОСЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Обратимся теперь к ступенчатым косым произведениям. Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая двух символов. Пусть $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ — стандартное отображение сдвига на пространстве $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ двусторонних последовательностей, снабженном стандартной метрикой. Рассмотрим C^1-диффеоморфизмы $f_0, f_1\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ и соответствующее ступенчатое косое произведение

$$F\colon \Sigma \times \mathbb{S}^1 \to \Sigma \times \mathbb{S}^1, \qquad F(\xi, x) = (\sigma(\xi), f_{\xi_0}(x)), \qquad \text{где} \quad \xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}. \tag{3.1}$$

Мы будем обозначать пространство отображений F вида (3.1) через $\mathbf{SP}^1(\Sigma \times \mathbb{S}^1)$ и называть f_0, f_1 *послойными отображениями.*

Как было объяснено в разд. 2 (см. также обсуждение в [29, 33]), ступенчатое косое произведение может рассматриваться как модель некоторого частично гиперболического диффеоморфизма с компактными центральными слоями (гомеоморфными окружности).

Прежде чем подробно описывать отображения, которые мы будем рассматривать, введем некоторые обозначения. Для произвольной последовательности $\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ будем писать $\xi = \xi^-.\xi^+$, где $\xi^- = (\ldots\xi_{-1}) \in \Sigma^- \overset{\text{def}}{=} \{0,1\}^{-\mathbb{N}}$ и $\xi^+ = (\xi_0\xi_1\ldots) \in \Sigma^+ \overset{\text{def}}{=} \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ — соответствующие односторонние бесконечные последовательности. Мы также будем рассматривать цилиндры

$$[\eta_k \ldots \eta_{k+r}] \overset{\text{def}}{=} \bigl\{\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}\colon \xi_i = \eta_i,\ i = k, \ldots, k+r\bigr\},$$

где $r \ge 0$. Цилиндры вида $[\xi^-.\xi_0\ldots\xi_r]$ и $[\xi_{-r}\ldots\xi_{-1}.\xi^+]$ определим естественным образом.

Для *конечных* последовательностей $(\xi_0\ldots\xi_n)$ и $(\xi_{-m}\ldots\xi_{-1})$ положим

$$f_{[\xi_0\ldots\xi_n]} \overset{\text{def}}{=} f_{\xi_n} \circ \ldots \circ f_{\xi_1} \circ f_{\xi_0}, \qquad f_{[\xi_{-m}\ldots\xi_{-1}.]} \overset{\text{def}}{=} \bigl(f_{\xi_{-1}} \circ \ldots \circ f_{\xi_{-m}}\bigr)^{-1} = \bigl(f_{[\xi_{-m}\ldots\xi_{-1}]}\bigr)^{-1}.$$

Мы можем определить *центральный показатель Ляпунова* в точке $X = (\xi, x)$ естественным образом как

$$\chi_{\mathrm{c}}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\bigl|f'_{[\xi_0\ldots\xi_{n-1}]}(x)\bigr| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log\bigl|f'_{\xi_k}\bigl(f_{[\xi_0\ldots\xi_{k-1}]}(x)\bigr)\bigr|,$$

если этот предел, являющийся не чем иным, как биркгофовым средним (в смысле динамики F) непрерывной функции, существует. Если рассматривать ступенчатое косое произведение F как модель некоторого частично гиперболического диффеоморфизма, этот показатель будет соответствовать некоторому показателю Ляпунова из (1.1).

Мы потребуем, чтобы послойные отображения f_0, f_1 косого произведения F *удовлетворяли аксиомам* CEC+ *и* Acc+, а именно чтобы существовал замкнутый интервал $J^+ \subset \mathbb{S}^1$, называемый *интервалом перемешивания для положительных итераций* и обладающий следующими свойствами.

Аксиома CEC+(J^+) (контролируемое накрытие с контролируемым растяжением для отрезка J^+ под действием положительных итераций[11])**.** Существуют положительные константы $K_1, \ldots, K_5$ такие, что для любого интервала $H \subset \mathbb{S}^1$, пересекающего J^+ и удовлетворяющего неравенству $|H| < K_1$, выполнено следующее:

- (контролируемое накрытие) для некоторого натурального числа $\ell \le K_2\bigl|\log|H|\bigr| + K_3$ существует конечная последовательность $(\eta_0 \ldots \eta_{\ell-1})$ такая, что

$$f_{[\eta_0\ldots\,\eta_{\ell-1}]}(H) \supset B(J^+, K_4),$$

  где $B(J^+, \delta)$ — это δ-окрестность множества J^+;
- (контролируемое растяжение) для любого $x \in H$ имеем

$$\log\bigl|\bigl(f_{[\eta_0\ldots\,\eta_{\ell-1}]}\bigr)'(x)\bigr| \ge \ell K_5.$$

Положим

$$\mathcal{O}^+(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{n\ge 0} \; \bigcup_{(\theta_0\ldots\theta_{n-1})} f_{[\theta_0\ldots\theta_{n-1}]}(x).$$

Аксиома Acc+(J^+) (положительная достижимость для отрезка J^+ [12])**.**

$$\mathcal{O}^+(\operatorname{int} J^+) = \bigcup_{x\in \operatorname{int} J^+} \mathcal{O}^+(x) = \mathbb{S}^1.$$

Аналогичным образом F *удовлетворяет аксиомам* CEC− *и* Acc−, если найдется замкнутый интервал $J^- \subset \mathbb{S}^1$, называемый *интервалом перемешивания для обратных итераций*, такой, что обратные отображения f_0^{-1}, f_1^{-1} удовлетворяют аксиомам CEC+ и Acc+ (для J^-).

Мы также всегда будем предполагать транзитивность.

Аксиома T (транзитивность)**.** Существует точка $x \in \mathbb{S}^1$ такая, что множества $\mathcal{O}^+(x)$ и $\mathcal{O}^-(x)$ оба плотны в $\mathbb{S}^1$.

В дальнейшем мы будем обозначать через $\mathbf{SP}^1_{\mathrm{nh}}(\Sigma \times \mathbb{S}^1)$ подмножество в $\mathbf{SP}^1(\Sigma \times \mathbb{S}^1)$, состоящее из косых произведений, которые удовлетворяют аксиомам CEC+(J^+), Acc+(J^+), CEC−(J^-), Acc−(J^-) и T для некоторых интервалов J^+ и J^-. В этих предположениях оказывается возможным выбрать общий интервал перемешивания (см. [22, Sect. 2.2], где обсуждается связь между выбором (общих) интервалов перемешивания и транзитивностью).

[11] В оригинале “controlled expanding forward covering relative to J^+”. — *Прим. перев.*
[12] В оригинале “forward accessibility relative to J^+”. — *Прим. перев.*

Лемма 3.1 (общий интервал перемешивания [22, Lemma 2.3]). *Пусть* $F \in \underline{\mathbf{SP}^1_{\mathrm{nh}}}(\Sigma \times \mathbb{S}^1)$. *Тогда для любой точки* $x \in \mathbb{S}^1$ *и любого достаточно малого* δ *отрезок* $J = \overline{B(x, \delta)}$ *удовлетворяет аксиомам* CEC$+(J)$, Acc$+(J)$, CEC$-(J)$ *и* Acc$-(J)$.

