Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Michał Rams

Wymiar pudełkowy, samoprzecinające się zbiory Cantora

Praca doktorska

Promotor: Prof. dr hab. Feliks Przytycki

Warszawa 1999

Podziękowania

Chciałbym w tym miejscu podziękować mojemu promotorowi, profesorowi Feliksowi Przytyckiemu, za wszystko czego się od Niego nauczyłem, za całą pomoc jaką od Niego otrzymałem i za cały czas jaki mi poświęcił. Chciałbym także podziękować całej naszej grupie, tj. (oprócz Profesora) pp. Janinie Kotus, Annie Zdunik, Bogusi Karpińskiej, Krzysiowi Barańskiemu oraz Jankowi Szczyrkowi za wspaniałą atmosferę w jakiej się w Warszawie znalazłem. Szczególne podziękowania jestem winien Krzysiowi Barańskiemu za pomoc w moich zmaganiach z LaTeX-em.

Spis rzeczy

Spis rysunków

1 Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Wymiar Hausdorffa został zdefiniowany po raz pierwszy w pracy [Ha] przez Hausdorffa, w ramach prowadzonych ówcześnie prób zdefiniowania wymiaru topologicznego. Jego definicja okazała się jednak nieprzydatna dla topologów gdyż nie jest to niezmiennik homeomorfizmów. Niemniej jednak wymiar Hausdorffa okazał się ciekawym obiektem badań, i jest w tej chwili jednym z głównych obiektów zainteresowania geometrycznej teorii miary. Wielki wkład w rozwój tej teorii wniósł Besicovitch.

Były również podawane różne inne, podobne definicje. Między innymi Besicovitch i Taylor podali w pracy [BT] bardzo ciekawy przykład wymiaru. Ich definicja (stosująca się do zwartych zbiorów na prostej) była zadana nie tyle przez zbiór co przez jego uzupełnienie – do określenia tego wymiaru (nazwanego indeksem Besicovitcha-Taylora) potrzebna była jedynie znajomość długości wszystkich składowych uzupełnienia zbioru (ich kolejność była nieistotna). Indeks Besicovitcha-Taylora okazał się być jedną z równoważnych postaci górnego wymiaru Minkowskiego, jak to pokazał Tricot w pracy [T3].

Z kolei podobną definicję podali w wyższych wymiarach Martio i Vuorinen w pracy [MV] (później także Bishop w [Bi]). Znaleźli oni bardzo ciekawą własność tzw. pokrycia Whitney'a (wymyślonego jako narzędzie używane w analizie harmonicznej, zob. [St]) pozwalającą na określenie przy jego pomocy górnego wymiaru Minkowskiego zbioru także w wyższych wymiarach. Z kolei Tricot w pracy [T2] pokazał, że w wymiarze dwa można osłabić założenia pokrycia Whitney'a a mimo to otrzymać górny wymiar Minkowskiego w ten sam sposób. Jednym z celów tej pracy jest uogólnienie (zupełnie inną metodą) jego wyniku na wyższe wymiary.

Drugim, obok badania ogólnych własności wymiarów, nurtem w geometrycznej teorii miary jest znajdowanie metod obliczania wymiarów konkretnych zbiorów czy też miar. Jednym z częściej badanych obiektów są zbiory graniczne i miary niezmiennicze dla iteracyjnych układów funkcyjnych. W przypadku liniowych układów bez samoprzecięć (tj. spełniających tzw. warunek zbioru otwartego) pełną teorię podał Hutchinson w pracy [Hu]. Na układy nieliniowe rozszerzył ją Bowen w [Bo2], opierając się na utworzonej przez Synaja, Ruelle'a oraz siebie teorii noszącej nazwę formalizmu termodynamicznego, [Bo1].

Znacznie trudniejszym obiektem badań okazały się być układy iteracyjne funkcji nie spełniające warunku zbioru otwartego. Jako pierwszy badał je Erdös w swoich pracach [E1] i [E2], rozważając problem absolutnej ciągłości (względem miary Lebesgue'a) rozkładu zmiennej losowej zadanej wzorem $\sum \pm\lambda^n$, $1/2 < \lambda < 1$, znaki wybierane niezależnie z prawdopodobieństwem jedna druga. Problem ten (który można przeformułować w terminach iteracyjnych układów funkcyjnych) badany był później m.in. przez Garsię, który postawił w [Ga] hipotezę, iż miara ta jest absolutnie ciągła dla prawie wszystkich wartości λ, udowodnioną dopiero przez Solomyaka w pracy [So2]. Zbliżone problemy (ale dotyczące zbiorów niezmienniczych) badali m.in. Pollicott i Simon w [PoSi].

Ostatnio Peres i Schlag uzyskali bardzo ogólny wynik [PeSch], dotyczący wymiaru obrazu miary pod działaniem rodziny odwzorowań, który można stosować zarówno do jednego jak i drugiego problemu (jak również do wielu innych). W tej pracy chciałbym pokazać w konstruktywny sposób i w odrobinę większej ogólności wnioski, płynące z ich twierdzenia dla iteracyjnych układów funkcji z samoprzecięciami.

1.2 Plan pracy

W rozdziale drugim podane są definicje i podstawowe własności pojęć geometrycznych, z których będę korzystał w całej pracy, w szczególności różne definicje wymiarów. Znajduje się tam również kilka słów o formaliźmie termodynamicznym, w tym sformułowanie twierdzenia Synaja o istnieniu miary Gibbsa.

Rozdział trzeci zawiera rozważania o pokryciach Whitney'a i uogólnionych pokryciach Whitney'a oraz ich zastosowaniu do obliczania górnego wymiaru Minkowskiego (pudełkowego). Jest w nim zawarty pierwszy z głównych wyników pracy: twierdzenie 3.10 oraz jego niskowymiarowe uogólnienie (sformułowane i udowodnione w wymiarze 2) twierdzenie 3.15.

Dalsza część pracy poświęcona jest badaniu zbiorów granicznych iteracyjnych układów funkcji i ich rodzin. W rozdziale czwartym podane są ich definicje, podstawowe własności w przypadku niewystępowania samoprzecięć (teoria Hutchinsona) oraz możliwe uogólnienia (przede wszystkim, układy z nieskończenie wieloma odwzorowaniami). Podaję tam również rezultaty Pollicotta i Simona, Solomyaka oraz Peresa i Schlaga dotyczące układów iteracyjnych funkcji z samoprzecięciami, jakimi będę się dalej zajmować.

W rozdziale piątym podaję dowody moich rezultatów w szczególnym przypadku układów liniowych o stałych współczynnikach kontrakcji w wymiarze 1. Najpierw otrzymam lokalne zależności, łączące dla danego układu szybkość wzrostu liczby przecięć cylindrów z wymiarem zbioru granicznego oraz absolutną ciągłością miary naturalnej względem miary Lebesgue'a (stwierdzenia 5.3 oraz 5.7) a następnie otrzymam stąd wnioski dla rodzin układów zależnych od parametru: twierdzenia 5.1 oraz 5.2.

W ostatnich dwu rozdziałach przedstawiam analogiczne fakty dla układów iteracyjnych funkcji w pełnej ogólności. W rozdziale szóstym podaję własności pojedynczych układów (stwierdzenia 6.1, 6.6, 6.9 oraz 6.10, to ostatnie dla nieskończonych układów iteracyjnych funkcji) a w rozdziale siódmym wnioski dotyczące rodzin układów: twierdzenia 7.11 oraz 7.14. Rozumowania podane w tych dwu rozdziałach opierają się na tym samym schemacie co te z rozdziału piątego, jednak są znacznie mniej przejrzyste z uwagi na wiele technicznych szczegółów jakie musiały zostać uwzględnione. Wypisanie tych samych dowodów najpierw w prostszym przypadku miało na celu jedynie ułatwienie ich zrozumienia.

1.3 Notacja

W całej pracy kulę o promieniu r i środku x będę oznaczał $K_r(x)$. Moc zbioru A będzie oznaczana $\sharp A$, jego domknięcie $\overline{A}$ a uzupełnienie A^c. Symbol $\approx$ oznacza, że wyrażenia po obu jego stronach są równe z dokładnością do stałej multiplikatywnej. Mała litera c, ewentualnie z dowolnymi oznaczeniami dodatkowymi (jak c' lub c_2) oznacza stałą. Stałe w jednym dowodzie nie muszą mieć nic wspólnego z tak samo oznaczonymi stałymi w innym dowodzie. Jeżeli stała zależy od pewnych innych wielkości i jest to istotne dla dalszego rozumowania, będzie zapisana np. jako $c_1(D, p, \tilde{G})$. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ rozpoczyna się w całej pracy od zera.

2 Informacje wstępne z geometrycznej teorii miary

2.1 Geometria

Rodzinę otwartych ograniczonych zbiorów jednospójnych w $\mathbb{R}^d$ będę nazywał rodziną zbiorów *jednakowo regularnych*, jeśli stosunek promienia zewnętrznego (tj. infimum promieni kul otwartych, zawierających dany zbiór) do promienia wewnętrznego (tj. supremum promieni kul otwartych zawartych w danym zbiorze) jest dla nich wspólnie ograniczony.

Jednospójny zbiór otwarty $A \subset \mathbb{R}^2$ będę (za [Po]) nazywał *obszarem Johna* jeśli rozcinając go odcinkiem na dwie części w dowolny sposób otrzymujemy dwa zbiory, których średnice są co najwyżej porównywalne z długością rozcięcia (tj. istnieje taka stała M, że odcinek o długości l rozcina zbiór na części o średnicy nie przekraczającej Ml). Będę używał równoważnej definicji: zbiór A jest obszarem Johna jeśli mogę wybrać w nim punkt o oraz rodzinę krzywych oy, łączących go z punktami z brzegu A takich, że dla pewnej stałej c koło $K(x, c\,\mathrm{dist}(x,y))$ zawarte jest w A dla dowolnego punktu $x \in oy$. W powyższym wyrażeniu odległość między punktami x i y obliczana jest wzdłuż krzywej oy.

Rodzinę zbiorów, każdy z których spełnia warunek Johna z tą samą stałą c będę nazywał *jednostajną rodziną Johna*. Rodzina taka jest zawsze rodziną zbiorów jednakowo regularnych.

Sześcianem diadycznym w $\mathbb{R}^d$ nazywamy sześcian o osiach równoległych do osi układu współrzędnych, zadany układem nierówności

$$x_i \in [k_i \cdot 2^l, (k_i + 1) \cdot 2^l],$$

gdzie (k_i) jest to ciąg d liczb całkowitych a l jest również liczbą całkowitą. Dowolne dwa sześciany diadyczne są albo zawarte jeden w drugim, albo mają rozłączne wnętrza.

Dla danego zbioru zwartego A pokryciem diadycznym jego uzupełnienia nazywam rodzinę największych sześcianów diadycznych, które są z nim rozłączne ale które przecinają pewne jego otoczenie (największym sześcianem diadycznym, spełniającym jakiś warunek, nazywam taki sześcian diadyczny, który warunek spełnia ale żaden sześcian diadyczny zawierający go warunku nie spełnia). Otoczenie jakie będę pokrywał wybieram w ten sposób, by takie największe sześciany istniały (nie chcę, by to otoczenie przecinało oktant przestrzeni $\mathbb{R}^d$, którego zbiór A nie przecina).

ε-otoczeniem zbioru A nazywam zbiór punktów, leżących w odległości mniejszej od ε od punktów zbioru A, czyli równoważnie sumę mnogościową rodziny wszystkich kul otwartych o promieniach równych ε a środkach leżących w A.

2.2 Teoria wymiaru

Miarą na przestrzeni X będę (za [Ma]) nazywać nieujemną, monotoniczną (miara podzbioru nie może przekroczyć miary zbioru), subaddytywną (miara sumy przeliczalnej rodziny zbiorów jest nie większa od sumy ich miar) funkcję określoną na wszystkich podzbiorach X, przyjmującą dla zbioru pustego wartość 0. Obiekt taki bywa także nazywany w literaturze miarą zewnętrzną.

Zbiór $A \subset X$ nazywam *mierzalnym* dla miary μ, jeśli

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A)$$

dla każdego $E \subset X$. Zbiory takie tworzą σ-ciało. Jeżeli to σ-ciało zawiera wszystkie zbiory borelowskie w X (tj. σ-ciało generowane przez zbiory otwarte) to miarę nazywam *borelowską*. Miarę nazywam *regularną*, jeśli dla dowolnego zbioru $A \subset X$ mogę znaleźć jego mierzalny nadzbiór o tej samej mierze. Miara jest *lokalnie skończona* jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje taka kula o środku w x, której miara jest skończona.

Miara nazywa się miarą *Radona*, jeśli

- miara zbioru zwartego jest zawsze skończona,
- miara zbioru otwartego równa jest supremum miar jego zwartych podzbiorów,
- miara dowolnego zbioru równa jest infimum miar jego otwartych nadzbiorów.

W $\mathbb{R}^d$ miara jest Radona wtedy i tylko wtedy gdy jest borelowska, regularna i lokalnie skończona.

Podstawowym celem geometrycznej teorii miary jest badanie geometrycznych własności zbiorów oraz miar, a głównym pojęciem, jakie jest w tym celu wprowadzane – wymiar. Spośród wielu definicji najczęściej używany w matematyce jest wymiar Hausdorffa i związana z nim miara. Miara i wymiar Hausdorffa są szczególnym przypadkiem ogólnej konstrukcji Carathéodory'ego, którą podaję za [Ma]; pierwsze definicje i wyniki dotyczące miary i wymiaru Hausdorffa ukazały się w [C] i [Ha].

Niech F będzie rodziną podzbiorów przestrzeni metrycznej X, a ξ nieujemną funkcją określoną na F. Zakładamy, że

i) Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje pokrycie X zbiorami $E_i \in F$ (przeliczalną rodziną) o średnicach nie przekraczających ε,

ii) Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $E \in F$ taki, że $\operatorname{diam}(E) < \varepsilon$ oraz $\xi(E) < \varepsilon$.

Dla dowolnego $A \subset X$ określamy funkcję

$$\psi_\varepsilon(A) = \inf\{\sum \xi(E_i); A \subset \bigcup E_i, E_i \in F, \operatorname{diam}(E_i) < \varepsilon\}$$

Istnienie takiego pokrycia wynika z warunku i), warunek ii) gwarantuje, że $\psi_\varepsilon(\emptyset) = 0$ dla dowolnego ε. Funkcja ψ_ε jest niemalejąca względem ε. Jest zatem dobrze określona funkcja

$$\psi(A) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \psi_\varepsilon(A)$$

Określa ona borelowską miarę (zewnętrzną), nazywaną *miarą Carathéodory'ego*. Jeżeli zbiory z rodziny F są borelowskie, to jest to miara regularna.

Miarę Hausdorffa (dokładniej, s-wymiarową miarę Hausdorffa) otrzymujemy, podstawiając w konstrukcji miary Carathéodory'ego za F rodzinę wszystkich podzbiorów X (równoważnie, rodzinę wszystkich zbiorów otwartych – zatem jest to miara borelowska regularna) dla funkcji $\xi_s(E) = \operatorname{diam}(E)^s$. Stosujemy przy tym konwencję $0^0 = 1$ oraz $\operatorname{diam}(\emptyset)^s = 0$. Aby spełniony był warunek i), musimy konstrukcję przeprowadzać w przestrzeni ośrodkowej. Miara Hausdorffa w ogólności nie jest σ-skończona. Oznaczamy ją $H^s(\cdot)$, a ε-aproksymację (użytą przy jej definicji) $H^s_\varepsilon(\cdot)$.

Będziemy stosować definicję miary Hausdorffa dla $X = \mathbb{R}^d$. Jeśli s jest liczbą całkowitą, to s-wymiarowa miara Hausdorffa dowolnej regularnej s-wymiarowej powierzchni (np. rozmaitości różniczkowej) równa jest s-wymiarowej objętości tej powierzchni, pomnożonej przez stałą zależną tylko od s oraz d. Dla $s = d$ miara ta równa jest mierze Lebesgue'a, pomnożonej przez stałą (na wszystkich podzbiorach).