Возвращаясь к нашему контексту, для отображений из класса $\mathbf{SP}^1_{\mathrm{nh}}(\Sigma \times \mathbb{S}^1)$ определим отношения гомоклинической зацепленности и классы пересечения, как в п. 2.4 (подробности см. в разд. 5 ниже). Согласно предложению 5.1 есть ровно два класса пересечения:

$$\mathrm{Int}_{<0} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigl\{P \in \Sigma \times \mathbb{S}^1 \colon\ P \text{ — гиперболическая периодическая точка, } \chi_{\mathrm{c}}(P) < 0\bigr\}$$

и аналогичное множество $\mathrm{Int}_{>0}$. Более того, имеем

$$\overline{\mathrm{Int}_{<0}} = \overline{\mathrm{Int}_{>0}} = \Sigma \times \mathbb{S}^1 = \text{Гомоклинический класс}(Q), \tag{3.2}$$

где Q — любая гиперболическая периодическая точка в $\Sigma \times \mathbb{S}^1$. Ниже мы покажем, что каждый класс пересечения соответствует одной компоненте связности множества эргодических мер. Для гиперболической эргодической (не обязательно периодической) меры $\mu \in \mathcal{M}$ ее *класс пересечения* $\mathrm{Int}(\mu)$ определяется так же, как в п. 2.4. Согласно предложению 5.1 либо $\mathrm{Int}(\mu) = \mathrm{Int}_{<0}$, либо $\mathrm{Int}(\mu) = \mathrm{Int}_{>0}$.

3.1. Гиперболические меры. Рассуждение из п. 2.4 можно без труда применить к классу $\mathbf{SP}^1(\Sigma \times \mathbb{S}^1)$ (см. [22, Sect. 3]). Следующая теорема является модификацией результатов из [11, Theorem 2] и [31, Theorems 1.1, 1.4] для $\mathbf{SP}^1_{\mathrm{nh}}(\Sigma \times \mathbb{S}^1)$.

Теорема 3.2. *Пусть* $F \in \mathbf{SP}^1_{\mathrm{nh}}(\Sigma \times \mathbb{S}^1)$. *Любая мера* $\mu \in \mathcal{M}_{<0}$ *является пределом мер* $\nu_n \in \mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ *в* $*$*-слабой топологии, при этом* $\mathrm{Int}(\mu) = \mathrm{Int}_{<0}$. *Кроме того, любая мера* $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ *является предельной точкой мер* $\nu_n \in \mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ *в смысле* $*$*-слабой энтропийной сходимости. Аналогичный результат справедлив для* $\mathcal{M}_{>0}$ *и* $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},>0}$ *соответственно.*

Как следствие, множества $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ *и* $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},>0}$ *линейно связны.*

Первый из сформулированных выше результатов был получен в работе [11] для случая C^1-диффеоморфизма при наличии расщепления с доминированием $E \oplus F$, а утверждение, которое мы приводим, является переформулировкой этого результата для наших косых произведений (вновь напомним, что условие изолированности выполнено в силу того, что мы рассматриваем динамику на всем фазовом пространстве $\Sigma \times \mathbb{S}^1$). Подчеркнем, что существенными элементами доказательства в [11] являются C^1-гладкая теория Песина для систем с доминированием, а также субаддитивная теорема Кингмана и максимальная эргодическая теорема, которые имеют естественные аналоги для случая косых произведений. Мы не будем повторять эту часть доказательства. Чтобы убедиться в том, что множество $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ линейно связно, мы следуем плану доказательства из работы [31]. Там $C^{1+\alpha}$-регулярность диффеоморфизмов используется лишь для того, чтобы применить результат Катка об аппроксимации эргодической гиперболической меры гиперболическими периодическими мерами. Как было сказано выше, то же самое имеет место для C^1-диффеоморфизма при наличии расщепления с доминированием $E \oplus F$ (см. [26]), что естественным образом переносится на наш случай косых произведений. Два основных требования из [31] состоят в том, что

(i) любые две гиперболические периодические точки одного устойчивого индекса гомоклинически зацеплены (это выполнено по предложению 5.1);

(ii) гомоклинический класс изолирован (верно в силу равенства (3.2)).

Приведем набросок доказательства. Предположим, что $\mu^0, \mu^1 \in \mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$. Тогда к μ^i сходится последовательность гиперболических периодических мер $\nu^i_n \in \mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ с носителями на орбитах гиперболических периодических точек P^i_n, $i = 0, 1$. Поскольку P^0_1 и P^1_1 гомоклинически зацеплены, существует непрерывный путь $\mu_0 \colon [1/3, 2/3] \to \mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$, соединяющий меры ν^0_1 и ν^1_1. Для любой пары мер ν^0_n, ν^0_{n+1} и любой окрестности U их выпуклой комбинации

$\{s\nu_n^0+(1-s)\nu_{n+1}^0,\ s\in[0,1]\}$ можно выбрать базисное множество Γ_n^0 таким образом, что все меры с носителем в нем содержатся в U. Отсюда, в частности, следует, что существует непрерывный путь $\mu_n^0\colon[1/3^{n+1},1/3^n]\to\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}\cap U$, соединяющий меру ν_n^0 с мерой ν_{n+1}^0. То же самое рассуждение применимо и для мер ν_n^1, что дает пути $\mu_n^1\colon[1-1/3^n,1-1/3^{n+1}]\to\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$, содержащиеся в окрестностях, сходящихся к мере μ^1. Определим $\mu_\infty|_{(0,1)}\colon(0,1)\to\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$, склеивая области определения наших путей, и завершим построение пути μ_∞, положив $\mu_\infty(0)=\lim_{n\to\infty}\mu_n^0(1/3^n)$ и $\mu_\infty(1)=\lim_{n\to\infty}\mu_n^1(1-1/3^n)$.

3.2. Негиперболические эргодические меры. Для негиперболических эргодических мер использованные выше методы эргодической аппроксимации в общем случае неприменимы. Однако наличие дополнительной структуры позволяет определенным образом распространить эти методы на наш случай ступенчатых косых произведений из $\mathbf{SP}^1_{\mathrm{nh}}(\Sigma\times\mathbb{S}^1)$. Следующий результат был получен в [22].

Теорема 3.3. *Пусть $F\in\mathbf{SP}^1_{\mathrm{nh}}(\Sigma\times\mathbb{S}^1)$. Любая мера из $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},0}$ приближается как мерами из $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$, так и мерами из $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},>0}$ в смысле $*$-слабой энтропийной сходимости.*

В частности, любую такую меру можно соединить непрерывной кривой с любой эргодической мерой в $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ и в $\mathcal{M}_{\mathrm{erg},>0}$.

Грубо говоря, идея доказательства этого результата состоит в том, чтобы сначала следовать основным элементам доказательства теоремы Катка о наличии подковы (см. [34; 26; 22, Sect. 3]), т.е., стартуя с *эргодической* меры, найти достаточное число кусков орбит (их количество растет примерно экспоненциально с показателем, зависящим от энтропии $h_\mu(F)$), для которых (неинвариантные) орбитальные меры более или менее приближают μ в $*$-слабой топологии. Второй шаг состоит в том, чтобы, используя структуру ступенчатого косого произведения, выбрать так называемые *скелеты*, соединяющие полученные на предыдущем этапе куски орбит, чтобы получились почти периодические орбиты, которые могут отслеживаться периодическими. Главная трудность состоит в том, чтобы аккуратно провести рассуждение с контролем искажения (напомним, что отображения предполагаются всего лишь C^1-гладкими и что отслеживаться будут орбиты с центральным показателем Ляпунова, примерно равным нулю). Этот набор периодических гиперболических орбит (с близкими к нулю показателями) позволяет строить подковы; единственная трудность на этом финальном шаге состоит в том, что периоды этих орбит неизбежно меняются в некотором диапазоне из-за того, что “склеивание” орбит на предыдущем шаге возможно только благодаря выполнению некоторых условий топологического характера (их выполнение гарантируется, в частности, аксиомами Acc$\pm$). Чтобы обойти эту проблему, мы строим так называемые *разновременные подковы*. Таким образом мы вручную получаем подковы с топологической энтропией, близкой к энтропии меры μ, такие, что меры с носителями в этих подковах $*$-слабо близки к μ.