Niech A będzie dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}^d$. Zauważmy, że

$$H^s_\varepsilon(A) \le \varepsilon^{s-s'} H^{s'}_\varepsilon(A)$$

Zatem jeśli s-wymiarowa miara Hausdorffa zbioru A jest dodatnia, to dla dowolnego $s' < s$ jest nieskończona; jeżeli s-wymiarowa miara zbioru A jest skończona, to dla dowolnego $s' > s$ jest ona równa zeru. Zatem istnieje takie s_0, że $H^s(A)$ jest nieskończona dla $s < s_0$ a zerowa dla $s > s_0$. Liczbę s_0 nazywamy *wymiarem Hausdorffa* zbioru A i oznaczamy $\dim_H(A)$.

Poniżej podaję ważniejsze własności wymiaru Hausdorffa.

Stwierdzenie 2.1. – $\dim_H(A) \le \dim_H(B)$ *dla* $A \subset B$,

– $\dim_H(\bigcup A_i) = \sup \dim_H(A_i)$,

– $\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A)$ *dla dowolnego Lipschitzowskiego odwzorowania* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$,

– *jeśli w definicji miary Hausdorffa za* F *przyjąć rodzinę wszystkich kul (tzw. miary sferyczne), albo rodzinę wszystkich sześcianów (miary sieciowe), to dla takich miar można zdefiniować wymiar (jak dla miary Hausdorffa), który będzie zawsze równy wymiarowi Hausdorffa.*

Inną ważną definicją wymiaru, szczególnie często używaną w naukach przyrodniczych (z uwagi na łatwość jego obliczenia w praktyce) jest *wymiar Minkowskiego*, inaczej pudełkowy. Definiuje się go poprzez nakrycia zbioru zbiorami (kulami, sześcianami diadycznymi itp.) tego samego rozmiaru (z dokładnością do stałej multiplikatywnej; w definicji miary Hausdorffa wymagaliśmy jedynie by ich średnica była mniejsza od ε). Stosuje się go tylko do zbiorów ograniczonych.

Oznaczmy przez $N_r(A)$ minimalną liczbę kul o średnicy r, jakich potrzeba aby nakryć zbiór A. Wtedy wymiar Minkowskiego definiuje się jako

$$\dim_M(A) = \lim \frac{\log N_r(A)}{-\log r}$$

W przypadku gdy ciąg ten nie ma granicy, używa się *górnego* i *dolnego* wymiaru Minkowskiego, tj. odpowiednio górnej i dolnej granicy powyższego ciągu. Oznacza się je $\overline{\dim}_M$ oraz $\underline{\dim}_M$.

Równoważnie można w tej definicji użyć zamiast kul sześcianów diadycznych, bądź też jakąkolwiek inną rodzinę zbiorów jednakowo regularnych F taką, że dowolny punkt $x \in \mathbb{R}^d$ należy do takiego ciągu zbiorów $E_i \in F$, że $\mathrm{diam}(E_i) \to 0$ ale $\frac{\mathrm{diam}(E_i)}{\mathrm{diam}(E_{i+1})} \geq c > 0$, c nie zależy od x.

Inną definicję otrzymuje się przez użycie zamiast liczby pokrycia $N_r(A)$ liczby upakowania $P_r(A)$. Oznacza ona liczność największego zbioru $2r$-rozdzielonego w A, tj. zbioru punktów $x_i \in A$ rozmieszczonych tak, że kule o środkach w tych punktach o promieniach równych r są rozłączne. Jak łatwo sprawdzić,

$$N_{2r}(A) \leq P_r(A) \leq N_{r/2}(A)$$

więc ta definicja wymiaru Minkowskiego jest równoważna poprzedniej.

Niech $A(r)$ będzie r-otoczeniem zbioru A. Jak łatwo sprawdzić, zachodzi następująca zależność:

$$cP_r(A)r^d \leq \mathrm{vol}(A(r)) \leq c'N_r(A)r^d$$

Pozwala nam to sformułować trzecią równoważną definicję wymiaru Minkowskiego:

$$\dim_M(A) = d + \lim_{r\to 0} \frac{\log \mathrm{vol}(A(r))}{-\log r}$$

W zastosowaniach istotniejszy jest górny wymiar Minkowskiego, nazywany także (głównie przez fizyków) *wymiarem fraktalnym*. Ciekawe jest, że można go obliczać pokrywając regularnymi zbiorami otwartymi nie sam zbiór, którego wymiar chcemy obliczać, ale jego uzupełnienie.

Niech mianowicie $A \in \mathbb{R}^d$ będzie naszym zbiorem. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że jest to zbiór zwarty (bo operacja domknięcia zbioru nie zmienia jego wymiaru Minkowskiego) oraz że jego d-wymiarowa objętość równa jest zeru (w przeciwnym razie jego wymiar wynosi d). Niech E_i będzie *pokryciem Whitney'a* [St] dla zbioru A, tj. rodziną domknięć zbiorów otwartych jednakowo regularnych, które spełniają poniższe warunki:

i) $\bigcup E_i = A^c \cap K$,

ii) $\mathrm{dist}(E_i, A) \approx \mathrm{diam}(E_i)$,

iii) wnętrza zbiorów E_i są rozłączne.

gdzie K jest kulą otwartą zawierającą A, a N dowolnie wybraną stałą. Pokrycie diadyczne nie jest w ogólności pokryciem Whitney'a, gdyż może zawierać duże sześciany w małej odległości od Λ. Jednak rozbijając takie sześciany na mniejsze można zawsze skonstruować pokrycie Whitney'a składające się z sześcianów diadycznych.

Niezależnie od wyboru pokrycia Whitney'a E, górny wymiar Minkowskiego zbioru A równy jest *wykładnikowi zbieżności* E, tj. najmniejszej takiej liczbie nieujemnej s, dla której szereg $\sum(\mathrm{diam}\, E_i)^s$ jest zbieżny, patrz [MV], [Bi]. Wynik ten (którego dowód podam w następnym rozdziale) został uogólniony przez Tricota w pracy [T2], ale tylko w przypadku dwuwymiarowym – w następnych rozdziałach podam uogólnienie nieco słabsze, ale działające w dowolnym wymiarze.

Dwie uwagi: wykładnik zbieżności rodziny zbiorów nie zmieni się jeśli skończenie wiele zbiorów usuniemy (zatem wystarczy rozpatrywać pokrycia pewnego otoczenia zbioru A, i wartość nie zależy od wyboru tego otoczenia) zaś dla zbiorów dodatniej miary wykładnik zbieżności nie musi mieć niczego wspólnego z wymiarem zbioru, np. dla pełnego sześcianu wynosi on $d-1$.

Podobnie jak w przypadku wymiaru Hausdorffa, wymiar Minkowskiego podzbioru nie jest większy od wymiaru zbioru, oraz nie zwiększa się przy odwzorowaniach Lipschitzowskich. Ponadto wymiar Minkowskiego zbioru i jego domknięcia są równe. Natomiast suma przeliczalnej rodziny zbiorów może mieć wymiar Minkowskiego większy niż supremum wymiarów składników. Można jednak zmodyfikować definicję wymiaru Minkowskiego tak, aby dla otrzymanego wymiaru stwierdzenie 2.1 zachodziło. Oznaczmy

$$\overline{\dim}_p(A) = \inf_{(A_i)}\{\sup_i \overline{\dim}_M(A_i); A = \bigcup A_i\}$$

i analogicznie

$$\underline{\dim}_p(A) = \inf_{(A_i)}\{\sup_i \underline{\dim}_M(A_i); A = \bigcup A_i\}$$

gdzie (A_i), po których infima obliczamy, są rozbiciami A na przeliczalną sumę zbiorów ograniczonych. Otrzymane wymiary nazywa się *górnym* i *dolnym wymiarem pakującym*, definicja pochodzi od Tricota [T1].

Górny wymiar pakujący można także zdefiniować analogicznie do wymiaru Hausdorffa, przy pomocy *miary pakującej*. Oznaczmy

$$P^s_\varepsilon(A) = \sup \sum \operatorname{diam}(K_i)^s$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich rozłącznych rodzinach kul o środkach w A a średnicach nie przekraczających ε. Podobnie jak w konstrukcji Carathéodory'ego, jest to funkcja malejąca ze względu na ε. Oznaczmy

$$\tilde{P}^s(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} P^s_\varepsilon(A)$$

Wyrażenie to nie jest miarą, gdyż nie musi być subaddytywne. Musimy dokonać podobnego przekształcenia, co w poprzedniej definicji wymiaru pakującego:

$$P^s(A) = \inf\{\sum \tilde{P}^s(A_i); A = \bigcup A_i\}$$

Tak zdefiniowany obiekt nazywamy s-wymiarową miarą pakującą, jest to miara (zewnętrzna) borelowska regularna. Podobnie, jak w przypadku miary Hausdorffa, dla dowolnego zbioru A istnieje taka liczba s_0, że dla większych s miara pakująca A jest zerowa, a dla mniejszych nieskończona – liczba ta jest to właśnie górny wymiar pakujący zbioru A [Ma]. Miarą i wymiarem pakującym nie będę się w tej pracy posługiwał, podałem ich definicje jedynie dla pełności przedstawienia.

Pomiędzy wyżej zdefiniowanymi wymiarami zachodzą następujące zależności ([Ma]):

Stwierdzenie 2.2.

$$\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_p(A) \leq \min(\underline{\dim}_M(A), \overline{\dim}_p(A)) \leq$$

$$\leq \max(\underline{\dim}_M(A), \overline{\dim}_p(A)) \leq \overline{\dim}_M(A)$$

Można definiować wymiary nie tylko zbiorów, ale także miar. Niech μ będzie skończoną miarą Radona o zwartym nośniku, określoną na $\mathbb{R}^d$. Wymiarem Hausdorffa miary μ nazywam infimum wymiarów Hausdorffa zbiorów pełnej miary μ. *Wymiarem korelacyjnym* miary μ nazywam supremum takich α, że wyrażenie

$$Z_\mu(\alpha) = \int\int |x-y|^{-\alpha} d\mu(x) d\mu(y)$$

jest skończone. Wymiar ten oznaczam $\dim_C(\mu)$.

Z kolei dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^d$ mogę zdefiniować *wymiar pojemnościowy* jako supremum wymiarów korelacyjnych skończonych miar Radona o zwartym nośniku zawartym w A. Wymiar ten jest nie większy od wymiaru Hausdorffa zbioru A; jeśli A jest zbiorem borelowskim to wymiary te są równe. Zatem wymiar korelacyjny miary nie przekracza wymiaru Hausdorffa jej nośnika.

Uogólnieniem wymiaru korelacyjnego oraz wymiaru Minkowskiego iest *widmo wymiarów* D_q, wprowadzone przez Grassbergera [Gr] oraz Hentschela i Proccacię [HP]. Określa się je następująco: dla dowolnie ustalonego ε pokrywamy nośnik miary sześcianami o równoległych krawędziach, o krawędziach długości ε i środkach leżących w nośniku. Oznaczmy miarę i-tej kostki przez μ_i. Widmo D_q mierzy szybkość wzrostu wyrażenia

$$I(q,\varepsilon) = \inf \sum \mu_i^q$$

gdzie infimum wzięte jest po wszystkich możliwych pokryciach. Zadane jest wzorem

$$D_q(\mu) = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log I(q,\varepsilon)}{\log \varepsilon} \tag{2.1}$$

Tak, jak dla wymiaru Minkowskiego, jeśli granica taka nie istnieje, to używa się górnej i dolnej granicy. Zauważmy, że dla $q = 0$ jest to dokładnie wymiar Minkowskiego nośnika miary μ. Z kolei wyżej zdefiniowany wymiar korelacyjny równy jest $\underline{D}_2(\mu)$, [CHY], [SY].

Wzór (2.1) może być stosowany jedynie dla q różnych od 1. Dla $q = 1$ wymiar D_1 (nazywany *wymiarem informacyjnym*) definiuje się przez przejście graniczne z q dążącym do 1. Są pewne problemy ze wzorem (2.1) dla ujemnych q związane z faktem, że wyrażenie μ_i^q może być dowolnie duże nawet dla bardzo regularnych miar – na przykład kiedy dany sześcianik jedynie zahacza brzegiem o nośnik miary – dlatego wprowadziliśmy wymaganie by środek każdego z sześcianików których miary sumujemy leżał w nośniku miary μ.

Widmo wymiarów D_q ma bardzo miłą własność monotoniczności:

Stwierdzenie 2.3. *Jeśli $q' > q$ to $D_{q'}(\mu) \leq D_q(\mu)$. To samo zachodzi dla $\underline{D}_q$ oraz $\overline{D}_q$.*

Dowód. Wyrażenie $I(q, \varepsilon)$ możemy zapisać jako całkę z funkcji μ_i^{q-1} po mierze dyskretnej $\nu(i) = \mu_i$. Tezę wystarczy pokazać dla probabilistycznej miary ν, gdyż wymiar $D_q(\mu)$ nie ulegnie zmianie jeśli miarę pomnożymy przez stałą.

Wykażemy, że dla dowolnej probabilistycznej miary ν i dla dowolnej dodatniej, ograniczonej i oddzielonej od zera funkcji f funkcja

$$h(q) = \frac{1}{q} \log(\int f^q d\nu)$$

(określona dla $q \neq 0$) jest niemalejąca – to już będzie implikowało monotoniczność D_q.

Nierówność $h'(q) \geq 0$ przekształca się do postaci

$$(\int g) \log (\int g) \leq \int g \log g$$

gdzie $g = f^q$. Nierówność ta jest zawsze spełniona z wypukłości funkcji $x \log x$ dla dodatnich x.

Musimy więc jeszcze pokazać, że dla dowolnego dodatniego q funkcja h ma nie mniejszą wartość niż dla dowolnego ujemnego q. Wystarczy udowodnić (dla wszystkich dodatnich q) nierówność

$$\int f^q \cdot \int f^{-q} \geq 1$$

która jednak natychmiast wynika z nierówności Schwarza jako że miara ν jest probabilistyczna.

Można także pokazać (rozpisując w szereg funkcję $f^q = e^{q \log f}$, a następnie funkcję $\log(\int f^q) = \log(1 + (\int f^q - 1))$), że dla małych q

$$h(q) = \int \log f + \frac{1}{2} q(\int \log^2 f - (\int \log f)^2) + O(q^2)$$

$\square$

Wymiar D_q w ogólnym przypadku zależy od q, jednak dla miar *geometrycznych* (tj. jeśli $\mu(K_r(x)) \approx r^s$ dla pewnego s dla każdego x należącego do nośnika miary μ) jest równe s dla wszystkich q.

Oprócz wymiarów dotyczących całego zbioru lub całej miary można także rozważać wymiary lokalne.

Lokalnym wymiarem Hausdorffa zbioru A w punkcie x nazywamy granicę przy r dążącym do zera wymiaru Hausdorffa przecięcia zbioru A z kulą o środku x i promieniu r.

Z kolei *lokalnym wymiarem* miary μ w punkcie x nazywamy granicę

$$\dim_{loc}(\mu)(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\log \mu(K_r(x))}{\log r}$$

Granica ta nie musi istnieć w każdym punkcie, używamy wtedy granicy górnej i dolnej.

Zachodzą bardzo ważne związki wymiaru lokalnego z 'globalnym':

Stwierdzenie 2.4. *Niech $A \subset \mathbb{R}^d$ będzie niepustym zbiorem borelowskim, a μ miarą skończoną.*

i) Jeśli $\underline{\dim}_{loc}(\mu)(x) \geq s \forall x \in A$ oraz $\mu(A) > 0$ to $\dim_H(A) \geq s$,

ii) Jeśli $\underline{\dim}_{loc}(\mu)(x) \leq s \forall x \in A$ to $\dim_H(A) \leq s$,

iii) Jeśli $\overline{\dim}_{loc}(\mu)(x) \geq s \forall x \in A$ oraz $\mu(A) > 0$ to $\dim_p(A) \geq s$,

iv) Jeśli $\overline{\dim}_{loc}(\mu)(x) \leq s \forall x \in A$ to $\dim_p(A) \leq s$.