Из теорем 3.2 и 3.3 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 3.4. *Пусть $F\in\mathbf{SP}^1_{\mathrm{nh}}(\Sigma\times\mathbb{S}^1)$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathrm{erg}}$ линейно связно.*

3.3. Энтропии для спектра центральных показателей Ляпунова. Теперь мы ответим на поставленный в разд. 2 вопрос о том, какой тип поведения (с отрицательным, нулевым или положительным центральным показателем Ляпунова) превалирует, и сделаем это в терминах энтропии.

Если начать изучение множеств $\mathcal{L}(\alpha)$ из (2.3) с рассмотрения орбит, получим следующее *мультифрактальное разложение*:

$$\Sigma\times\mathbb{S}^1=\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}}\mathcal{L}(\alpha)\cup\mathcal{L}_{\mathrm{irr}},$$

где $\mathcal{L}_{\mathrm{irr}}$ — множество точек, в которых центральный показатель Ляпунова неопределен (т.е. предел не существует). Заметим, что те α, для которых множества уровня $\mathcal{L}(\alpha)$ непусты,

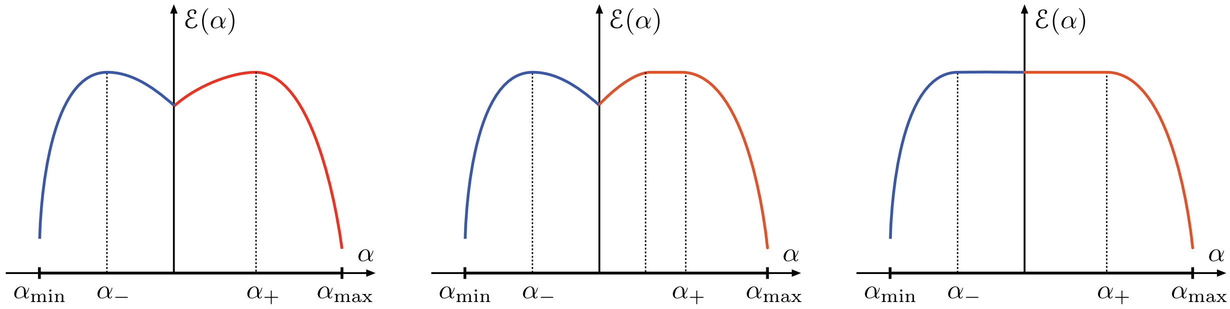

Рис. 1. Возможные виды зависимости энтропии $\mathcal{E}$ от центрального показателя Ляпунова α. При наличии свойства сближения график имеет вид, изображенный слева

образуют некоторый отрезок, естественным образом распадающийся на три непустые части:

$$\{\alpha\colon\ \mathcal{L}(\alpha)\neq\varnothing\}=[\alpha_{\min},0)\cup\{0\}\cup(0,\alpha_{\max}].$$

Нетрудно проверить, что минимальное и максимальное значения действительно достигаются. Из того, что любые две гиперболические периодические орбиты одного устойчивого индекса гомоклинически зацеплены (и, значит, содержатся в общей подкове), немедленно следует, что для любого $\alpha\in(\alpha_{\min},0)\cup(0,\alpha_{\max})$ существует эргодическая мера с положительной энтропией и центральным показателем Ляпунова, равным α. Соответствующий результат для $\alpha=0$ является следствием работы [5]. Мы определим “размер” множеств уровня в терминах *топологической энтропии*. Поскольку эти множества инвариантны, но в общем случае не компактны, мы будем полагаться на общее понятие топологической энтропии h_{top}, введенное Боуэном [15].

Следующий результат из работы [23] получается с помощью ограниченных вариационных принципов для величины (2.2), его иллюстрация дана на рис. 1.

Обозначим *энтропию* меры μ через $h_\mu(F)$. Напомним, что набор послойных отображений $\{f_0,f_1\}$ обладает *свойством сближения*, если для любых $x,y\in\mathbb{S}^1$ найдется хотя бы одна последовательность $\xi\in\Sigma$, для которой $|f_\xi^n(x)-f_\xi^n(y)|\to0$ при $|n|\to\infty$. Отметим, что если, например, f_0 является отображением Морса–Смейла с неблуждающим множеством, содержащим лишь один аттрактор и один репеллер, а f_1 — иррациональный поворот, то система обладает свойством сближения (см. также предложение 4.2 ниже).

Теорема 3.5. *Для любого* $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$ *имеем* $\mathcal{L}(\alpha)\neq\varnothing$. *Кроме того, для любого* $\alpha\in(\alpha_{\min},0)\cup(0,\alpha_{\max})$ *имеет место равенство*

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(\alpha))=\sup\bigl\{h_\mu(F)\colon\ \mu\in\mathcal{M}_{\mathrm{erg}},\ \chi_{\mathrm{c}}(\mu)=\alpha\bigr\},\tag{3.3}$$

причем функция $\alpha\mapsto h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(\alpha))$ *непрерывна на* $[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$ *и* $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(0))>0$.

Существует конечное число эргодических мер μ_+, μ_-, *имеющих максимальную энтропию* $h_{\mu_\pm}(F)=\log2$ *и таких, что* $\chi_{\mathrm{c}}(\mu_-)<0<\chi_{\mathrm{c}}(\mu_+)$. *Кроме того, если имеет место свойство сближения, то эргодические* F*-инвариантные вероятностные меры* $\mu_-\in\mathcal{M}_{\mathrm{erg},<0}$ *и* $\mu_+\in\mathcal{M}_{\mathrm{erg},>0}$ *максимальной энтропии* $h_{\mu_\pm}(F)=\log2$ *единственны и выполнены соотношения*

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(\alpha_-))=h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(\alpha_+))=\log2,\qquad h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(\alpha))<\log2\quad\text{для всех}\ \ \alpha\neq\alpha_-,\alpha_+,$$

где $\alpha_-=\chi_{\mathrm{c}}(\mu_-)$ *и* $\alpha_+=\chi_{\mathrm{c}}(\mu_+)$.

В случае наличия свойства сближения можно также показать (см. [23]), что ни одна нетривиальная выпуклая комбинация двух эргодических мер максимальной энтропии не может одновременно быть $*$-слабым пределом и пределом по энтропии для эргодических мер.

Отметим, что в работе [45] в сходном контексте установлена конечность максимизирующих энтропию мер и исследованы некоторые их свойства. Это связано с так называемым принципом инвариантности, также исследованным в [51], где (для некоторых эргодических мер C^2-гладких частично гиперболических диффеоморфизмов) было продемонстрировано явление, сходное с тем, что утверждается в теореме 3.5 (энтропия достигает максимума вдали от мер с нулевым показателем).