Stwierdzenie 2.5. *Niech A będzie niepustym zbiorem borelowskim.*

i) Jeśli $\dim_H(A) > s$ to $\exists \mu, 0 < \mu(A) < \infty, \underline{\dim}_{loc}(\mu)(x) \geq s$ μ-pw.,

ii) Jeśli $\dim_H(A) < s$ to $\exists \mu, 0 < \mu(\overline{A}) < \infty, \underline{\dim}_{loc}(\mu)(x) \leq s\ \forall x \in A$,

iii) Jeśli $\dim_p(A) > s$ to $\exists \mu, 0 < \mu(A) < \infty, \overline{\dim}_{loc}(\mu)(x) \geq s$ $\mu-$pw.,

iv) Jeśli $\dim_p(A) < s$ to $\exists \mu, 0 < \mu(\overline{A}) < \infty, \overline{\dim}_{loc}(\mu)(x) \leq s\ \forall x \in A$.

Punkt i) stwierdzenia 2.5 nazywa się zwykle lematem Frostmana, czasem rozszerza się tę nazwę na punkty i) oraz ii) obu stwierdzeń, a czasem nawet na pełne ich sformułowania (chociaż oryginalna praca Frostmana [Fr] ukazała się na 47 lat przed podaniem przez Tricota definicji wymiaru pakującego w [T1]). Ja będę określał tą nazwą prosty wniosek ze stwierdzenia 2.4: jeśli zbiór A jest nośnikiem skończonej miary której lokalny wymiar równy jest s

w każdym punkcie $x \in A$ (np. miary geometrycznej) to zbiór A ma wymiary Hausdorffa oraz pakujący równe s.

Oprócz wymienionych powyżej jest jeszcze wiele innych definicji wymiarów, używanych w matematyce jak też naukach przyrodniczych. Więcej na ten temat można znaleźć w książce Pesina [Pe].

2.3 Formalizm termodynamiczny

Na zakończenie chciałbym przytoczyć za [Bo1] podstawowe fakty z formalizmu termodynamicznego. Nazwa ta określa dosyć wyspecjalizowaną ale bardzo użyteczną teorię dotyczącą istnienia i własności pewnych miar na przestrzeniach symbolicznych, jest ona bardzo często stosowana w układach dynamicznych.

Niech $\Sigma = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$ będzie przestrzenią, składającą się z nieskończonych ciągów symboli $1, \dots, k$. Zadajemy na niej topologię Tichonowa (przyjmując na $\{1, \dots, k\}$ topologię dyskretną). Na przestrzeni Σ możemy również zadać metrykę zgodną z tą topologią. Niech mianowicie odległość między ciągami $x = (x_i)$ oraz $y = (y_i)$ wynosi

$$d(x, y) = a^{\sup\{n;\ x_i = y_i \forall i < n\}}$$

gdzie a jest dowolną liczbą mniejszą od 1. Zbiory wszystkich możliwych ciągów, których pierwszych n symboli jest takie same (tj. których odległość od jakiegoś ciągu nie przekracza a^n) będę nazywał *cylindrami n-tego rzędu.*

Niech A będzie macierzą zero-jedynkową rozmiaru $k \times k$, przy czym A^M będzie macierzą ściśle dodatnią dla pewnego M (macierze takie nazywamy *tranzytywnymi*). Przez Σ_A oznaczamy podzbiór Σ złożony z tych ciągów (x_i), dla których $A_{x_i x_{i+1}} = 1$ dla każdego i. Na Σ_A przenosimy topologię, metrykę i podział na cylindry z Σ.

Na Σ określam odwzorowanie *lewostronnego przesunięcia* σ, zadane następująco:

$$(\sigma x)_i = x_{i+1}$$

Jak łatwo sprawdzić, Σ_A jest zachowywana przez to odwzorowanie. Lewostronne przesunięcie zadaje na Σ, jak również na Σ_A (o ile macierz A jest tranzytywna) układ topologicznie mieszający, tj. dla dowolnych dwu zbiorów otwartych U, V

$$\exists N\ \forall n > N \quad \sigma^n U \cap V \neq \emptyset$$

Niech ϕ będzie ciągłą funkcją z Σ_A w $\mathbb{R}$. Oznaczam

$$\operatorname{var}_n \phi = \sup\{|\phi(x) - \phi(y)|; d(x, y) \leq a^n\}$$

Funkcja ϕ jest hölderowska wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{var}_n\,\phi \leq cb^n$ dla pewnych $b < 1$ oraz c. Zachodzi bardzo ważne twierdzenie ([Si], [Bo1])

Twierdzenie 2.6. *Niech ϕ będzie funkcją hölderowską na Σ_A. Wtedy istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna μ określona na Σ_A (tzw. miara Gibbsa), dla której można znaleźć stałe c_1, c_2, P takie, że*

$$c_1 \leq \frac{\mu\{y; d(x,y) \leq a^n\}}{\exp(-Pn + \sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i x))} \leq c_2 \quad \forall x \in \Sigma_A \ \forall n$$

Stałą P nazywa się *ciśnieniem*. Można ją wyliczyć w sposób efektywny, potrzebuję do tego jednak kilku oznaczeń. Niech

$$S_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}\phi = \sup\{\sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i x); x \in \Sigma_A, x_i = a_i \ \forall i < n\}$$

będzie maksymalną wartością sumy, występującej w definicji miary Gibbsa, jeśli x należy do cylindra zadanego przez pierwszych n symboli, równych a_i. Zamiast supremum moglibyśmy wziąć infimum; ponieważ funkcja ϕ jest hölderowska, będą się one różnić co najwyżej o stałą niezależną od n.

Sumując po wszystkich możliwych cylindrach otrzymujemy

$$Z_n(\phi) = \sum_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}} \exp(S_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}\phi).$$

Teraz ciśnienie można obliczyć z wzoru

$$P(\phi) = \lim \frac{1}{n} \log Z_n(\phi).$$

3 Uogólnione pokrycia Whitney'a

3.1 Wstęp

W tym rozdziale będziemy używać następujących oznaczeń: Λ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$ miary zero, $E = (E_i)$ jest pokryciem części uzupełnienia zbioru Λ leżącej blisko Λ domknięciami rozłącznych zbiorów jednakowo regularnych, których średnice są nie mniejsze niż odległość od zbioru Λ pomnożona przez ustaloną stałą, s_E jest wykładnikiem zbieżności rodziny E (tj. ciągu średnic zbiorów E_i).

Ponieważ wykładnik zbieżności zależy jedynie od zbiorów E_i położonych blisko Λ, bez zmniejszania ogólności możemy z E usunąć wszystkie zbiory o średnicach większych od 1. Jeżeli średnice każdego ze zbiorów E_i nie przekraczają ich odległości od Λ pomnożonej przez ustaloną stałą, to rodzinę E będziemy nazywać *pokryciem Whitney'a* dla zbioru Λ, w przeciwnym wypadku nazywamy ją *uogólnionym* pokryciem Whitney'a.

Zwróćmy uwagę, że szereg d-tych potęg średnic zbiorów E_i jest równy (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) sumie ich objętości – a więc skończony. Równocześnie zbiorów tych jest nieskończenie wiele, więc szereg zerowych potęg ich średnic jest rozbieżny. Zatem wykładnik zbieżności s_E jest dobrze określoną liczbą, leżącą między 0 a d, włącznie.

Oznaczmy przez K_n sumę mnogościową wszystkich zbiorów E_i o średnicach mniejszych od 2^{-n} oraz zbioru Λ – jest to domknięte otoczenie Λ, gdyż jest jedynie skończenie wiele dużych zbiorów w rodzinie (E_i). Możemy teraz oszacować

$$\sum |E_i|^t \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{vol}(K_n \setminus K_{n+1})}{2^{-nd}} 2^{-nt}$$

Ponieważ objętość zbiorów K_n zbiega monotonicznie do zera, szereg ten można zapisać następująco:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{vol}\, K_n - \mathrm{vol}\, K_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}(2^{n(d-t)} - 2^{(n-1)(d-t)})(\mathrm{vol}\, K_m - \mathrm{vol}\, K_{m+1}) =$$

$$= \mathrm{vol}\, K_0 + (1 - 2^{t-d}) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(d-t)}\, \mathrm{vol}\, K_n$$

Stąd

$$s_E = d + \limsup \frac{1}{n} \log_2(\mathrm{vol}\, K_n) \tag{3.1}$$

Niech L_n oznacza δ_n-otoczenie Λ, gdzie $\delta_n = \delta \cdot 2^{-n}$, a stała δ zostanie wybrana później. Niezależnie od jej wartości, zachodzi następujący wzór (który jest prostym przekształceniem definicji górnego wymiaru Minkowskiego):

$$\overline{\dim}_M(\Lambda) = d + \limsup \frac{1}{n} \log_2(\operatorname{vol} L_n) \tag{3.2}$$

Zauważmy, że jeśli wybierzemy δ odpowiednio duże, to $K_n \subset L_n$. Na odwrót, jeżeli E jest pokryciem Whitney'a to dla odpowiednio małego δ $L_n \subset K_n$. Udowodniliśmy w ten sposób następujący fakt (zapowiedziany w poprzednim rozdziale):

Stwierdzenie 3.1.

$$s_E \leq \overline{\dim}_M(\Lambda)$$

Jeżeli E jest pokryciem Whitney'a, to zachodzi równość.

Naszym celem w tym rozdziale jest udowodnienie tej równości (przy pewnych dodatkowych założeniach) w przypadku uogólnionych pokryć Whitney'a. W przypadku dwuwymiarowym zrobił to już Tricot w [T2], przy tym w nieco ogólniejszym przypadku (dopuszczając ograniczone przecięcia zbiorów E_i). Moje rezultaty są słabsze, ale działają w dowolnym wymiarze.

Dodatkowe założenia (na kształt zbiorów E_i i/lub ich położenie w przestrzeni) są konieczne, gdyż w pełnej ogólności wynik taki jest nieprawdziwy, podam kontrprzykłady.

Zauważmy, że stwierdzenie 3.1 pozostaje prawdziwe jeśli dopuścić ograniczone przecięcia zbiorów E_i (tj. gdy każdy punkt $x \in \Lambda^c$ należy do co najwyżej M zbiorów E_i). W tym wypadku dowód można przepisać właściwie bez zmian, jedynie zbiory K_n trzeba liczyć z krotnościami (za objętość takiego zbioru przyjmując sumę objętości jego składników).

Jako motywację do stawiania sobie pytania o wartość wykładnika zbieżności dla uogólnionego pokrycia Whitney'a chciałbym przytoczyć następujący fakt (mimo jego prostoty nie znalazłem go w literaturze):

Stwierdzenie 3.2. *Wykładnik zbież- ności dla pokrycia diadycznego uzupełnienia zwartego zbioru Λ d-wymiarowej objętości zero równy jest górnemu wymiarowi Minkowskiego zbioru Λ.*

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności zbiór Λ jest zawarty w otwartej kostce jednostkowej $I = (0,1)^d$, a pokrycie diadyczne jego uzupełnienia wybieram tak, by jego suma mnogościowa była równa $\overline{I} \setminus \Lambda$. Będę je oznaczać przez

E. Przypominam, że przez pokrycie diadyczne rozumiem pokrycie maksymalnymi możliwymi sześcianami diadycznymi.

Przez $D(n)$ będę oznaczał liczbę sześcianów diadycznych o boku 2^{-n}, należących do E. Przez $A(n)$ będę oznaczał liczbę sześcianów diadycznych o krawędzi 2^{-n}, przecinających Λ (sześciany te nie należą naturalnie do pokrycia E!). Będziemy także oznaczać $G_t(n) = A(n) \cdot 2^{-nt}$. Zachodzi równość:

$$D(n+1) = 2^d A(n) - A(n+1)$$

Faktycznie, sześcian diadyczny należy do pokrycia diadycznego wtedy i tylko wtedy gdy jego 'rodzic' (tj. najmniejszy sześcian diadyczny, który go zawiera) przecina Λ, ale on sam już nie.

Z definicji górnego wymiaru Minkowskiego zachodzą następujące własności:

$$\forall t > \overline{\dim}_M(\Lambda) \quad A(n) < c(t) \cdot 2^{nt}$$

$$\forall t < \overline{\dim}_M(\Lambda) \exists (n_i)_1^\infty \quad A(n_i) > c(t) \cdot 2^{nt}$$

Przyjrzyjmy się szeregowi

$$B(t) = \sum_{i=1}^{\infty} D(i) \cdot 2^{-it} = \sum_{i=1}^{\infty} [2^{d-t} G_t(i-1) - G_t(i)]$$

Dla dowodu stwierdzenia potrzebujemy wykazać, że szereg ten jest zbieżny dla $t > \overline{\dim}_M(\Lambda)$ a rozbieżny dla $t < \overline{\dim}_M(\Lambda)$. Pierwsza część jest łatwa – kiedy $t > \overline{\dim}_M(\Lambda)$, szereg $\sum G_t(i)$ jest zbieżny, więc szereg $B(t)$ także. Niech dalej $t < \overline{\dim}_M(\Lambda)$.

Istnieje teraz ciąg (n_i) liczb naturalnych taki, że $G_t(n_i) > 1$ (a nawet $G_t(n_i) \nearrow \infty$). Ciąg $G_d(n)$ zbiega do objętości zbioru Λ (czyli do zera), gdyż jego kolejne wyrazy równe są łącznej objętości sześcianów diadycznych o krawędzi 2^{-n}, przecinających Λ. Ciąg ten jest przy tym monotoniczny. Bez zmniejszenia ogólności (wybierając podciąg, jeśli trzeba) możemy założyć, że $G_d(n_{i+1}) \leq \frac{1}{2} G_d(n_i)$.

$$B(t) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} D(k) \cdot 2^{-kt} =: \sum_{i=1}^{\infty} B_i(t)$$

Aby oszacować $B_i(t)$ przyjrzyjmy się $G_d(n_i)$:

$$G_d(n_i) - G_d(n_{i+1}) = \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} D(k) \cdot 2^{-kd} \leq 2^{-(n_i+1)(d-t)} B_i(t)$$

Równocześnie

$$G_d(n_i) - G_d(n_{i+1}) \geq \frac{1}{2} G_d(n_i) = 2^{-n_i(d-t)-1} G_t(n_i)$$

Stąd

$$B_i(t) \geq 2^{d-t-1} G_t(n_i) > 2^{d-t-1}$$

a więc szereg $B(t)$ jest rozbieżny. $\square$

Odtąd rodzina $E = (E_i)$ będzie zawsze oznaczać uogólnione pokrycie Whitney'a zbioru Λ, a δ będzie bardzo małą stałą.

3.2 Pokrycia sześcianami

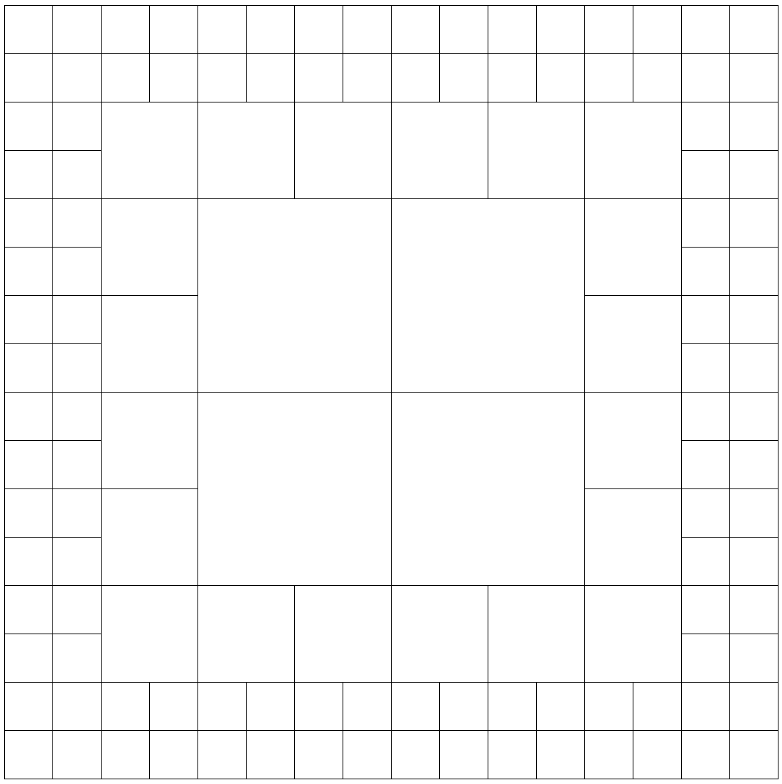
W tym podrozdziale rozważymy przypadek szczególny – kiedy rodzina E składa się z d-wymiarowych sześcianów, jednakowo zorientowanych w przestrzeni (tj. każda krawędź jednego z nich ma być równoległa do pewnych krawędzi wszystkich pozostałych). Przypadkiem ogólniejszym zajmiemy się w następnych podrozdziałach. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że krawędzie sześcianów E_i są równoległe do osi układu współrzędnych.

Zacznijmy od prostego faktu, którego dowód będzie dla nas punktem wyjścia w przyszłości.

Stwierdzenie 3.3. *Jeżeli* $\overline{\dim}_M(\Lambda) > d-1$ *to* $s_E = \overline{\dim}_M(\Lambda)$.

Dowód. Przypominam, że Λ ma zerową objętość – w przeciwnym przypadku nie jest to prawda!

Skonstruujmy nową rodzinę E' przy pomocy następującej procedury. Weźmy dowolny sześcian $E_i \in E$. W pierwszym kroku rozbijmy go na 2^d sześcianików o dwa razy mniejszym boku. W drugim kroku rozbijmy każdy z nich jeszcze raz. W trzecim (i wszystkich następnych) rozbijać będziemy nie wszystkie sześcianiki, jakie mamy aktualnie do dyspozycji, ale tylko te z nich, które dotykają brzegu wyjściowego sześcianu E_i. W ten sposób zamiast sześcianu E_i otrzymujemy jego rozbicie na nieskończenie wiele sześcianików, zob. rysunek 1. Tak samo postępujemy ze wszystkimi pozostałymi sześcianami $E_j \in E$. Naszą rodziną E' będą właśnie wszystkie mniejsze sześcianiki, na które rozbiliśmy sześciany z rodziny E.



Rysunek 1: Rozbicie E'_k – czwarty krok konstrukcji

Jak widać, rodzina ta jest pokryciem Whitney'a dla zbioru większego od Λ (dokładnie dla sumy mnogościowej zbioru Λ i brzegów wszystkich sześcianów $E_i \in E$; jest to w dalszym ciągu zbiór zwarty o zerowej d-wymiarowej objętości). Oznaczmy ten zbiór przez Λ'. Mamy

$$s_{E'} = \overline{\dim}_M(\Lambda') \geq \overline{\dim}_M(\Lambda) \geq s_E \tag{3.3}$$

Ostatnia nierówność i pierwsza równość pochodzą ze stwierdzenia 3.1.

Przyjrzyjmy się teraz temu, na jakie sześcianiki został rozbity sześcian E_i. Jak łatwo sprawdzić, sześcianików o krawędzi $2^{-n}|E_i|$ będzie co najwyżej $c \cdot 2^{n(d-1)}$. Zatem

$$\sum_{E'_j \subset E_i} |E'_j| \leq \sum_n c2^{n(d-1)}(2^{-n}|E_i|)^t = c(t)|E_i|^t$$

Równocześnie,

$$\sum_{E'_j \subset E_i} |E'_j|^d = |E_i|^d$$

Zatem dla wszystkich $t \leq d$

$$\sum_{E'_j \subset E_i} (\frac{|E'_j|}{|E_i|})^t \geq 1$$

Ostatecznie, dla dowolnego $t \in (d-1, d]$ zachodzi nierówność

$$|E_i|^t \leq \sum_{E'_j \subset E_i} |E'_j|^t \leq c(t)|E_i|^t \tag{3.4}$$

Z nierówności (3.4) wynika, że szeregi $\sum_{E_i \in E} |E_i|^t$ oraz $\sum_{E'_i \in E'} |E'_i|^t$ są dla $t \in (d-1, d]$ albo oba zbieżne, albo oba rozbieżne. Z założenia do tego przedziału należy s'_E, co (z definicji wykładnika zbieżności) oznacza, że szereg $\sum_{E'_j \subset E_i \in E} |E'_j|^t$ jest zbieżny dla $t > s'_E$ i rozbieżny dla $t < s'_E$. Ponieważ tak samo musi być dla szeregu $\sum_{E_i \in E} |E_i|^t$, więc $s_E = s_{E'}$, co razem z (3.3) daje tezę. □

Stwierdzenie to można jeszcze troszkę wzmocnić:

Stwierdzenie 3.4. *Jeśli rzut zbioru Λ na jakąś $(d-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę ma dodatnią $(d-1)$-wymiarową objętość (w szczególności jeśli zbiór Λ rozcina przestrzeń $\mathbb{R}^d$) to $s_E = \overline{\dim}_M(\Lambda)$.*

Dowód. Górny wymiar Minkowskiego zbioru Λ nie może być mniejszy od $d-1$, gdyż rzutowanie nigdy nie zwiększa wymiaru. Możemy więc przyjąć, że wymiar ten wynosi $d-1$, gdyż w przeciwnym przypadku teza wynika ze stwierdzenia 3.3.

Oznaczmy przez Π nasze rzutowanie na hiperpłaszczyznę p. Możemy wypisać oszacowanie

$$\mathrm{vol}_{d-1}(\Pi(E_i)) \approx |E_i|^{d-1}$$

Stąd

$$\sum_{E_i \in E} |E_i|^{d-1} \approx \sum_{E_i} \mathrm{vol}_{d-1}(\Pi(E_i)) = \int_p n(x) dx^{d-1}$$

gdzie $n(x)$ jest to liczba sześcianów E_i, których rzuty zawierają punkt x. Oczywiście, liczba ta jest nieskończona dla każdego $x \in \Pi(\Lambda)$, który to zbiór ma dodatnią objętość, więc całka po prawej stronie jest rozbieżna. Wynika stąd, że $s_E \geq d-1$. Jednak s_E nie może być ostro większe od górnego wymiaru Minkowskiego zbioru Λ (tj. od $d-1$) ze względu na stwierdzenie 3.1, co kończy dowód. □

Wyniki powyższe (jak to będzie widać w kolejnych podrozdziałach) nie są ściśle związane z kształtem zbiorów tworzących uogólnione pokrycie Whitney'a, ich dowody można przystosować do ogólniejszych założeń.

Przypomnijmy wzór (3.2). Niech n_j będzie tak wybranym ciągiem liczb naturalnych, aby można było dla niego zastąpić granicę górną przez granicę:

$$\overline{\dim}_M(\Lambda) = d + \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \log_2(\operatorname{vol} L_{n_j}) \tag{3.5}$$

Poniższy lemat jest trywialnym wnioskiem z tw Besicovitch'a (twierdzenie 2.7. w [Ma]), ale można go również (bardzo prosto) pokazać bezpośrednio.

Lemat 3.5. *Dla dowolnego n maksymalny zbiór punktów z Λ, których δ_n-otoczenia są rozłączne, ma mniej więcej (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) $2^{nd} \operatorname{vol} L_n$ elementów.*

Dowód. Przypooominam, że $\delta_n = \delta \cdot 2^{-n}$ a δ jest małą stałą. Wybierzmy dowolny punkt x_1 z Λ, niech K_1 będzie kulą o środku w x_1 i promieniu $3\delta_n$. Niech teraz y_2 będzie dowolnym punktem z $L_n \setminus K_1$. Wybierzmy dowolny punkt $x_2 \in \Lambda$, leżący nie dalej niż o δ_n od y_2 (punkt taki musi istnieć, gdyż L_n jest δ_n-otoczeniem Λ). Punkt x_1 leży w odległości większej niż $3\delta_n$ od y_2, więc także dalej niż o $2\delta_n$ od x_2, więc ich δ_n-otoczenia są rozłączne. Niech K_2 będzie kulą o środku x_2 i promieniu $3\delta_n$. W kolejnym kroku szukamy punktu y_3 leżącego w $L_n \setminus (K_1 \cup K_2)$ i pobliskiego punktu $x_3 \in \Lambda$ itd. Dopóki kule K_i nie pokryją zbioru L_n (a więc przez co najmniej $\operatorname{vol}(L_n)/(c \cdot \delta_n^d)$ kroków) procedurę możemy kontynuować. Wszystkie wybierane punkty x_i są w odległości co najmniej $2\delta_n$ od siebie, więc spełniają założenia lematu.

Z drugiej strony jeśli δ_n-otoczenia danej rodziny punktów są rozłączne, to rodzina ta nie może mieć więcej niż $\operatorname{vol} L_n/(c\cdot \delta_n^d)$ elementów, gdyż otoczenia te (o objętości $c \cdot \delta_n^d$) zawarte są w L_n. □

Taki zbiór punktów będę oznaczał M_n. Jeśli $x \in M_n$, to przez $B_n(x)$ będę oznaczał sześcian o środku w x a średnicy równej δ_n, o krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych. Definicji tych będę używał dla $n = n_j$.

Przejdziemy teraz do dowodu naszego zasadniczego wyniku w tym podrozdziale:

Twierdzenie 3.6. *Dla dowolnego zwartego zbioru Λ o zerowej d-wymiarowej objętości i dowolnie wybranego jego uogólnionego pokrycia Whitney'a E, składającego się z sześcianów o krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych, górny wymiar Minkowskiego zbioru Λ równy jest wykładnikowi zbieżności dla rodziny E.*

Dowód. Dowód będzie uogólnieniem dowodu stwierdzenia 3.3. Oznaczmy przez l największą liczbę całkowitą ściśle mniejszą od górnego wymiaru Minkowskiego zbioru Λ. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $l \geq 0$, gdyż w przeciwnym przypadku (gdy $l = -1, \overline{\dim}_M(\Lambda) = 0$) tezę otrzymujemy ze stwierdzenia 3.1 i nieujemności wykładnika zbieżności.

W dowodzie twierdzenia 3.6 kluczowy jest następujący lemat:

Lemat 3.7. *Jeżeli wykładnik zbieżności rodziny E nie jest równy (tj. jest ściśle mniejszy od – stwierdzenie 3.1) górnemu wymiarowi Minkowskiego zbioru Λ, to istnieje stała C taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dla odpowiednio dużego n_j co najmniej połowa spośród zbiorów $B_{n_j}(x) \cap K_{n_j}$ ma objętość mniejszą niż $\varepsilon\delta^d_{n_j}$ ale zawiera w swoim wnętrzu $(l+1)$-wymiarowy sześcian $D(x)$ o boku $C \cdot \delta_{n_j}$ położony daleko (co najmniej o $C \cdot \delta_{n_j}$) od brzegu sześcianu $B_{n_j}(x)$.*

Zanim przystąpię do dowodu tego lematu, pokaże jak wynika z niego teza twierdzenia. Będę zakładał nie wprost, że mam rodzinę E, która jest uogólnionym pokryciem Whitney'a dla Λ, ale której wykładnik zbieżności jest mniejszy od górnego wymiaru Minkowskiego zbioru Λ. Mogę wtedy korzystać z powyższego lematu w pozytywny sposób.

Wnętrze zbioru $B_{n_j}(x) \cap K_{n_j}$ jest naturalnie zbiorem otwartym. Jeśli zawiera ono $(l+1)$-wymiarowy sześcian, to zawiera też pewien d-wymiarowy prostopadłościan, którego jedną ze ścian jest ten właśnie sześcian. Oznaczmy ten prostopadłościan przez $D'(x)$. Zawiera się on w K_{n_j}, więc jest cały (za wyjątkiem swojego przecięcia z Λ, które ma miarę zero) pokryty sześcianami $E_i \in E$ o krawędziach nie większych od 2^{-n_j}. Wybierzmy ε małe w porównaniu z C^d, wtedy ich krawędzie nie mogą przekroczyć $\varepsilon^{1/d}\delta_{n_j}$ oraz muszą one leżeć w $B_{n_j}(x)$ (gdyż objętość ich części zawartej w $B_{n_j}(x) \cap K_{n_j}$ nie może przekroczyć $\varepsilon\delta^d_{n_j}$, a dla tak małego ε nie mogą sięgać aż do brzegu – objętość ich części zawartej w $B_{n_j}(x) \cap K_{n_j}$ musiałaby wtedy przekroczyć $C^d\delta^d_{n_j}$).

Ponieważ sześciany te pokrywają całą objętość $D'(x)$, ich rzuty na $D(x)$ muszą także pokrywać całą jego $(l+1)$-wymiarową powierzchnię. Dla $t < l+1$ stosunek wyrażenia $|E_i|^t$ do $(l+1)$-wymiarowej objętości rzutu E_i na $D(x)$ (która z dokładnością do stałej multiplikatywnej równa jest $|E_i|^{l+1}$) jest najmniejszy wtedy, gdy krawędź sześcianu E_i jest największa możliwa. Zatem suma t-tych potęg długości krawędzi sześcianów $E_i \subset B_{n_j}(x)$ szacuje się następująco:

$$\sum_{E_i \subset B_{n_j}(x)} |E_i|^t \geq \mathrm{vol}_{l+1}(D(x)) \inf \frac{|E_i|^t}{\mathrm{vol}_{l+1}(\Pi(E_i))} \approx C^{l+1}\delta^{l+1}_{n_j}(\varepsilon^{1/d}\delta_{n_j})^{t-l-1} = c(t,\varepsilon)\delta^t_{n_j}$$

Jest to jedynie suma w jednej z kul $B_{n_j}(x)$. Aby oszacować z dołu pełną sumę, trzeba pomnożyć ją przez liczbę takich (rozłącznych) kul, spełniających tezę lematu 3.7, czyli przez $\frac{1}{2}\sharp M_{n_j}$.

Ustalmy $\varepsilon' > 0$. Z definicji ciągu n_j oraz z lematu 3.5 możemy napisać

$$\sharp M_{n_j} \geq c(\varepsilon') \cdot \delta_{n_j}^{-\overline{\dim}_M(\Lambda)+\varepsilon'}$$

Wybierzmy

$$t = \overline{\dim}_M(\Lambda) - 2\varepsilon'$$

Jest to liczba mniejsza od $l + 1$, więc powyższe wzory dla niej działają. Po podstawieniu otrzymujemy oszacowanie

$$\sum_{E_i \in E} |E_i|^t \geq c(\varepsilon, \varepsilon') \cdot \delta_{n_j}^{-\varepsilon'}$$

W lemacie 3.7 możemy wziąć dowolnie duże n_j, zatem prawa strona tego oszacowania może być dowolnie duża. Stąd dla wybranego t szereg $\sum |E_i|^t$ musi być rozbieżny, zatem $s_E \geq \overline{\dim}_M(\Lambda) - 2\varepsilon'$. Ponieważ wzór ten musi zachodzić dla dowolnie małego ε', dochodzimy do sprzeczności z założeniem że wykładnik zbieżności jest mniejszy od górnego wymiaru Minkowskiego zbioru Λ, co kończy dowód twierdzenia. □

Pozostaje nam udowodnić lemat 3.7. Tak, jak w dowodzie powyższego twierdzenia, będziemy od razu zakładać że mamy uogólnione pokrycie Whitney'a sześcianami którego wykładnik zbieżności jest ostro mniejszy od górnego wymiaru Minkowskiego Λ, i będziemy się starać znaleźć dodatkowe własności, jakie pokrycie to musiałoby spełniać.