Наш подход к доказательству теоремы 3.5 состоит в том, чтобы рассматривать положительную, отрицательную и нулевую части спектра по отдельности. Из результатов работы [15] немедленно следует, что правая часть (3.3) дает оценку снизу значений $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(\alpha))$. Используя тот факт, что согласно предложению 5.1 для любой пары равномерно гиперболических множеств с отрицательными (положительными) слоевыми показателями мы можем найти большее гиперболическое множество, в котором они оба содержатся, можно заключить, что эти значения выражаются при помощи преобразования Лежандра–Фенхеля некоторой ограниченной функции давления (отрицательные и положительные значения α нужно рассматривать отдельно). Наконец, для любого α с $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(\alpha)) = h$ можно выбрать так называемые *скелеты*, введенные в [22, Sect. 4], чтобы с их помощью построить гиперболические множества с энтропией, близкой к h, и центральными показателями эргодических мер, близкими к α. Таким образом, $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(\alpha))$ оказывается ограниченным сверху энтропиями эргодических мер с показателями, близкими к α. Выпуклость преобразования Лежандра–Фенхеля влечет за собой непрерывность $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}(\alpha))$, что завершает доказательство.

4. ПРИМЕРЫ

В этом разделе мы сначала вернемся к случаю гладких динамических систем и обсудим подробнее объекты, характеризующие диффеоморфизмы класса $\mathbf{ORTPH}^1(M)$. Далее мы увидим, как они мотивируют введение перечисленных в разд. 3 аксиом для косых произведений.

4.1. Блендер-подковы и минимальные слоения. Материал данного пункта не претендует на максимальную общность, относится в первую очередь к диффеоморфизмам из $\mathbf{PH}^1(M^3)$ (многообразие M^3 предполагается трехмерным) и адаптирован для случая, когда есть глобально определенные устойчивое и неустойчивое слоения.

Неустойчивой блендер-подковой (см. [6, Sect. 3]) называется гиперболическое и одновременно частично гиперболическое множество Λ диффеоморфизма F, обладающее следующими свойствами: динамика на Λ сопряжена полному сдвигу над двумя символами, над Λ есть расщепление $E^{\mathrm{ss}} \oplus E^{\mathrm{c}} \oplus E^{\mathrm{uu}}$ (где E^{ss} является устойчивым расслоением для Λ, а $E^{\mathrm{c}} \oplus E^{\mathrm{uu}}$ — неустойчивым), Λ изолировано в своей открытой окрестности ("кубе") $\mathbf{C}$, т.е. $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F^n(\mathbf{C})$. Кроме того, расщепление определено над всей окрестностью $\mathbf{C}$ и существует $\lambda > 1$ такое, что $\|dF_x(v)\| \geq \lambda\|v\|$ для любой точки $x \in \mathbf{C}$ и любого вектора $v \in E^{\mathrm{c}} \oplus E^{\mathrm{uu}}$. *Устойчивая блендер-подкова* — это неустойчивая блендер-подкова для F^{-1}.

Для следующего набора понятий иллюстрация дана на рис. 2. Рассмотрим сначала локальное устойчивое множество блендер-подковы Λ, определяемое как $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(\Lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{n\leq 0} F^n(\mathbf{C})$. Неформально говоря, у куба $\mathbf{C}$ есть шесть граней: две противоположные центрально-устойчивые грани, "касающиеся" расслоения $E^{\mathrm{ss}} \oplus E^{\mathrm{c}}$, две противоположные центрально-неустойчивые грани, "касающиеся" $E^{\mathrm{c}} \oplus E^{\mathrm{uu}}$, и две противоположные устойчиво-неустойчивые грани, "касающиеся" $E^{\mathrm{ss}} \oplus E^{\mathrm{uu}}$. *Сильно неустойчивой кривой* называется компактная кривая, которая содержится в некотором сильно неустойчивом слое слоения $\mathcal{F}^{\mathrm{uu}}$ и граница которой содержится в центрально-устойчивых гранях куба (таким образом, кривая соединяет эти две грани). Аналогичным образом *сильно устойчивой кривой* называется компактная кривая, содержащаяся в некотором сильно устойчивом слое слоения $\mathcal{F}^{\mathrm{ss}}$ и имеющая границу, лежащую в центрально-неустойчивых гранях куба. *Неустойчивая полоса* (или просто *полоса*) S — это "прямоугольник", расслоенный на сильно неустойчивые кривые. *Шириной* $w(S)$ полосы S будем называть точную верхнюю грань чисел w таких, что найдется кривая η длины w,

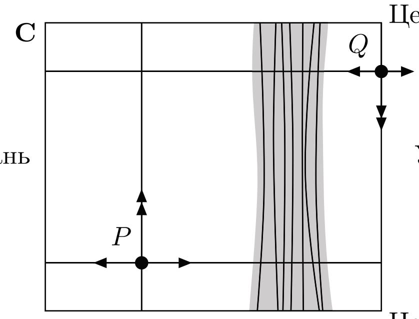

Рис. 2. Блендер-подкова: сильно неустойчивые кривые и полосы (в проекции вдоль сильно устойчивого направления)

касающаяся расслоения E^{c} и содержащаяся в S. Заметим, что существует число $\kappa > 0$ такое, что любая полоса, содержащаяся в $\mathbf{C}$, имеет ширину не больше κ.

Мы предполагаем, что в гиперболическом множестве Λ имеются две *неподвижные точки* P и Q, и рассматриваем их локальные устойчивые многообразия $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$ и $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(Q)$ (связные компоненты множества $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(\Lambda)$, содержащие P и Q соответственно). Теперь можно рассмотреть два класса изотопных неустойчивых кривых, не пересекающихся с $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$: один образуют те, что лежат справа, а другой — те, что лежат слева от $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$. Аналогичные классы рассмотрим для $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(Q)$. Локальные сильно неустойчивые слои точек множества $\Lambda \setminus \{P, Q\}$ оказываются сильно неустойчивыми кривыми, проходящими справа от $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$ и слева от $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(Q)$. Полосу S, расслоенную на сильно неустойчивые кривые, лежащие справа от $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$, будем называть *полосой справа от* $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$.

Ключевое свойство блендер-подковы заключается в следующем: для любой полосы S справа от $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$ есть две возможности (которые могут реализоваться и одновременно):

(1) множество $F(S)$ содержит полосу S' (называемую *преемницей* полосы S) справа от $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$ такую, что $w(S') > \lambda w(S)$ (где $\lambda > 1$ — то же число, что и выше в определении блендер-подковы);

(2) $F(S)$ содержит полосу S', которая пересекает $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$ в точке, удаленной на равномерно по S отделенное от нуля расстояние ρ от границы полосы S'.

Заметим, что возможность (1) может реализоваться не более чем $\ell(S)$ раз подряд, где $\ell = \ell(S)$ — наименьшее число, удовлетворяющее неравенству $\lambda^{\ell} w(S) > \kappa$ (κ определено выше). Говоря "подряд", мы подразумеваем, что для преемницы полосы S также имеет место случай (1) и т.д. В случае (2), положив $k = k(\rho)$ равным наименьшему числу такому, что $\lambda^k \rho > \kappa$, и рассматривая k дополнительных итераций, получим, что $F^k(S')$ содержит полосу, которая пересекает обе устойчиво-неустойчивые грани куба $\mathbf{C}$. Таким образом, для любой неустойчивой полосы S справа от $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$ найдется число $m \le \ell(S) + k$ такое, что множество $F^m(S)$ содержит полосу, пересекающую обе устойчиво-неустойчивые грани куба $\mathbf{C}$.

Блендер-подкова обладает одним геометрическим свойством, которое мы сформулируем, используя подход из [5]. Семейство $\mathcal{D}$ сильно неустойчивых кривых, проходящих справа от $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(P)$ и слева от $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(Q)$, удовлетворяет следующему условию инвариантности и накрытия: любая кривая $D \in \mathcal{D}$ содержит подмножество D_0 такое, что $F(D_0) \in \mathcal{D}$. Из этого условия следует, что локальное устойчивое множество $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(\Lambda)$ блендер-подковы Λ пересекает каждую кривую семейства $\mathcal{D}$ (см. [6, Remark 3.10] и [5, Lemma 3.13]). Мы будем называть $\mathcal{D}$ *выделенным семейством кривых блендера*. Наконец, заметим также, что для блендер-подков корректно определены продолжения: если Λ — блендер-подкова для F, то для любого G, достаточно близкого к F, продолжение Λ_G блендер-подковы Λ также является блендер-подковой (см. [6, Lemma 3.9]).