Ze stwierdzenia 3.3 natychmiast otrzymujemy nierówność $l \leq d-2$. Przypomnijmy wzory (3.1) oraz (3.5). Przypuśćmy, że dla nieskończenie wielu n_j zachodzi oszacowanie na następujący stosunek:

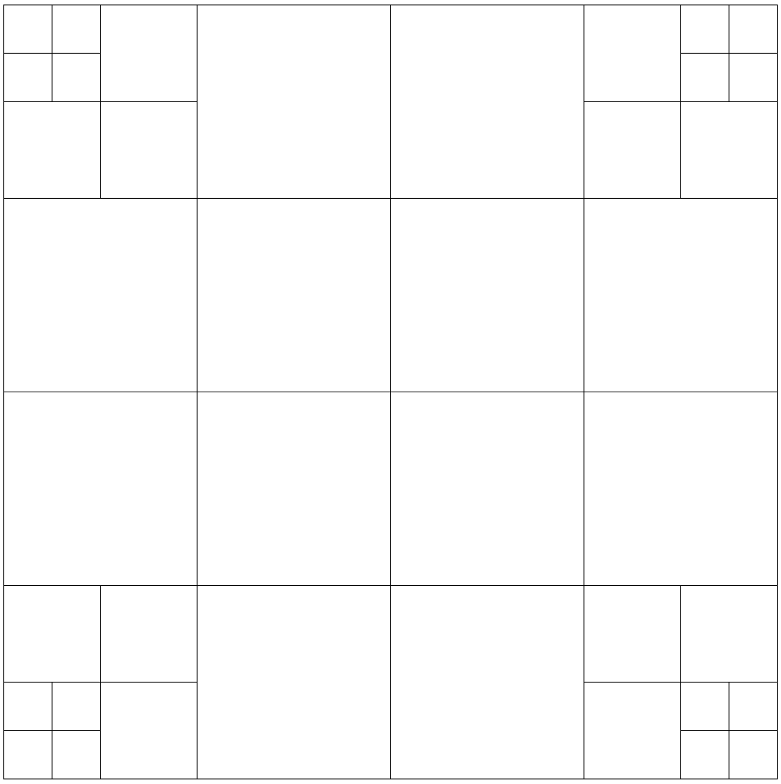
$$\frac{\operatorname{vol}(K_{n_j} \cap L_{n_j})}{\operatorname{vol} L_{n_j}} \geq c > 0 \tag{3.6}$$

Wtedy objętość zbioru K_{n_j} byłaby co najmniej porównywalna z objętością zbioru L_{n_j}, zatem wykładnik zbieżności s_E byłby nie mniejszy od $\overline{\dim}_M(\Lambda)$, wbrew założeniu. Dalej będziemy więc zakładać, że wyrażenie po lewej stronie powyższej nierówności zbiega do zera gdy n_j zbiega do nieskończoności. Można to ująć następująco: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dla odpowiednio dużych n_j nierówność

$$\frac{\operatorname{vol}(B_{n_j}(x) \cap K_{n_j})}{\operatorname{vol} B_{n_j}(x)} < \varepsilon \tag{3.7}$$

zachodzi dla co najmniej połowy punktów z M_{n_j}. Faktycznie, zbiór $\bigcup B_{n_j}(x)$ pokrywa ograniczoną z dołu część objętości L_{n_j}. Gdyby dla więcej niż połowy punktów nierówność nie zachodziła, to wyrażenie po lewej stronie nierówności (3.6) szacowałoby się z dołu przez ε razy jakaś stała, co dla odpowiednio dużych n_j nie może zachodzić.

Przeprowadzimy teraz konstrukcję nowej rodziny E', podobną jak w dowodzie stwierdzenia 3.3 (dokładniej: tamta konstrukcja była szczególnym przypadkiem niżej podanej dla $l = d - 1$). Weźmy dowolny sześcian $E_i \in E$. W pierwszych dwu krokach, tak jak uprzednio, podzielimy go na 4^d sześcianików o cztery razy mniejszych krawędziach. W trzecim kroku (i wszystkich następnych) będziemy dzielić (na 2^d mniejszych sześcianików) tylko te z sześcianików, które dotykają jednej z l-wymiarowych ścian wyjściowego sześcianu E_i. Otrzymamy w rezultacie pewne (inne niż poprzednio) rozbicie E_i na nieskończenie wiele mniejszych sześcianików, zob. rysunek 2, które następnie powtarzamy dla pozostałych $E_j \in E$. Nowe pokrycie będę oznaczał E', a jego elementy E'_i.



Rysunek 2: Rozbicie E'_k dla $l = 0$, czwarty krok konstrukcji

Zauważmy, że w wyniku rozbicia sześcianu E_i dostaliśmy nie więcej niż $c \cdot 2^{ln}$ sześcianików o krawędzi $2^{-n} \cdot |E_i|$ – można to policzyć ale można także zauważyć, że skonstruowaliśmy (wewnątrz E_i) pokrycie Whitney'a sumy mnogościowej wszystkich l-wymiarowych ścian E_i.

Zatem, podobnie jak w dowodzie stwierdzenia 3.3, wykładniki zbieżności pokryć E oraz E' są równe o ile $s_{E'} > l$. W szczególności, otrzymane rozbicie ma zawsze wykładnik zbieżności mniejszy od górnego wymiaru Minkowskiego zbioru Λ.

Rozumując tak, jak powyżej, możemy pokazać nierówność (3.7) dla nowego pokrycia E' (tj. używając zbioru K'_{n_j}, zdefiniowanego podobnie do K_{n_j} ale z E' w miejscu E) dla co najmniej połowy punktów z M_{n_j} dla wszystkich odpowiednio dużych n_j.

Zastanówmy się nad konsekwencjami tej nierówności dla wyjściowej rodziny E. Dla wielu punktów $x \in M_{n_j}$ sześcian $B_{n_j}(x)$ (o krawędzi mniejszej od δ_{n_j}) jest prawie w całości pokryty przez $(K'_{n_j})^c$ (czyli przez sześciany E'_k o długości krawędzi większej od 2^{-n_j}). Każdy z tych sześcianów należy do jakiegoś sześcianu E_i z wyjściowego pokrycia E. Ale jeśli dany sześcianik E'_k leży w E_i, to leży w odległości co najmniej $|E'_k|$ od każdej z jego l-wymiarowych ścian (co wynika z konstrukcji pokrycia E'). Ponieważ sześcian E'_k jest duży w porównaniu z $B_{n_j}(x)$ (δ jest bardzo mała), więc l-wymiarowe ściany sześcianu E_i nie mogą przecinać $B_{n_j}(x)$.

Ponieważ zaś sześciany E_i oraz $B_{n_j}(x)$ mają równoległe ściany, E_i musi zawierać pewną $(l+1)$-wymiarową ścianę $B_{n_j}(x)$. Można to pokazać na kilka sposobów. Najprościej chyba zauważyć, że przecięcie dwu sześcianów o równoległych ścianach jest prostopadłościanem. Ponieważ jeden z przecinanych sześcianów (sześcian E_i) ma dłuższe krawędzie niż drugi, więc ten prostopadłościan jest iloczynem kartezjańskim d odcinków, z których każdy jest albo całą krawędzią sześcianu $B_{n_j}(x)$, albo też jej częścią zawierającą wierzchołek. Jeżeli żadna l-wymiarowa ściana E_i nie przecina $B_{n_j}(x)$, to co najmniej $(l+1)$ spośród tych odcinków jest pełnymi krawędziami.

W podobny sposób można pokazać jeszcze jeden równoważny zapis tego samego faktu: E_i zawiera $(l+1)$-wymiarową ścianę $B_{n_j}(x)$ ale nie zawiera ściany $(l+2)$-wymiarowej wtedy i tylko wtedy gdy zawiera dokładnie 2^{l+1} jego wierzchołków.

Możemy już zapomnieć o E'. Pokazaliśmy fakt następujący:

Dla dowolnego dodatniego ε dla odpowiednio dużych n_j dla co najmniej połowy punktów $x \in M_{n_j}$ co najmniej $(1-\varepsilon)$-część objętości sześcianu $B_{n_j}(x)$ jest pokryta dużymi sześcianami E_i, o krawędziach równoległych do krawędzi $B_{n_j}(x)$, każdy z sześcianów E_i zawiera co najmniej 2^{l+1} wierzchołków sześcianu $B_{n_j}(x)$.

Oprócz wyżej wymienionych, sześcian $B_{n_j}(x)$ może przecinać jeszcze inne duże sześciany $E_k \in E$ (takie, których duże podzbiory E'_j nie przecinają $B_{n_j}(x)$), ale ich łączna objętość nie może przekroczyć ε-części objętości $B_{n_j}(x)$, więc nie mogą one sięgać zbyt daleko od brzegu sześcianu $B_{n_j}(x)$ (ε będziemy wybierać zawsze bardzo małe). Zauważmy, że żaden z sześcianów E_i nie może zawierać punktu x, gdyż ten należy do Λ.

Wprowadźmy nowe oznaczenie. *(d, l)-parą* będę nazywał parę zbiorów (A, B), gdzie A jest d-wymiarowym sześcianem a B jest różnicą między A a pewną rodziną d-wymiarowych sześcianów C_i o rozłącznych wnętrzach, ścianach równoległych do ścian A i zawierających 2^{l+1} wierzchołków sześcianu A każdy, ale nie zawierających środka x sześcianu A.

Lemat 3.8. *Niech (A, B) będzie (d, l)-parą. Wtedy B zawiera odcinek, łączący środek A i środek jednej z jego $(d-1)$-wymiarowych ścian.*

Dowód. Przypuśćmy, że nie jest to prawda, i że każdy taki odcinek przecina któryś z sześcianów C_i (lub, co jest równoważne, że żaden ze środków $(d-1)$-wymiarowych ścian sześcianu A nie należy do B). Niech jednym z tych odcinków będzie odcinek xa, gdzie x jest środkiem A a a jest środkiem jednej z $(d-1)$-wymiarowych ścian A, należącym bez zmniejszenia ogólności do sześcianu C_1. Przetnijmy A dwuwymiarową płaszczyzną, zawierającą odcinek xa i równoległą do jednej z krawędzi sześcianu A, zawartych w C_1.

Otrzymany przekrój jest $(2, -1)$-parą, gdyż przecięcie A jest kwadratem a przecięcie każdego z sześcianów C_i jest albo puste albo też zawiera co najmniej jeden z wierzchołków tego kwadratu (naturalnie przecięcia C_i są kwadratami o rozłącznych wnętrzach, więc zawierają one różne wierzchołki kwadratu). Oznaczmy przecięcia przez A', B', C'_i. A' zawiera odcinek xa oraz trzy inne odcinki, łączące x ze środkami $(d-1)$-wymiarowych ścian A (a obecnie środkami boków A'). Każdy z tych czterech odcinków przecina co najwyżej jeden z kwadratów C'_i.

Ale kwadratów tych jest co najwyżej trzy, gdyż kwadrat C'_1 zawiera dwa wierzchołki A' a pozostałe co najmniej po jednym – sprzeczność. $\square$

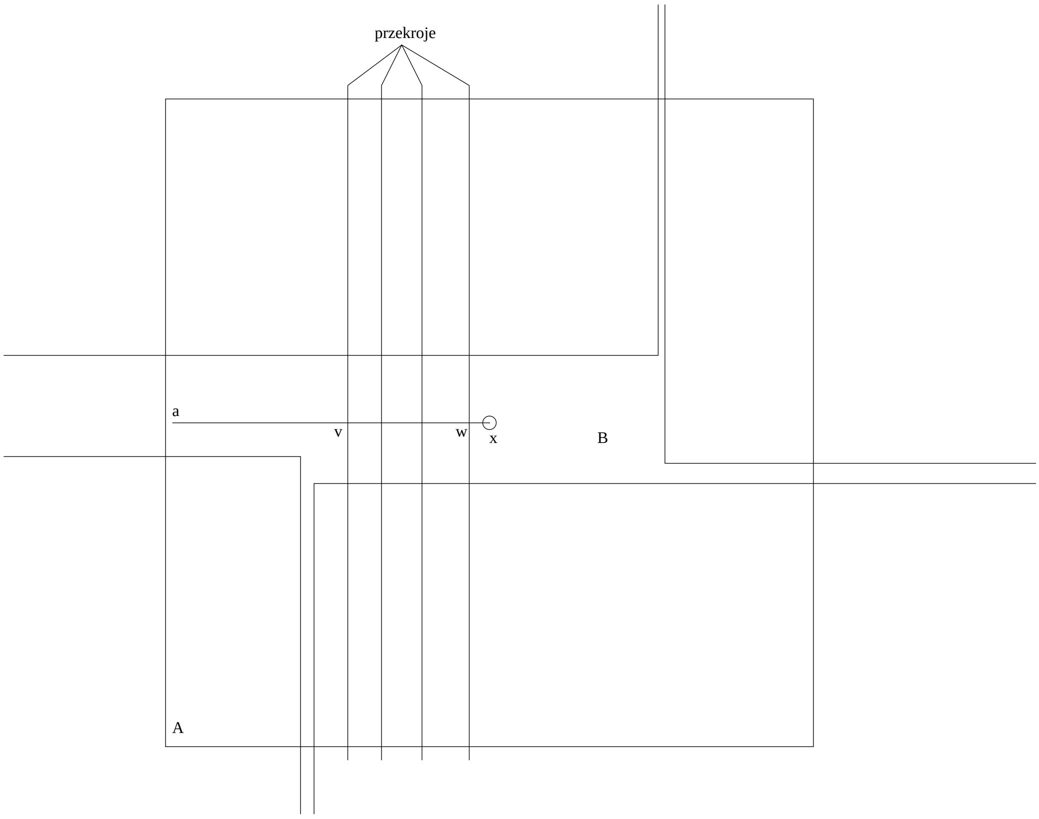
Aby zakończyć dowód lematu 3.7 wystarczy pokazać lemat następujący:

Lemat 3.9. *Niech (A, B) będzie (d, l)-parą. Wtedy B zawiera $(l+1)$-wymiarowy sześcian D, którego krawędzie są nie krótsze niż $c(d) \cdot |A|$ i który znajduje się głęboko we wnętrzu sześcianu A (daleko od jego brzegów).*

Dowód. Zgodnie z poprzednim lematem, zbiór B zawiera odcinek xa, łączący x z jednym ze środków $(d-1)$-wymiarowych ścian A. To już daje szukany rezultat dla $l = 0$.

Dowód dla większych l będzie indukcyjny. Rozpatrzmy wszystkie możliwe $(d-1)$-wymiarowe przekroje pary (A, B), przecinające odcinek xa i prostopadłe do niego. Możemy je sparametryzować używając punktu odcinka xa, należącego do danego przekroju.

Jest co najwyżej $c(l, d)$ możliwych różnych (z dokładnością do przesunięcia równoległego do xa) przekrojów gdyż zależą one jedynie od tego, na które z sześcianów C_i dany przekrój natrafił. Można zatem wybrać z odcinka xa pewien pododcinek, co najwyżej $c'(d)$ razy od niego krótszy, przy tym położony blisko x, na którym przekrój będzie cały czas taki sam (z dokładnością do przesunięcia). Oznaczmy ten odcineczek vw, zob. rysunek 3.



Rysunek 3: (d, l)-para; na rysunku $l = -1$

Każdy z rozpatrywanych przekrojów (A', B') jest $(d-1, l-1)$-parą. Faktycznie, A' jest $(d-1)$-wymiarowym sześcianem a B' powstaje przez wycięcie z A' pewnej rodziny $(d-1)$-wymiarowych sześcianów C'_i. Również środek sześcianu A' należy do B', gdyż jest to punkt z odcinka xa. Zatem, z założenia indukcyjnego, B' zawiera l-wymiarowy sześcian L' o krawędzi porównywalnej z $|A'| = |A|$ i leżący daleko od brzegu A'.