Как отмечено выше, существует C^1-открытое и C^1-плотное подмножество $\mathbf{ORTPH}^1(M^3)$ множества $\mathbf{RTPH}^1(M^3)$, для отображений из которого сильно устойчивое и сильно неустойчивое слоения минимальны. Главный шаг доказательства этого факта состоит в следующем (см. [9]). Найдутся неустойчивая блендер-подкова Λ^+ с соответствующим ей кубом $\mathbf{C}^+$, устойчивая блендер-подкова Λ^- с кубом $\mathbf{C}^-$ и константа $\varrho > 0$ такие, что

- каждая кривая α длины $\ell(\alpha) \geq \varrho$, содержащаяся в листе слоения $\mathcal{F}^{\mathrm{uu}}$, содержит сильно неустойчивые кривые $\alpha^+ \subset \mathbf{C}^+$ и $\alpha^- \subset \mathbf{C}^-$; кроме того, α^+ содержится в выделенном семействе кривых блендер-подковы Λ^+;
- каждая кривая β длины $\ell(\beta) \geq \varrho$, содержащаяся в листе слоения $\mathcal{F}^{\mathrm{ss}}$, содержит сильно устойчивые кривые $\beta^+ \subset \mathbf{C}^+$ и $\beta^- \subset \mathbf{C}^-$; кроме того, β^- содержится в выделенном семействе кривых блендер-подковы Λ^-.

Из равномерного растяжения в расслоении E^{uu} следует, что для каждой кривой α, содержащейся в листе слоения $\mathcal{F}^{\mathrm{uu}}$, найдется число $n = n(\alpha)$ такое, что $\ell(F^n(\alpha)) > \varrho$. Следовательно, $\alpha_0 = F^n(\alpha)$ содержит кривые $\alpha_0^{\pm}$ с описанными выше свойствами. Аналогично из равномерного сжатия в расслоении E^{ss} следует, что для каждой кривой β, содержащейся в листе слоения $\mathcal{F}^{\mathrm{ss}}$, существует $m = m(\beta)$ такое, что $\beta_0 = F^{-m}(\beta)$ содержит кривые $\beta_0^{\pm}$ с описанными выше свойствами. В частности, отсюда следует существование числа n_0 такого, что для всякого $n \geq n_0$ и всякой сильно неустойчивой кривой α, содержащейся в $\mathbf{C}^+$ или $\mathbf{C}^-$, кривая $F^n(\alpha)$ содержит сильно неустойчивую кривую из куба $\mathbf{C}^+$ и сильно неустойчивую кривую из куба $\mathbf{C}^-$. Аналогичное утверждение справедливо для сильно устойчивых кривых β в $\mathbf{C}^+$ или $\mathbf{C}^-$ и F^{-n}. Это означает, что *между кубами блендеров возможны переходы за конечное время n_0 вдоль сильно устойчивого и сильно неустойчивого слоений.*

4.2. Блендер-подковы в ступенчатых косых произведениях. Теперь мы адаптируем приведенные выше элементы конструкции для случая ступенчатых косых произведений (см. [33, Sect. 5] и [22, Sect. 8.3], где обсуждается связь между косыми произведениями и частично гиперболическими диффеоморфизмами). Мы будем описывать блендер-подковы в терминах лежащей в их основе одномерной динамики. Мы рассмотрим только сильно неустойчивое слоение, а формулировка для сильно устойчивого слоения получается непосредственно при помощи перехода к обратным итерациям.

Заметим, что "локальный сильно неустойчивый слой" $\mathcal{F}^{\mathrm{uu}}_{\mathrm{loc}}(\xi, x)$ точки (ξ, x) — это множество $[\xi^- .] \times \{x\}$, где $\xi = \xi^- . \xi^+$, и образы этого слоя полностью определяются послойной динамикой косого произведения:

$$F^k(\mathcal{F}^{\mathrm{uu}}_{\mathrm{loc}}(\xi, x)) \subset \mathcal{F}^{\mathrm{uu}}_{\mathrm{loc}}(F^k(\xi, x)) = [\xi^- \xi_0 \dots \xi_{k-1} .] \times \big\{f_{[\xi_0 \dots \xi_{k-1}]}(x)\big\}.$$

Поэтому аналогом *кривой, содержащейся в некотором сильно неустойчивом слое*, является множество $[\xi^- . \xi_0 \dots \xi_{k-1}] \times \{x\}$. Заметим, что образ

$$F^k\big([\xi^- . \xi_0 \dots \xi_{k-1}] \times \{x\}\big) = [\xi^- \xi_0 \dots \xi_{k-1} .] \times \big\{f_{[\xi_0 \dots \xi_{k-1}]}(x)\big\}$$

является локальным сильно неустойчивым слоем. Таким образом, для исследования поведения локального сильно неустойчивого слоя достаточно смотреть на положительную орбиту центральной координаты для системы итерируемых функций (iterated function system), порожденной послойными отображениями f_0 и f_1. Это также означает, что для получения блендеров в ступенчатых косых произведениях достаточно рассматривать только динамику координаты на слое. Мы определяем блендер-подкову для ступенчатого косого произведения F вида (3.1) с послойными отображениями f_0 и f_1 (рис. 3) при помощи обычной терминологии, используемой для блендеров (см. [10, Sect. 6.2]).

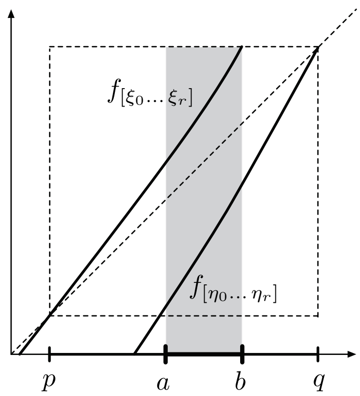

Рис. 3. Неустойчивая блендер-подкова

Определение 4.1 (неустойчивая блендер-подкова для ступенчатого косого произведения)**.** У ступенчатого косого произведения F вида (3.1) есть *неустойчивая блендер-подкова*, если существуют число $\beta > 1$, интервал $[p,q] \subset \mathbb{S}^1$, точки $a,b \in [p,q]$, $a < b$, и конечные последовательности $(\xi_0 \ldots \xi_r)$ и $(\eta_0 \ldots \eta_r)$, $\xi_i, \eta_j \in \{0,1\}$, такие, что отображения $f_{[\xi_0\ldots\xi_r]}$ и $f_{[\eta_0\ldots\eta_r]}$ обладают следующими свойствами:

- (равномерное растяжение) $(f_{[\xi_0\ldots\xi_r]})'(x) \ge \beta$ для любой точки $x \in [p,b]$ и $(f_{[\eta_0\ldots\eta_r]})'(x) \ge \beta$ для любой точки $x \in [a,q]$;
- (неподвижные точки) $f_{[\xi_0\ldots\xi_r]}(p) = p$ и $f_{[\eta_0\ldots\eta_r]}(q) = q$;
- (накрытие и инвариантность) $f_{[\xi_0\ldots\xi_r]}([p,b]) = f_{[\eta_0\ldots\eta_r]}([a,q]) = [p,q]$.