Stąd, B zawiera $(l+1)$-wymiarowy prostopadłościan $vw \times L'$, o dużych krawędziach i położony daleko od brzegu A – szukany sześcian otrzymamy przez skrócenie niektórych jego krawędzi. □

3.3 Pokrycia wielościanami

W tym i następnym podrozdziale chciałbym opisać możliwe uogólnienia twierdzenia 3.6.

Uprzednio zakładaliśmy, że wszystkie zbiory $E_i \in E$ są sześcianami o jednakowej orientacji w przestrzeni. Rozpatrzmy teraz sytuację nieco ogólniejszą – kiedy są one dowolnymi wypukłymi wielościanami, jednakowo regularnymi oraz o długich krawędziach (porównywalnych ze średnicą wielościanu, z dokładnością do jednostajnie wybranej stałej multiplikatywnej). Twierdzenie wygląda więc następująco:

Twierdzenie 3.10. *Dla dowolnego zwartego zbioru $\Lambda \in \mathbb{R}^d$ o zerowej d-wymiarowej objętości i dla dowolnie wybranego jego uogólnionego pokrycia Whitney'a E, składającego się z jednakowo regularnych wielościanów wypukłych o długich krawędziach, górny wymiar Minkowskiego zbioru Λ równy jest wykładnikowi zbieżności dla rodziny E.*

Przez $|E_i|$ będziemy w dalszym ciągu oznaczać pierwiastek stopnia d z objętości zbioru E_i.

Wypiszmy najpierw pewne własności wielościanów.

Lemat 3.11. *Niech $(E_i)_1^\infty$ będzie rodziną wielościanów wypukłych jednakowo regularnych o długich krawędziach. Wtedy:*

i) dla każdego ze zbiorów E_i jego średnica jest mniej więcej równa pierwiastkowi stopnia d z jego objętości (który będziemy dalej oznaczać przez $|E_i|$), stałą proporcjonalności można wybrać niezależną od i,

ii) wszystkie kąty wielościanu E_i są jednostajnie oddzielone od zera; przez kąty rozumiem: dla figury płaskiej – jej kąty, dla bryły trójwymiarowej – jej kąty wierzchołkowe (bryłowe) oraz krawędziowe (dwuścienne), dla wielościanów w wyższych wymiarach typów kątów będzie odpowiednio więcej,

iii) dla dowolnego $l < d$ liczba l-wymiarowych ścian każdego z wielościanów E_i jest jednostajnie ograniczona z góry,

iv) dla dowolnego $l < d$ każdy ze zbiorów E_i można podzielić na podzbiory E'_k spełniające te same własności co rozbicia z dowodów stwierdzenia

3.3 oraz lematu 3.7, tj. zbiory E'_k mają być jednakowo regularne (ze stałą regularności niezależną od l oraz i), mają one tworzyć pokrycie Whitney'a dla sumy l-wymiarowych ścian E_i (dokładniej, część takiego pokrycia zawartą w E_i) oraz dla $t \in (l, l+1]$ zachodzić ma nierówność (3.4) *ze stałą $c(t)$ niezależną od i.*

Dowód. Punkt *i*) wynika bezpośrednio z definicji rodziny jednakowo regularnej. Dla dowodu punktu *ii*) potrzebujemy skorzystać także z wypukłości wielościanów E_i – przykładowo, w wymiarze 2 jeśli dany wielokąt wypukły ma jeden z kątów o mierze α, to stosunek promienia wewnętrznego do zewnętrznego tego wielokąta nie przekracza $2\sin\frac{\alpha}{2}$ co daje ograniczenie na α; w wyższych wymiarach dowodzi się tego analogicznie.

Punkt *iii*) pokażemy indukcyjnie. Rozpatrzmy rzut brzegu wielościanu E_i na powierzchnię jakiejś kuli o zbliżonych rozmiarach która go zawiera, dokonany z jej środka należącego do wnętrza E_i. Każda z jego $(d-1)$-wymiarowych ścian rzutuje się na wielokąt sferyczny o $(d-1)$-wymiarowej objętości oddzielonej od zera, więc otrzymujemy oszacowanie na liczbę tych ścian. Każda z tych ścian jest znowu wypukłym wielościanem o długich krawędziach, więc tezę dla mniejszych l otrzymujemy indukcyjnie.

Punkt *iv*) będziemy dowodzić nie wprost. Po pierwsze, każdy z wielościanów E_i mogę rozbić na mniejsze wielościany tak, by otrzymać rozbicie Whitney'a dla sumy l-wymiarowych ścian E_i.

Wybierzmy taki prostokątny układ współrzędnych, którego hiperpłaszczyzny tworzą kąty oddzielone od zera ze wszystkimi ścianami E_i. Przeprowadźmy przez wybrany punkt $o \in E_i$ hiperpłaszczyzny, równoległe do hiperpłaszczyzn zadanych przez osie układu współrzędnych – otrzymane wielościany mają wszystkie kąty oddzielone od zera (będą one jednakowo regularne), a ich rozmiary będą mniejsze od rozmiarów wielościanu E_i jedynie o stałą, którą (dla odpowiedniego wyboru punktu o) można wybrać jednostajnie. Teraz wszystkie spośród otrzymanych wielościanów, które są zbyt blisko l-wymiarowych ścian E_i możemy rozbić, wybierając kolejny punkt podziału i prowadząc hiperpłaszczyzny równoległe do poprzednich. Możemy tę konstrukcję powtarzać dopóki nie otrzymamy rozbicia Whitney'a.

Nierówność (3.4) zachodzi dla każdego takiego rozbicia – pytanie tylko, czy stałą $c(t)$ można wybrać jako uniwersalną.

Załóżmy, że nie, tj. dla pewnego $t > l$ mogę znaleźć taki ciąg wielościanów E_{i_j} (dla ustalenia uwagi, wszystkie o średnicy równej 1), że $c_j(t) > 2^{dj}$, gdzie c_j jest to najmniejsza dopuszczalna stała w nierówności (3.4) dla zbioru E_{i_j}. Zauważmy, że l-wymiarowa objętość sumy l-wymiarowych ścian dowolnego zbioru E_{i_j} jest jednostajnie ograniczona, gdyż ograniczona jest zarówno liczba tych ścian (punkt *iii*)) jak i objętość każdej z nich. Ponadto, skoro c_j

jest najmniejszą dopuszczalną stałą, zachodzi nierówność

$$\sum_{E'_k \subset E_{i_j}} |E'_k|^t \approx c_j > 2^{dj} \tag{3.8}$$

Utwórzmy nowy zbiór E, będący domknięciem sumy mnogościowej zbioru E_{i_1}, pomniejszonej dwukrotnie kopii zbioru E_{i_2}, pomniejszonej czterokrotnie kopii zbioru E_{i_3} itd. Przy tym kopia j-ego zbioru (będę ją oznaczał G_j) ma zawierać punkt $(2^{2-j}, 0, \dots, 0)$. Zbiór E jest równy sumie mnogościowej rozłącznych zbiorów G_j oraz punktu $(0, 0, \dots, 0)$. Niech L będzie sumą mnogościową l-wymiarowych ścian zbiorów G_j oraz punktu $(0, 0, \dots, 0)$ – jest to zbiór zwarty, którego wymiar Minkowskiego równy jest l.

W każdym ze zbiorów G_j mam pewne rozbicie – rozbicia te tworzą rozbicie Whitney'a zbioru L (dokładniej, trzeba je jeszcze uzupełnić, zadając rozbicie poza zbiorem E – jest to proste, bo zbiory G_j mają regularne kształty i leżą daleko od siebie). Ale, jak wynika z nierówności (3.8), wykładnik zbieżności tego pokrycia jest równy co najmniej t:

$$\sum_j \sum_{E'_k \subset G_j} |E'_k|^t > \sum_j 2^{(d-t)j} = \infty$$

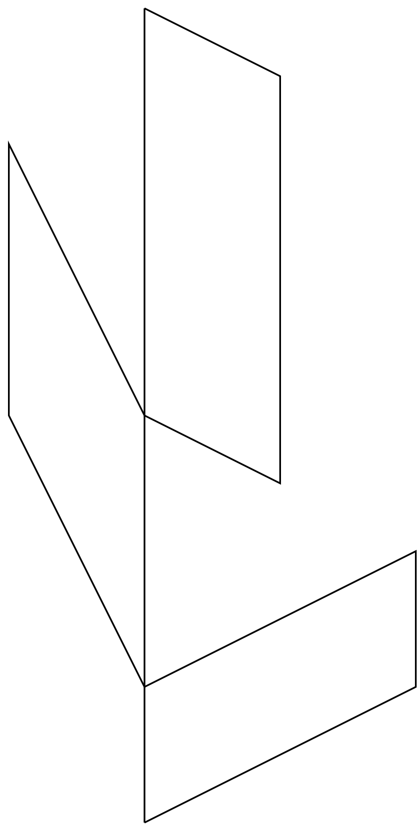
podczas gdy zgodnie ze stwierdzeniem 3.1 nie może on przekroczyć l. □

W powyższym lemacie użyliśmy stwierdzenia 3.1 do dowodu punktu iv). Możemy to zrobić, gdyż dowód tego stwierdzenia w naszym przypadku wymaga jedynie punktu i) lematu 3.11. Podobnie pozostałe stwierdzenia z poprzedniego rozdziału przenoszą się na przypadek zbiorów wypukłych jednakowo regularnych – jedynie do dowodu stwierdzenia 3.3 potrzebujemy punktu iv) powyższego lematu, stwierdzenie 3.4 wymaga jedynie punktu i).

Przystąpimy teraz do sformułowania i dowodu ogólniejszej wersji lematu 3.7.

Zacznijmy od pewnej geometrycznej konstrukcji. W pierwszym kroku weźmy odcinek xy długości a. W drugim kroku rozpatrzmy rodzinę równoległych hiperpłaszczyzn, przecinających xy pod kątem co najmniej α (oddzielonym od zera), i w każdej z tych płaszczyzn wybierzmy odcinek długości a, którego jeden z końców należy do xy. Żądamy przy tym, aby kierunki tych odcinków były lokalnie takie same (figura wygląda na razie jak kilka chorągiewek na wspólnym patyku). W trzecim kroku dla dowolnego odcinka utworzonego w kroku drugim płaszczyznę, w której leży dzielimy na równoległe podpłaszczyzny (wymiaru $d-2$), i w każdej z nich wybieramy odcinek, którego jeden z końców leży na odcinku utworzonym poprzednio, którego długość wynosi a i który lokalnie ma stały kierunek – tj. cała figura składa się ze skończonej liczby równoległościanów. Procedurę kontynuujemy aż do kroku numer l.

Otrzymaną figurę będziemy nazywać *sześcianem uogólnionym* wymiaru l, zob. rysunek 4. Jego l-wymiarowa objętość jest w przybliżeniu równa a^l. Gdybyśmy w każdym kroku konstrukcji żądali, by wybierane rodziny płaszczyzn były prostopadłe do już wybranych odcinków – a nie tylko tworzyły z nimi kąty oddzielone od zera – to częsci sześcianu uogólnionego można poobracać tak, by utworzyły zwykły l-wymiarowy sześcian. Bez założenia o kątach można również dokonać podobnego złożenia, ale przy pomocy przekształceń afinicznych.



Rysunek 4: Uogólniony kwadrat

Zauważmy, że na obszarze pokrytym przez płaszczyzny definiowane w pierwszym kroku dobrze określone jest rzutowanie na uogólniony sześcian. Mianowicie, dla dowolnego punktu w tym obszarze jest jednoznacznie określona pewna $(d - l + 1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna (występująca w l-tym kroku konstrukcji), na której punkt ten leży. Wtedy rzutem punktu na uogólniony sześcian nazywamy rzut tego punktu na odcinek, leżący w przecięciu tej hiperpłaszczyzny z sześcianem (odcinek z l-tego kroku konstrukcji).

Można to sobie wyobrazić jako rozbicie przestrzeni na części, na których rzutowanie odbywa się w różnych kierunkach. Co ważne, rzut kuli o promieniu r ma l-wymiarową objętość co najwyżej równą (z dokładnością do stałej) r^l – może ona być nawet mniejsza, gdyż rzut części kuli nie musi leżeć na uogólnionym sześcianie.

Nowa wersja lematu 3.7 wygląda następująco:

Lemat 3.12. *Jeżeli wykładnik zbieżności rodziny E nie jest równy (tj. jest ściśle mniejszy od – stwierdzenie 3.1) górnemu wymiarowi Minkowskiego zbioru Λ, to istnieje stała C taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dla odpowiednio dużego n_j co najmniej połowa ze zbiorów $B_{n_j}(x) \cap K_{n_j}$ ma objętość mniejszą niż $\varepsilon\delta_{n_j}^d$ ale zawiera w swoim wnętrzu $(l+1)$-wymiarowy sześcian uogólniony $D(x)$ o boku $C \cdot \delta_{n_j}$ położony daleko (co najmniej o $C \cdot \delta_{n_j}$) od brzegu kuli $B_{n_j}(x)$.*

Załóżmy, że lemat ten jest prawdziwy, wtedy twierdzenie 3.10 wynika z niego w dokładnie taki sam sposób jak twierdzenie 3.6 z lematu 3.7. Jedynymi bowiem własnościami l-wymiarowego sześcianu, jakie zostały w tym rozumowaniu użyte, są:

- fakt, że ma on l-wymiarową objętość rzędu l-tej potęgi swojej średnicy,
- fakt, że rzut kuli o promieniu r ma l-wymiarową objętość co najwyżej rzędu r^l,

a obie te własności posiada także sześcian uogólniony.

Wystarczy zatem pokazać lemat 3.12. Przyjrzyjmy się, jak przeprowadzaliśmy dowód lematu 3.7. Nie mamy już jednej wybranej orientacji w przestrzeni, więc za $B_{n_j}(x)$ lepiej będzie wybrać nie sześcian ale kulę o środku x i promieniu δ_{n_j} – zmiana ta jest zupełnie nieistotna jeśli chodzi o zastosowanie lematu 3.12 do dowodu twierdzenia.

Tak jak uprzednio możemy pokazać, że dla dowolnego ε dla odpowiednio dużego n_j dla wielu punktów $x \in M_{n_j}$ zbiór K_{n_j} pokrywa jedynie ε-część zbioru $B_{n_j}(x)$, jego reszta (za wyjątkiem ewentualnie wąskiego paska przy brzegu) jest zaś pokryta pewnymi dużymi wielościanami E_i których l-wymiarowe ściany są rozłączne z $B_{n_j}(x)$ (a nawet w dużej odległości od $B_{n_j}(x)$). Przy tym wielościany te nie mogą zawierać punktu x.

Zauważmy, że jeśli wielościany te są odpowiednio duże (tj. jeśli wybieramy odpowiednio małe δ) to przecięcie dowolnego z nich hiperpłaszczyzną w ogólnym położeniu (tj. tworzącą ze wszystkimi ścianami wielościanu – dowolnego wymiaru – kąty oddzielone od zera) jest wielościanem o wymiar niższym, którego $(l-1)$-wymiarowe ściany leżą poza przecięciem $B_{n_j}(x)$ i którego krawędzie są duże (choć niekoniecznie tak duże jak wielościanu wyjściowego, ale pozostające do średnicy wielościanu w stosunku oddzielonym od zera). Wynika to stąd, że gdyby któraś z krawędzi otrzymanego wielościanu była krótka, to oznaczałoby to obecność wierzchołka wielościanu gdzieś blisko.

Tak jak poprzednio, (d,l)-parą będę nazywał badaną sytuację, tj. kulę d-wymiarową z którą przecinają się duże wielościany o dużych krawędziach, których l-wymiarowe ściany leżą daleko od kuli.

Następujące dwa lematy są uogólnieniami lematów 3.8 i 3.9. Ich dowody również są bardzo podobne.

Lemat 3.13. *Dla dowolnej (d,l)-pary jeden z promieni kuli nie przecina żadnego z dużych wielościanów.*

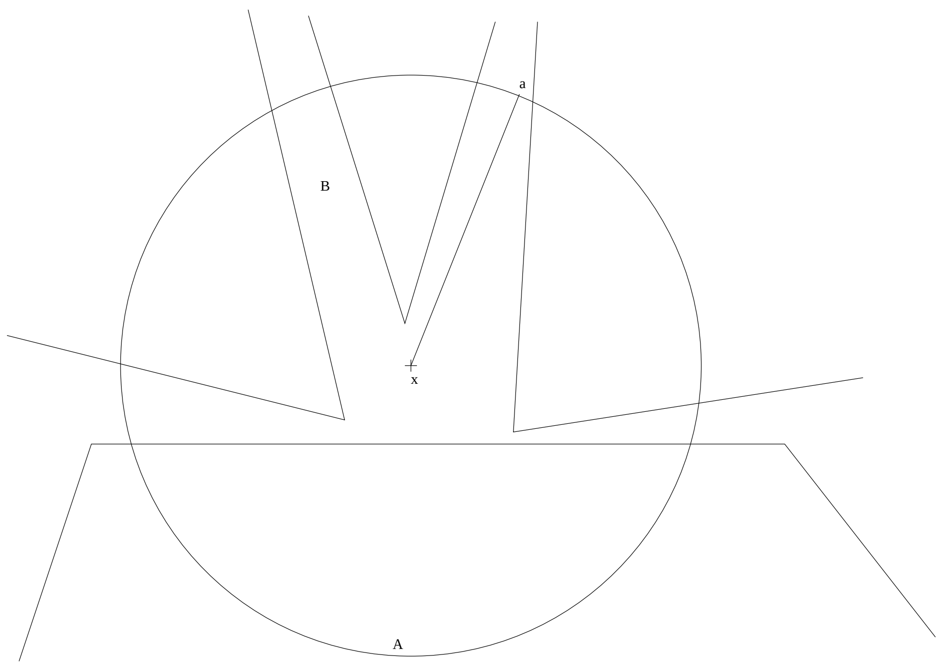
Dowód. Poprowadźmy dwuwymiarową płaszczyznę przez punkt x w taki sposób, aby jej przecięcie z pewnym wielościanem E_1 zawarte w $B_{n_j}(x)$ było odcinkiem koła. Przecięcia pozostałych wielościanów będą albo odcinkami koła, albo też kątami (gdyż nie mogą mieć żadnego boku wewnątrz koła).

Zaś takie figury nie zawierające środka koła nie mogą przeciąć wszystkich jego promieni, zob. rysunek 5. Aby ten fakt sformalizować, zauważmy że albo jedno, albo też oba ramiona każdego z kątów muszą być widoczne z punktu x. Jak widać na rysunku, jeśli dwa ramiona dwu kolejnych kątów, położone koło siebie, są widoczne to można poprowadzić szukany promień pomiędzy nimi. Wiemy zaś że co najmniej jedno z przecięć nie jest kątem tylko odcinkiem koła (co można traktować jak kąt o obu ramionach widocznych) więc zawsze można takie dwa kolejne widoczne ramiona znaleźć. □

Lemat 3.14. *Dla dowolnej (d,l)-pary zbiór K_{n_j} zawiera $(l+1)$-wymiarowy uogólniony sześcian o dużej krawędzi (porównywalnej z promieniem kuli δ_{n_j}).*

Dowód. Będziemy prowadzić dowód indukcyjny. Dla $l=0$ zagadnienie sprowadza się do tezy poprzedniego lematu.

Niech $l>0$. Zgodnie z poprzednim lematem, istnieje promień kuli xa nie przecinający żadnego z dużych wielościanów E_i. rozpatrzmy rodzinę równoległych płaszczyzn w położeniu ogólnym względem ścian dużych wielościanów. Liczba tych wielościanów jest ograniczona gdyż ograniczone z dołu są ich kąty – lemat 3.11 – zatem jest także ograniczona liczba ich ścian; można zatem znaleźć takie ustawienie płaszczyzn, by tworzyły one ze ścianami wielościanów jak i z odcinkiem xa kąty jednostajnie oddzielone od zera. Nie



Rysunek 5: Dwuwymiarowe cięcie (d, l)-pary

bierzemy wszystkich takich płaszczyzn, jedynie te w odległości od x nie większej od $c_1\delta_{n_j}$, gdzie c_1 jest pewną małą stałą.

Każde takie przecięcie jest $(d-1)$-wymiarową kulą, którą przecinają pewne duże wielościany o dużych krawędziach, których jednak $(l-1)$-wymiarowe ściany nie przecinają go. Wielościany te nie zawierają pewnego szczególnego punktu x_1 – przecięcia odcinka xa z naszą płaszczyzną – ale punkt ten nie leży w środku kuli. Ponieważ jednak kąt między płaszczyznami a odcinkiem xa jest oddzielony od zera, więc punkt x_1 nie leży (dla dostatecznie małego c_1) zbyt blisko brzegu kuli. Zatem można zastąpić tę kulę przez mniejszą, o środku w x_1, zawartą w niej ale o niewiele mniejszym promieniu.

Reasumując, w każdej płaszczyźnie przecięcia mamy $(d-1, l-1)$-parę, w której średnica kuli zmniejszyła się jedynie o stałą. Zatem, zgodnie z poprzednim lematem, w każdej płaszczyźnie można znaleźć taki promień kuli, który nie przecina żadnego z dużych wielościanów. Oczywiście promienie te mogą w każdej płaszczyźnie biec w innym kierunku, ale jeśli promień biegnący w pewnym kierunku nie przecina żadnego wielościanu poprowadzony w pewnej płaszczyźnie (z pewnego wyjściowego punktu należącego do xa) to promienie poprowadzone w tym samym kierunku z dostatecznie bliskich punktów również nie przetną żadnego wielościanu. Kierunki te można więc wybrać tak, by były lokalnie stałe z jedynie skończenie wieloma zmianami.

W ten sposób otrzymaliśmy uogólniony sześcian dwuwymiarowy o krawędzi porównywalnej z δ_{n_j}. Krok indukcyjny przebiega analogicznie dla większych l. $\square$

Lemat ten możemy zastosować do dowodu lematu 3.12. Jeśli za zbiór A przyjąć $B_{n_j}(x)$, a za B różnicę $B_{n_j}(x)$ i tych spośród dużych (nie zawartych w K_{n_j}) wielościanów E_i, których przecięcie z $B_{n_j}(x)$ zajmuje więcej niż ε-ową część objętości kuli $B_{n_j}(x)$, to otrzymane dwa zbiory tworzą (d, l)-parę. Możemy zatem znaleźć duży $(l+1)$-wymiarowy sześcian uogólniony, zawarty w B. Ponieważ sześcian tej jest położony daleko od brzegu kuli $A = B_{n_j}(x)$, więc nie przecina się także z żadnym z pozostałych dużych wielościanów E_i (ich kąty są oddzielone od zera, więc skoro nie zajmują dużej części objętości kuli $B_{n_j}(x)$, nie mogą sięgać zbyt głęboko do jej wnętrza), czyli zawiera się w $B_{n_j}(x) \cap K_{n_j}$.

To kończy dowód lematu 3.12, a więc także twierdzenia 3.10.

3.4 Pokrycie zbiorami niewypukłymi

Możemy uogólnić twierdzenie 3.6 także na przypadek niekoniecznie wypukłych zbiorów w rozbiciu. Niestety, trzeba wówczas dodać pewne dodatkowe założenia, gdyż w ogólnym przypadku wynik nie musi być prawdziwy. Niżej zajmiemy się jedynie sytuacją w wymiarze 2; uogólnienie rozumowania na wyższe wymiary nie przedstawia trudności, jednak wymaga rozpatrywania wielu szczególnych przypadków (w zależności od l, tj. od wymiaru zbioru granicznego).

Twierdzenie 3.15. *Niech Λ będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ miary zero. Niech (E_i) będzie uogólnionym pokryciem Whitney'a dla zbioru Λ, spełniającym następujące warunki:*

- *wnętrza zbiorów E_i tworzą jednostajną rodzinę Johna,*
- *brzeg każdego zbioru E_i jest kawałkami klasy C^1,*
- *wektor styczny do brzegu zbioru E_i (traktowany jako odwzorowanie z ∂E_i w S^1) ma wahanie ograniczone przez stałą jednakową dla wszystkich E_i,*
- *przecięcie dowolnych dwu zbiorów $E_i \cap E_j$ jest spójne.*

Wtedy górny wymiar Minkowskiego zbioru Λ równy jest wykładnikowi zbieżności rodziny (E_i).

Przypomnijmy, że jednostajna rodzina Johna składa się ze zbiorów jednakowo regularnych. Dla tak wybranego uogólnionego pokrycia Whitney'a dowody stwierdzeń 3.1, 3.3 i 3.4 nie ulegają zmianie. Zatem dla dowodu twierdzenia 3.15 wystarczy nam pokazać lemat 3.7 lub 3.12. Ponieważ jesteśmy w sytuacji dwuwymiarowej, dzięki stwierdzeniu 3.3 możemy przyjąć $l = 0$ i tezy obu lematów są jednakowe – musimy w wielu zbiorach $B_{n_j}(x) \cap K_{n_j}$ znaleźć długi odcinek (długości porównywalnej z δ_{n_j}).

Pokażemy fakt nieco słabszy: nie znajdziemy odcinka, ale znajdziemy krzywą wychodzącą z x, sięgającą niemal do brzegu $B_{n_j}(x)$ i leżącą w całości w K_{n_j}. To już wystarczy do dowodu twierdzenia.

Dowód, podobnie jak poprzednio, zaczniemy od skonstruowania pewnego rozbicia zbiorów E_i. Niech α będzie ustalonym kątem mniejszym od $\pi/3$. Niech γ będzie małą stałą (zależną od stałych w definicji rodziny Johna oraz od wahania wektora stycznego do brzegu), którą wybierzemy później. Wybierzmy jeden ze zbiorów E_i (następnie tę samą konstrukcję powtórzymy we wszystkich inych). Długość (jednowymiarową miarę Hausdorffa) podzbioru jego brzegu będziemy oznaczać przez λ. Na brzegu zbioru E_i odległością dwu punktów będę nazywał długość krótszej z krzywych, na jakie dzielą one brzeg E_i. Dla punktu $x \in \partial E_i$ oznaczam przez $t(x)$ wektor styczny do brzegu E_i w punkcie x. Wektor ten wybieram zgodnie z ustaloną orientacją. Przez $v(x, l)$ oznaczam wahanie wektora t na odcinku brzegu zbioru E_i o środku w x i długości $2l$. Obie te wielkości są określone w prawie każdym punkcie ∂E_i – za wyjątkiem punktów odległych o l od wierzchołka (punktu nieróżniczkowalności brzegu) bądź samych wierzchołków. Oznaczam

$$h(x) = \inf\{h; v(x, h) \geq \alpha\}$$

Dla dowolnych dwu punktów $x, y \in \partial E_i$ łatwo pokazać nierówność

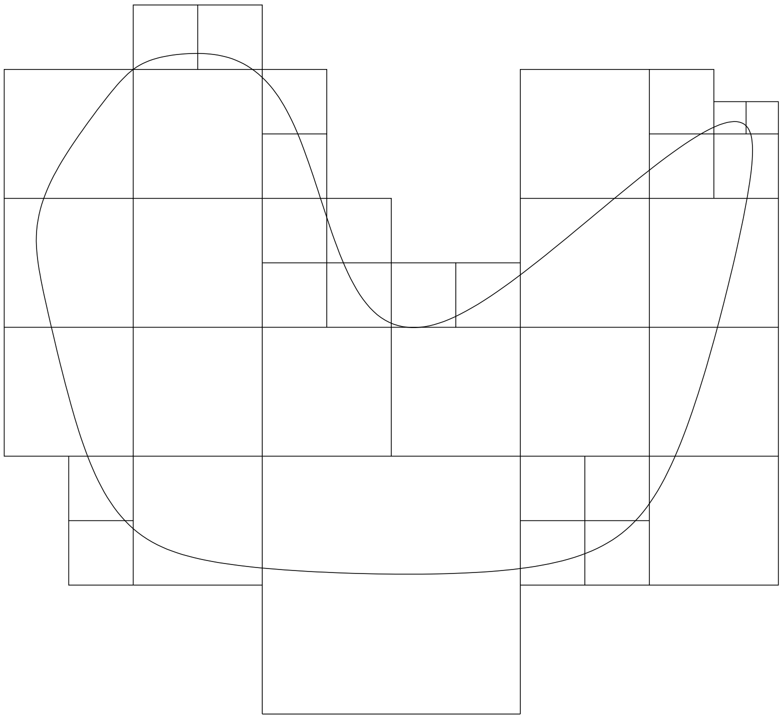
$$h(x) \leq h(y) + \mathrm{dist}(x, y) \tag{3.9}$$

(odległość mierzymy wzdłuż brzegu E_i).

Niech (G_k) będzie rodziną największych kwadratów diadycznych, które przecinają ∂E_i i spełniają warunek

$$|G_k| < \gamma \cdot h(x) \quad \forall x \in G_k \cap \partial E_i$$

Uzupełnijmy tę rodzinę, dodając do niej największe kwadraty diadyczne, zawarte w E_i ale nie zawarte w kwadratach G_k. Tę rodzinę (pokrywającą całe E_i) będziemy oznaczać G'_k. Jako rodzinę E'_k – szukane rozbicie E_i – wybieramy przecięcia zbiorów G'_k z E_i, zob. rysunek 6.



Rysunek 6: Rozbicie E'_k

Lemat 3.16. *Przecięcie $2|G'_k|$-otoczenia zbioru G'_k z ∂E_i – będziemy je dalej oznaczać przez Z_k – ma długość proporcjonalną (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) do $|G'_k|$. Długość brzegu zbioru E_i jest proporcjonalna do jego średnicy. Dla odpowiednio małego γ punkt $x \in \partial E_i$ może leżeć jedynie w zbiorach Z_k dla $|G'_k| > c\gamma h(x)$ dla pewnej stałej c niezależnej od i. Dla każdej ustalonej długości boku a – będącej potęgą dwójki – co najwyżej 25 spośród kwadratów G'_k takich, że $x \in Z_k$, ma bok długości a.*

Dowód. $2|G'_k|$-otoczenie zbioru G'_k zawiera się w kwadracie o boku równym $5|G'_k|$. Gdyby część krzywej ∂E_i, zawarta w tym kwadracie, miała bardzo dużą długość w porównaniu do jego boku, znaczyłoby to, że krzywa ta jest mocno powyginana. Jednak założyliśmy ograniczoność wahania wektora stycznego, która gwarantuje nam istnienie stałej c_1, spełniającej nierówność

$$\lambda(Z_k) < c_1 \cdot |G'_k|$$

Podobnie,

$$\lambda(\partial E_i) < c_1 \cdot |E_i|$$

Z konstrukcji wynika, że albo kwadrat G'_k, albo najmniejszy kwadrat diadyczny który go zawiera ('rodzic') muszą przecinać ∂E_i. Jednak $2|G'_k|$-otoczenie zbioru G'_k zawiera $(2-\sqrt{2})|G'_k|$-otoczenie jego rodzica, zatem (ze spójności ∂E_i)

$$\lambda(Z_k) \geq 2(2-\sqrt{2})|G'_k|$$

Trywialna jest nierówność

$$\lambda(\partial E_i) \geq 2|E_i|$$

To, że co najwyżej 25 kwadratów G'_k dla których $x \in Z_k$ może mieć ten sam bok wynika z faktu, że tylko tyle jest różnych diadycznych kwadratów rozmiaru a, leżących w odległości nie większej niż $2a$ od x.