Мы будем называть $[p,q]$ *областью определения* блендера, а $[a,b]$ — *интервалом суперпозиции* блендера.

Будем говорить, что у ступенчатого косого произведения F есть *устойчивая блендер-подкова*, если у F^{-1} есть неустойчивая блендер-подкова.

Чтобы получить аналог куба $\mathbf{C}^+$ для случая ступенчатых косых произведений, рассмотрим объединение $\widehat{\mathbf{C}}^+$ множеств $[.\,\xi_0 \ldots \xi_r] \times [p-\varepsilon, b]$ (для некоторого малого $\varepsilon > 0$) и $[.\,\eta_0 \ldots \eta_r] \times [a,q]$ и определим Λ^+ как максимальное инвариантное множество для F^{r+1} в $\widehat{\mathbf{C}}^+$. В этом случае неподвижными точками блендера будут $P = ((\xi_0 \ldots \xi_r)^{\mathbb{Z}}, p)$ и $Q = ((\eta_0 \ldots \eta_r)^{\mathbb{Z}}, q)$, а сильно неустойчивые "кривые" справа от (локального устойчивого множества) точки P будут иметь вид $[.\,\xi_0 \ldots \xi_r] \times \{x\}$, если $x \in [p,b]$, и $[.\,\eta_0 \ldots \eta_r] \times \{x\}$, если $x \in [a,q]$. Из этого определения немедленно следует, что F^{r+1}-образ любой сильно неустойчивой кривой справа от P содержит сильно неустойчивую кривую, лежащую справа от P. Для устойчивой блендер-подковы связанный с ней "куб" $\widehat{\mathbf{C}}^-$ определяется как объединение множеств $[\xi_{-k} \ldots \xi_{-1}.] \times [p-\varepsilon, b]$ (для некоторого малого $\varepsilon > 0$) и $[\eta_{-k} \ldots \eta_{-1}.] \times [a,q]$.

Существование перехода вперед из $\widehat{\mathbf{C}}^+$ в $\widehat{\mathbf{C}}^-$ — это существование для каждой точки $x \in [p,b]$ такой конечной последовательности вида $(\xi_0 \ldots \xi_r \ldots \xi_{r+m})$, $m \ge 0$, что $f_{[\xi_0\ldots\xi_r\ldots\xi_{r+m}]}(x) \in (p,q)$, и существование для каждой точки $x \in [a,q]$ такой конечной последовательности вида $(\eta_0 \ldots \eta_r \ldots \eta_{r+n})$, $n \ge 0$, что $f_{[\eta_0\ldots\eta_r\ldots\eta_{r+n}]}(x) \in (p,q)$. Переход вперед из $\widehat{\mathbf{C}}^-$ в $\widehat{\mathbf{C}}^+$ определяется аналогично. Сформулировав то же самое для обратных итераций, получим определения переходов назад.

Наконец, чтобы были выполнены условия разд. 3, два блендера должны улавливать всю динамику отображения F (например, достаточно выполнения аксиом Acc$\pm$). Для этого потребуем, чтобы для любой точки $x \in \mathbb{S}^1$ некоторые образы и прообразы этой точки под действием итераций послойных отображений попадали в интервалы (p,q) и (p',q') из определения блендеров. Полное обсуждение этой конструкции можно найти в работе [22, Sect. 8.1].

4.3. Сжатие, растяжение, поворот в ступенчатых косых произведениях. Следующий результат не претендует на общность и является лишь переформулировкой результата из [30, теорема 2], в котором условие минимальности для положительных итераций заменено на условие типа плотности. Он также является переформулировкой утверждения из [22, Proposition 8.8] в несколько других терминах.

Предложение 4.2. *Рассмотрим ступенчатое косое произведение F вида* (3.1) *с послойными отображениями $f_0, f_1\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Предположим, что*

- *существуют число $\delta > 0$ и конечные последовательности $(\xi_0 \dots \xi_r)$ и $(\eta_0 \dots \eta_s)$ такие, что отображение $f_{[\xi_0\dots\xi_r]}$ имеет притягивающую неподвижную точку p и равномерно сжимает на отрезке $[p-\delta, p+\delta]$, а отображение $f_{[\eta_0\dots\eta_s]}$ имеет отталкивающую неподвижную точку q и равномерно растягивает на $[q-\delta, q+\delta]$;*
- *у каждой точки $x \in \mathbb{S}^1$ есть образ и прообраз под действием итераций динамики, содержащиеся в $(p-\delta, p+\delta)$, а также образ и прообраз, содержащиеся в $(q-\delta, q+\delta)$.*

Тогда существуют такие интервалы $J^+, J^- \subset \mathbb{S}^1$, что послойные отображения косого произведения F удовлетворяют аксиомам CEC+(J^+) *и* Acc$\pm(J^+)$, *а также* CEC$-(J^-)$ *и* Acc$\pm(J^-)$.

Чтобы добиться выполнения условия о том, что обриты посещают окрестности точек p и q, достаточно, чтобы существовала конечная последовательность $(\zeta_0 \dots \zeta_t)$ такая, что $f_{[\zeta_0\dots\zeta_t]}$ — иррациональный поворот, или чтобы всякая орбита системы была "в достаточной мере плотна" в $\mathbb{S}^1$. В частности, если некоторое отображение $f_{[\zeta_0\dots\zeta_t]}$ является иррациональным поворотом, то малые возмущения нашего косого произведения удовлетворяют условиям предложения 4.2.

5. ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ КЛАССЫ И КЛАССЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

В этом разделе мы коротко обсудим гомоклинические отношения в контексте косых произведений (подробности см., например, в [18, Sect. 2.1]). Для косых произведений F вида (3.1), дифференцируемых только в направлении вдоль слоя, мы будем называть периодическую точку $P = ((\xi_0 \dots \xi_{\pi-1})^{\mathbb{Z}}, p)$ *гиперболической*, если

$$\bigl(f_{[\xi_0\dots\xi_{\pi-1}]}\bigr)'(p) \neq \pm 1,$$

и *сжимающей* (*растягивающей*), если эта производная по модулю меньше (соответственно больше) единицы. Как и в гиперболическом случае, такие точки имеют корректно и однозначно определенные *продолжения* для отображений G, близких к F, т.е. для косых произведений $G(\xi, x) = (\sigma(\xi), g_{\xi_0}(x))$, где каждое послойное отображение g_i близко к f_i.

Для произвольной гиперболической неподвижной точки p отображения $f_{[\xi_0\dots\xi_{\pi-1}]}$ рассмотрим ее локальные инвариантные многообразия $W^{\mathrm{s/u}}_{\mathrm{loc}}(p, f_{[\xi_0\dots\xi_{\pi-1}]})$. Если точка p сжимающая, то $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(p, f_{[\xi_0\dots\xi_m]}) = \{p\}$, а $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(p, f_{[\xi_0\dots\xi_m]})$ является открытым интервалом, содержащим p. Когда точка p растягивающая, ситуация аналогична.

В дальнейшем пусть $P = ((\xi_0 \dots \xi_{\pi-1})^{\mathbb{Z}}, p)$ — гиперболическая периодическая точка отображения F. Отметим, что устойчивое и неустойчивое множества орбиты $\mathcal{O}(P)$ точки P определяются соответственно как

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{s}}(\mathcal{O}(P), F) = \bigl\{(\eta, x)\colon\ &\eta = \bigl(\dots\eta_{-1}.\eta_0\dots\eta_k(\xi_0\dots\xi_{\pi-1})^{\mathbb{N}}\bigr),\ k \geq 0, \\ &\text{и}\ \ f_{[\eta_0\dots\eta_k]}(x) \in W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}\bigl(p, f_{[\xi_0\dots\xi_{\pi-1}]}\bigr)\bigr\}, \\ W^{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(P), F) = \bigl\{(\eta, x)\colon\ &\eta = \bigl((\xi_0\dots\xi_{\pi-1})^{\mathbb{N}}\,\eta_{-k}\dots\eta_{-1}\,.\,\eta_0\dots\bigr),\ k \geq 0, \\ &\text{и}\ \ f^{-1}_{[\eta_{-1}\dots\eta_{-k}]}(x) \in W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}\bigl(p, f_{[\xi_0\dots\xi_{\pi-1}]}\bigr)\bigr\}. \end{aligned}$$

Теперь адаптируем определения *гомоклинического класса* и *гомоклинического отношения* из гладкой динамики для случая косых произведений.

Две гиперболические периодические точки P и Q одного индекса *гомоклинически зацеплены*, если инвариантные многообразия их орбит пересекаются циклическим образом: $W^{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(P),F)\cap W^{\mathrm{s}}(\mathcal{O}(Q),F)\neq\varnothing$ и $W^{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(Q),F)\cap W^{\mathrm{s}}(\mathcal{O}(P),F)\neq\varnothing$. *Класс пересечения* точки P — это множество всех гиперболических периодических точек, гомоклинически зацепленных с P. Точка $X\in W^{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(P),F)\cap W^{\mathrm{s}}(\mathcal{O}(P),F)$ называется *гомоклинической точкой* для точки P. Как и для трансверсальных гомоклинических точек в случае гладкой динамики, для этих точек определенно продолжение. *Гомоклинический класс* точки P — это замыкание множества гомоклинических точек орбиты точки P. Заметим, что в этом определении не требуется трансверсальность. Как и для гладкой динамики, гомоклинический класс точки P является транзитивным множеством, совпадающим с замыканием класса пересечения этой точки.

Предложение 5.1. *Пусть косое произведение F вида* (3.1) *удовлетворяет условиям из разд.* 3. *Тогда*

- *любые две гиперболические периодические точки одного индекса гомоклинически зацеплены*;
- *любой гомоклинический класс совпадает со всем* $\Sigma\times\mathbb{S}^1$.

Дадим набросок доказательства этого предложения. Рассмотрим две гиперболические периодические точки $P=((\xi_0\dots\xi_{\pi_P-1})^{\mathbb{Z}},p)$ и $Q=((\eta_0\dots\eta_{\pi_Q-1})^{\mathbb{Z}},q)$, для которых есть точка $c\in W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(p,f_{[\xi_0\dots\xi_{\pi_P-1}]})$ и конечная последовательность $(\beta_0\dots\beta_r)$ такие, что

$$f_{[\beta_0\dots\beta_r]}(c)\in W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}\bigl(q,f_{[\eta_0\dots\eta_{\pi_Q-1}]}\bigr).$$

Тогда

$$C=\bigl((\xi_0\dots\xi_{\pi_P-1})^{\mathbb{N}}.\beta_0\dots\beta_r(\eta_0\dots\eta_{\pi_Q-1})^{\mathbb{N}},c\bigr)\in W^{\mathrm{s}}(\mathcal{O}(Q),F)\cap W^{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(P),F).$$

Из этого замечания следует, что в условиях разд. 3 любой гомоклинический класс (гиперболической периодической точки) совпадает со всем $\Sigma\times\mathbb{S}^1$ и любые две гиперболические периодические точки одного индекса гомоклинически зацеплены. Чтобы в этом убедиться, допустим, что точки P и Q обе растягивающие, и покажем, что $W^{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(P),F)\cap W^{\mathrm{s}}(\mathcal{O}(Q),F)\neq\varnothing$. Рассмотрим перемешивающий интервал J, внутренность которого содержит точку q, как в лемме 3.1. По аксиоме Acc$-(J)$ найдутся малое $\delta>0$ и конечная последовательность $(\tau_0\dots\tau_k)$ такие, что

$$(p-\delta,p+\delta)\subset W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}\bigl(p,f_{[\xi_0\dots\xi_{\pi_P-1}]}\bigr)\qquad\text{и}\qquad f_{[\tau_0\dots\tau_k]}(p-\delta,p+\delta)\subset J.$$

Теперь аксиома CEC$+(J)$ дает конечную последовательность $(\eta_0\dots\eta_\ell)$ такую, что

$$J\subset f_{[\tau_0\dots\tau_k\eta_0\dots\eta_\ell]}(p-\delta,p+\delta).$$

Значит, существует точка $c\in(p-\delta,p+\delta)$ такая, что

$$q=f_{[\tau_0\dots\tau_k\eta_0\dots\eta_\ell]}(c).$$

Положив $C=\bigl((\xi_0\dots\xi_{\pi_P-1})^{\mathbb{N}}.\tau_0\dots\tau_k\eta_0\dots\eta_\ell(\eta_0\dots\eta_{\pi_Q-1})^{\mathbb{N}},c\bigr)$, получим

$$C\in W^{\mathrm{s}}(\mathcal{O}(Q),F)\cap W^{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(P),F).$$

Пересечение $W^{\mathrm{s}}(\mathcal{O}(P),F)\cap W^{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(Q),F)\neq\varnothing$ получится, если поменять в этом рассуждении P и Q местами. Совпадение гомоклинического класса со всем пространством $\Sigma\times\mathbb{S}^1$ доказывается аналогично.

Благодарности. Авторы признательны своим учреждениям за гостеприимство. Первые два автора благодарят за гостеприимство и поддержку Институт фундаментальных исследований (Institute of Research in Fundamental Sciences (IPM), Тегеран), где во время тематической программы по динамическим системам (2017) была написана часть этой работы. Авторы благодарят Ю. Ильяшенко за его предложение написать эту статью, А. Городецкого за его комментарии и анонимного рецензента за замечания и указанную им ссылку на работу [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abdenur F., Bonatti Ch., Crovisier S.* Nonuniform hyperbolicity for C^1-generic diffeomorphisms // Isr. J. Math. 2011. V. 183. P. 1–60.
2. *Abraham R., Smale S.* Nongenericity of Ω-stability // Global analysis: Proc. Symp. Pure Math. Univ. Calif., 1968. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1970. P. 5–8. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 14).
3. *Aoki N.* The set of axiom A diffeomorphisms with no cycles // Bol. Soc. Bras. Mat. Nova Sér. 1992. V. 23. P. 21–65.
4. *Baladi V., Bonatti Ch., Schmitt B.* Abnormal escape rates from nonuniformly hyperbolic sets // Ergodic Theory Dyn. Syst. 1999. V. 19, N 5. P. 1111–1125.
5. *Bochi J., Bonatti Ch., Díaz L.J.* Robust criterion for the existence of nonhyperbolic ergodic measures // Commun. Math. Phys. 2016. V. 344, N 3. P. 751–795.
6. *Bonatti Ch., Díaz L.J.* Abundance of C^1-robust homoclinic tangencies // Trans. Amer. Math. Soc. 2012. V. 364, N 10. P. 5111–5148.
7. *Bonatti Ch., Díaz L.J., Gorodetski A.* Non-hyperbolic ergodic measures with large support // Nonlinearity. 2010. V. 23, N 3. P. 687–705.
8. *Bonatti Ch., Díaz L.J., Pujals E.R., Rocha J.* Robustly transitive sets and heterodimensional cycles // Geometric methods in dynamics. Paris: Soc. math. France, 2003. V. 1. P. 187–222. (Astérisque; V. 286).
9. *Bonatti Ch., Díaz L.J., Ures R.* Minimality of strong stable and unstable foliations for partially hyperbolic diffeomorphisms // J. Inst. Math. Jussieu. 2002. V. 1, N 4. P. 513–541.
10. *Bonatti Ch., Díaz L.J., Viana M.* Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective. Berlin: Springer, 2005. (Encycl. Math. Sci.; V. 102. Math. Phys.; V. 3).
11. *Bonatti Ch., Gelfert K.* Dominated Pesin theory: Convex sum of hyperbolic measures: E-print, 2015. arXiv: 1503.05901 [math.DS].
12. *Bonatti Ch., Zhang J.* Periodic measures and partially hyperbolic homoclinic classes: E-print, 2016. arXiv: 1609.08489 [math.DS].
13. *Bowen R.* Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 154. P. 377–397.
14. *Bowen R.* Entropy-expansive maps // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 323–331.
15. *Bowen R.* Topological entropy for noncompact sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 184. P. 125–136.
16. *Cao Y., Luzzatto S., Rios I.* Some non-hyperbolic systems with strictly non-zero Lyapunov exponents for all invariant measures: Horseshoes with internal tangencies // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2006. V. 15, N 1. P. 61–71.
17. *Cheng C., Crovisier S., Gan S., Wang X., Yang D.* Hyperbolicity versus non-hyperbolic ergodic measures inside homoclinic classes: E-print, 2015. arXiv: 1507.08253 [math.DS].
18. *Díaz L.J., Esteves S., Rocha J.* Skew product cycles with rich dynamics: From totally non-hyperbolic dynamics to fully prevalent hyperbolicity // Dyn. Syst. 2016. V. 31, N 1. P. 1–40.
19. *Díaz L.J., Fisher T., Pacifico M.J., Vieitez J.L.* Entropy-expansiveness for partially hyperbolic diffeomorphisms // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2012. V. 32, N 12. P. 4195–4207.
20. *Díaz L.J., Gelfert K.* Porcupine-like horseshoes: Transitivity, Lyapunov spectrum, and phase transitions // Fundam. math. 2012. V. 216. P. 55–100.
21. *Díaz L.J., Gelfert K., Rams M.* Abundant phase transitions in step-skew products // Nonlinearity. 2014. V. 27, N 9. P. 2255–2280.
22. *Díaz L.J., Gelfert K., Rams M.* Nonhyperbolic step skew-products: Ergodic approximation // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. non linéaire. 2016. doi: 10.1016/j.anihpc.2016.10.009.
23. *Díaz L.J., Gelfert K., Rams M.* Nonhyperbolic step skew-products: Entropy spectrum of Lyapunov exponents: E-print, 2016. arXiv: 1610.07167 [math.DS].
24. *Díaz L.J., Gorodetski A.* Non-hyperbolic ergodic measures for non-hyperbolic homoclinic classes // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2009. V. 29, N 5. P. 1479–1513.
25. *Díaz L.J., Horita V., Rios I., Sambarino M.* Destroying horseshoes via heterodimensional cycles: Generating bifurcations inside homoclinic classes // Nonlinearity. 2009. V. 29, N 2. P. 433–474.

26. *Gelfert K.* Horseshoes for diffeomorphisms preserving hyperbolic measures // Math. Z. 2016. Bd. 283, N 3–4. S. 685–701.
27. *Gelfert K., Kwietniak D.* On density of ergodic measures and generic points // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2016. doi: 10.1017/etds.2016.97.
28. *Gogolev A., Tahzibi A.* Center Lyapunov exponents in partially hyperbolic dynamics: E-print, 2013. arXiv: 1310.1985 [math.DS].
29. *Городецкий А.С., Ильяшенко Ю.С.* Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33, №2. С. 16–30.
30. *Городецкий А.С., Ильяшенко Ю.С., Клепцын В.А., Нальский М.Б.* Неустранимость нулевых показателей Ляпунова // Функц. анализ и его прил. 2005. Т. 39, №1. С. 27–38.
31. *Gorodetski A., Pesin Ya.* Path connectedness and entropy density of the space of hyperbolic ergodic measures // Modern theory of dynamical systems: A tribute to Dmitry Victorovich Anosov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2017. P. 111–121. (Contemp. Math.; V. 692).
32. *Hirsch M.W., Pugh C.C., Shub M.* Invariant manifolds. Berlin: Springer, 1977. (Lect. Notes Math.; V. 583).
33. *Homburg A.J., Nassiri M.* Robust minimality of iterated function systems with two generators // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2014. V. 34, N 6. P. 1914–1929.
34. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. (Encycl. Math. Appl.; V. 54).
35. *Клепцын В.А., Нальский М.Б.* Устойчивость существования негиперболических мер для C^1-диффеоморфизмов // Функц. анализ и его прил. 2007. Т. 41, №4. С. 30–45.
36. *Kwietniak D., Łacka M.* Feldman–Katok pseudometric and the GIKN construction of nonhyperbolic ergodic measures: E-print, 2017. arXiv: 1702.01962 [math.DS].
37. *Leplaideur R., Oliveira K., Rios I.* Equilibrium states for partially hyperbolic horseshoes // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2011. V. 31, N 1. P. 179–195.
38. *Lindenstrauss J., Olsen G., Sternfeld Y.* The Poulsen simplex // Ann. Inst. Fourier. 1978. V. 28, N 1. P. 91–114.
39. *Newhouse S.E.* Lectures on dynamical systems // Dynamical systems: C.I.M.E. Lect., Bressanone, 1978. Boston: Birkhäuser, 1980. P. 1–114. (Prog. Math.; V. 8).
40. *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. о-ва. 1968. Т. 19. С. 179–210.
41. *Palis J.,* Jr., *de Melo W.* Geometric theory of dynamical systems: An introduction. New York: Springer, 1982.
42. *Песин Я.Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН. 1977. Т. 32, №4. С. 55–112.
43. *Pfister C.-E., Sullivan W.G.* Large deviations estimates for dynamical systems without the specification property. Application to the β-shifts // Nonlinearity. 2005. V. 18, N 1. P. 237–261.
44. *Poulsen E.T.* A simplex with dense extreme points // Ann. Inst. Fourier. 1961. V. 11. P. 83–87.
45. *Rodriguez Hertz F., Rodriguez Hertz M.A., Tahzibi A., Ures R.* Maximizing measures for partially hyperbolic systems with compact center leaves // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2012. V. 32, N 2. P. 825–839.
46. *Rodriguez Hertz F., Rodriguez Hertz M.A., Ures R.* Some results on the integrability of the center bundle for partially hyperbolic diffeomorphisms // Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 103–109. (Fields Inst. Commun.; V. 51).
47. *Shub M., Wilkinson A.* Pathological foliations and removable zero exponents // Invent. math. 2000. V. 139, N 3. P. 495–508.
48. *Sigmund K.* Generic properties of invariant measures for Axiom A-diffeomorphisms // Invent. math. 1970. V. 11, N 2. P. 99–109.
49. *Sigmund K.* On dynamical systems with the specification property // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 190. P. 285–299.
50. *Sigmund K.* On the connectedness of ergodic systems // Manuscr. math. 1977. V. 22. P. 27–32.
51. *Tahzibi A., Yang J.* Strong hyperbolicity of ergodic measures with large entropy: E-print, 2016. arXiv: 1606.09429v1 [math.DS].
52. *Walters P.* An introduction to ergodic theory. New York: Springer, 1982. (Grad. Texts Math.; V. 79).

Перевод с английского И.С. Шилина