Dla dowodu lematu pozostało więc już tylko pokazać, że małe kwadraty G'_k muszą leżeć daleko od punktów x, dla których $h(x)$ jest duże. Przypuśćmy, że nie jest to prawdą, tj. że istnieje punkt $x \in Z_k$ taki, że

$$h(x) > c_2 \cdot |G'_k|$$

gdzie c_2 jest bardzo duże (przyjmiemy $c_2 = 3/\gamma$).

Rodzic kwadratu G'_k nie należy do rodziny (G'_k), chociaż przecina brzeg zbioru E_i. Zgodnie z definicją tej rodziny, musi więc zawierać punkt $y \in \partial E_i$ taki, że

$$h(y) < 2|G'_k|/\gamma$$

Odległość euklidesowa punktów x i y nie przekracza $2\sqrt{2}|G'_k|$. Ale różnica wartości funkcji h w tych punktach (a zatem także ich odległość wzdłuż brzegu E_i – patrz (3.9)) jest większa od $|G'_k|/\gamma$. Skorzystamy ponownie, podobnie jak na początku dowodu lematu, z faktu, że długa krzywa o skończonym wahaniu nie może zmieścić się w małym obszarze. Skoro tak, to obie części, na jakie punkty x i y dzielą brzeg zbioru E_i, muszą sięgać daleko (na odległość proporcjonalną do $|G'_k|/\gamma$). Dla odpowiednio małego γ stoi to jednak w sprzeczności z faktem, że wnętrze zbioru E_i jest obszarem Johna ze z góry zadaną stałą, co kończy dowód. □

Będziemy potrzebować oszacowania na zbiór punktów $x \in \partial E_i$, w których funkcja h przyjmuje małe wartości. Wprowadźmy oznaczenie $H_n = \{x \in \partial E_i; h(x) < 2^{-n}\}$.

Stwierdzenie 3.17. *Dla odpowiednio dobranej, niezależnej od i stałej c*

$$\lambda(H_n) \leq c \cdot 2^{-n}$$

Dowód. Dla dowolnego $x \in H_n$ oznaczmy przez $L(x)$ odcinek krzywej ∂E_i o środku w x i długości (liczonej wzdłuż brzegu E_i) 2^{1-n}. z założenia wahanie wektora stycznego do brzegu E_i wzdłuż $L(x)$ jest nie mniejsze od α.

Spośród wszystkich odcinków $L(x)$ wybierzmy pewną rodzinę maksymalną odcinków rozłącznych. Może ona liczyć co najwyżej $\frac{c'}{\alpha}$ odcinków, gdyż wahanie wektora stycznego do brzegu jest ograniczone. Ponieważ wybrana rodzina jest maksymalna, więc każdy punkt z H_n musi leżeć w odległości nie większej niż 2^{-n} (liczonej wzdłuż brzegu) od któregoś z jej elementów. Ogółem, zbiór H_n można pokryć $\frac{c'}{\alpha}$ odcinkami o długości 2^{2-n}, czyli jego długość nie przekracza $c \cdot 2^{-n}$. □

Ustalmy $t \in (0,1)$. Będziemy szacować z góry sumę

$$W_t(E_i) = \sum_{E'_k \subset E_i} |E'_k|^t$$

Stwierdzenie 3.18. *Można wybrać taką stałą $c(t)$, zależną od t ale nie od i, że*

$$W_t(E_i) \leq c(t)|E_i|^t$$

Dowód. Cała konstrukcja rozbicia E'_k nie ulegnie zmianie, jeśli zbiór E_i powiększyć albo pomniejszyć 2^n razy w taki sposób, by kwadraty diadyczne przeszły na kwadraty diadyczne. Podobna jednokładność nie zmieni też tezy stwierdzenia. Wystarczy zatem przeprowadzić dowód w przypadku szczególnym $|E_i| \in [1, 2)$.

Będziemy szacować nie W_t ale większe wyrażenie $W'_t = \sum |G'_k|^t$. Z pierwszej częsci lematu 3.16 mamy

$$|G'_k|^t \approx \int_{Z_k} |G'_k|^{t-1} d\lambda$$

Stąd,

$$W'_t(E_i) \approx \int_{\partial E_i} \sum |G'_k|^{t-1} \chi_{Z_k}(x) d\lambda(x)$$

Ponownie korzystając z lematu 3.16 (tym razem z końcowej jego części) otrzymujemy

$$W'_t(E_i) < \int_{\partial E_i} 25 \sum_{n=\log_2(ch(x))}^{\infty} 2^{n(t-1)} d\lambda(x)$$

Zwróćmy uwagę, że $t-1 < 0$, więc szereg pod znakiem całki jest sumowalny, a jego suma szacuje się przez

$$\sum_{n=\log_2(ch(x))}^{\infty} 2^{n(t-1)} \approx c(t)h(x)^{t-1}$$

Można zatem wyszacować całkę, korzystając z poprzedniego stwierdzenia:

$$W_t'(E_i) < \lambda(\partial E_i)1^{t-1} + \sum_n \lambda(H_n)2^{(n+1)(1-t)} \leq c|E_i| + c\sum_n 2^{-nt} \leq c(t)$$

Co daje tezę stwierdzenia. □

Rozbicia (E_i) oraz (E_k') mają zatem te same wykładniki zbieżności, gdyż odpowiednie szeregi są dla wszystkich $t \in (0,1)$ razem zbieżne lub razem rozbieżne. Możemy zatem użyć rozbicia E_k' tak, jak w dowodzie lematu 3.7. Albo jego wykładnik zbieżności równy jest górnemu wymiarowi Minkowskiego zbioru Λ, albo też co najmniej połowę kwadracików $B_{n_j}(x)$ prawie całkowicie pokrywają zbiory E_k' pochodzące od dużych kwadratów Z_k'. Oznacza to, że kwadraciki te są również prawie w całości pokryte zbiorami E_i o dużej średnicy (w porównaniu z δ_{n_j}), których brzeg na odcinku długości $\frac{1}{\gamma\delta}\delta_{n_j} \gg \delta_{n_j}$ w każdą stronę jest prawie że linią prostą (skręca co najwyżej o α). Jedynie dwa z takich zbiorów mogą sięgnąć blisko punktu x, a ponieważ ich przecięcie jest spójne, nie mogą punktu x otoczyć. Zatem istnieje krzywa, wychodząca z punktu x i sięgająca niemal do brzegu, omijająca duże zbiory E_i, co chcieliśmy uzyskać.

Krzywą tę można wybrać niemal prostoliniową (nie musi ona skręcać bardziej niż brzegi dużych zbiorów E_i, które omija). Dowód twierdzenia kończymy identycznie jak poprzednio – rozpatrując naturalnie zadane rzutowanie na tę krzywą (w kierunku, którego w żadnym swoim punkcie nie przyjmuje). □

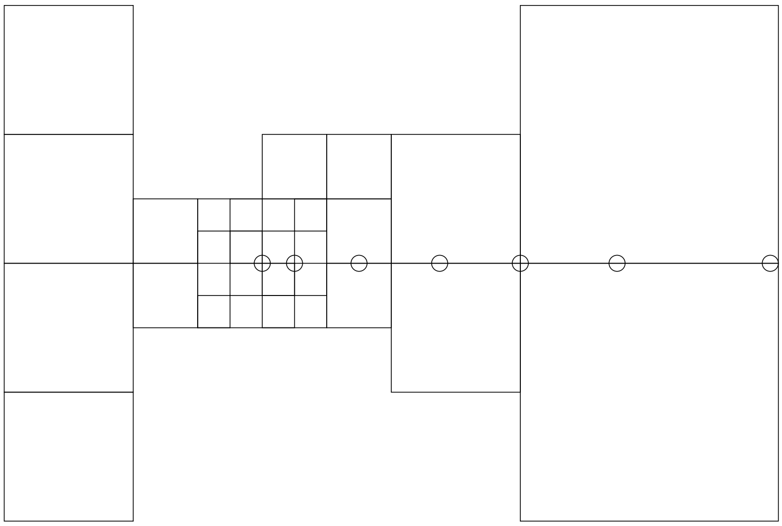
Na zakończenie podam przykłady uzasadniające konieczność występowania wszystkich założeń w twierdzeniu 3.15.

Konieczność występowania pewnego ograniczenia na kształty zbiorów jest oczywista – w przeciwnym razie moglibyśmy w dowolnym danym pokryciu Whitney'a (np., pokryciu kwadratami) rozdzielić każdy ze zbiorów na coraz większą liczbę podzbiorów o bardzo wydłużonym kształcie a średnicy równej mniej więcej wyjściowej (np. na bardzo wąskie prostokąty). W ten sposób dostalibyśmy pokrycie, którego wykładnik zbieżności byłby dowolnie mały, nawet równy zeru.

Natomiast nietrywialnym faktem jest fałszywość twierdzenia 3.15 jeśli którekolwiek z pozostałych założeń przestanie być spełnione.

W pierwszym przykładzie niech $\Lambda = (0,0) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{i},0)$. Jest to zwarty zbiór przeliczalny, którego wymiar Minkowskiego równy jest $\frac{1}{2}$.

Uogólnione rozbicie Whitney'a dla tego zbioru konstruuję w dwu krokach. Zaczynam od pokrycia diadycznego uzupełnienia punktu $(0,0)$ (ma ono wykładnik zbieżności równy 0). Następnie dla wszystkich i usuwam z tego pokrycia pewne otoczenie punktu $(\frac{1}{i},0)$, które pokrywam osobno, jak na rysunku 7.

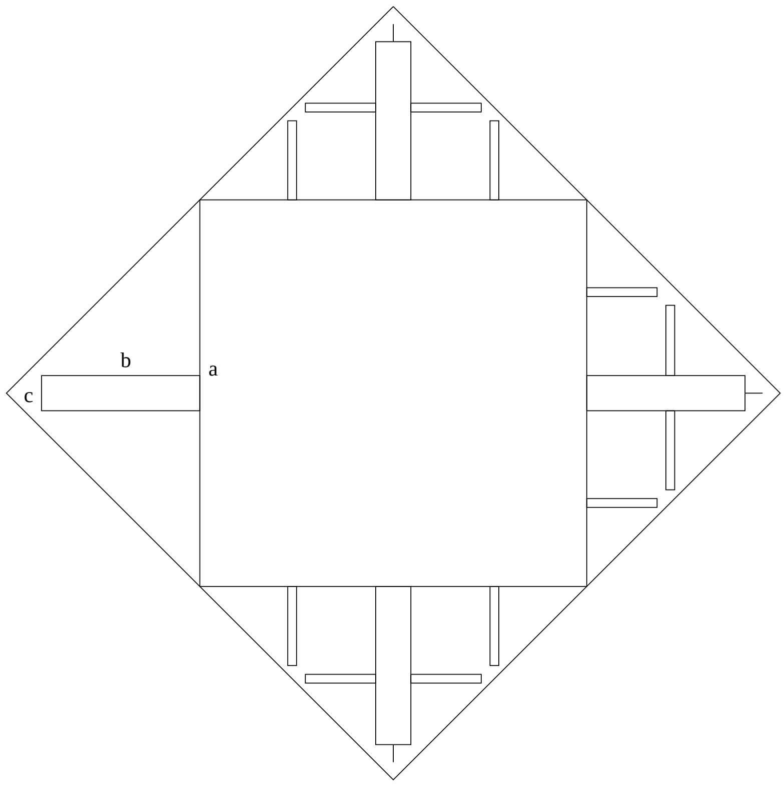


Rysunek 7: Kontrprzykład 1

Oczywiście każda z rodzin zbiorów dodanych dookoła każdego z punktów $(\frac{1}{i},0)$ ma wykładnik zbieżności równy zero. Jeżeli rozmiary tych otoczeń zbiegają odpowiednio szybko (wykładniczo) do zera gdy i ucieka do nieskończoności, to suma t-tych potęg średnic zbiorów E_i po wszystkich tych rodzinach razem wziętych będzie skończona dla dowolnego $t > 0$. Ponieważ zaś suma ta jest także skończona dla wyjściowej rodziny zbiorów (miała ona wykładnik zbieżności równy 0) a w toku konstrukcji mogliśmy średnice zbiorów do niej należących jedynie zmniejszyć, więc całe otrzymane pokrycie ma wykładnik zbieżności równy 0 (zatem ostro mniejszy od wymiaru Minkowskiego zbioru granicznego).

Skonstruowane pokrycie jest bez wątpienia uogólnionym pokryciem Whitney'a. Wszystkie zbiory tworzą jednostajną rodzinę Johna. Jeżeli otoczenia punktów $(\frac{1}{i},0)$ jakie usuwaliśmy z wyjściowego, diadycznego pokrycia, miały odpowiedni kształt (powinny to być coraz węższe soczewki, z coraz ostrzejszymi kątami) to także warunek jednostajnej ograniczoności wahania wektora stycznego będzie spełniony. Natomiast nie będzie spełniony warunek spójności części wspólnej dwu zbiorów z pokrycia, i tego już jak widzimy wystarcza aby teza twierdzenia przestała być prawdziwa.

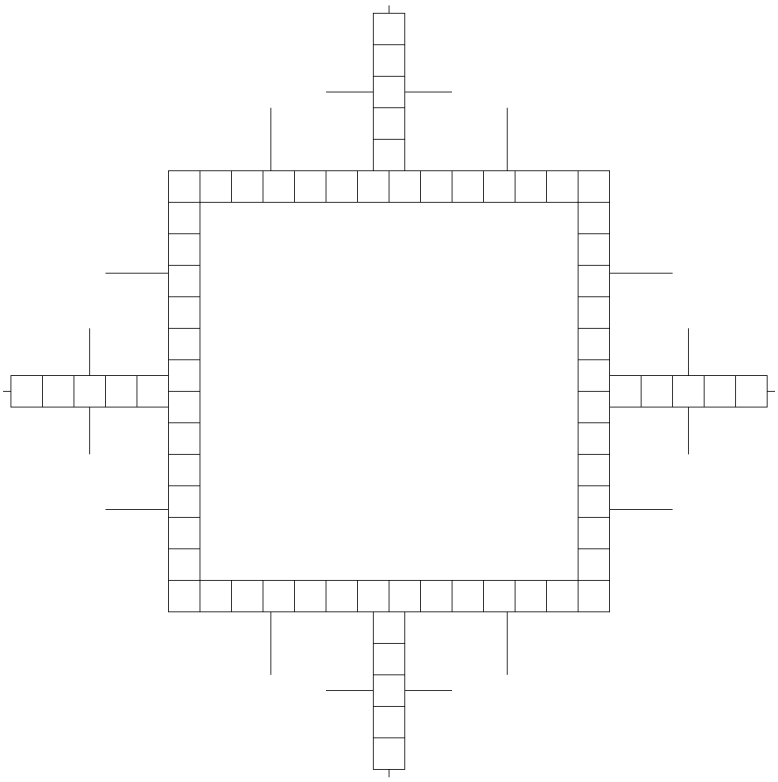
Drugi przykład jaki skonstruujemy jest wariacją na temat krzywej Kocha. Zbiór Λ konstruujemy następująco: w pierwszym kroku bierzemy kwadrat, w drugim dodajemy do niego cztery długie i wąskie prostokąty, w kolejnych krokach do każdego z boków otrzymanego wielokąta dodajemy kolejne prostokąty, coraz mniejsze ale o coraz większym stosunku boków. Nowe prostokąty dodajemy zawsze na środku boków, muszą one też spełniać warunek $2b + c = a(1 - \varepsilon)$ gdzie b i c są dłuższym i krótszym bokiem dodawanego prostokąta, a a bokiem wielokąta do którego go doklejamy (patrz rysunek 8). Warunek ten gwarantuje, że dodawane prostokąty będą rozłączne a cała figura nie wyjdzie poza zaznaczony na rysunku większy kwadrat.



Rysunek 8: Kontrprzykład 2

Zbiór Λ będzie brzegiem otrzymanej figury. Jego wymiar Hausdorffa (a więc także wymiar Minkowskiego) może być dowolnie bliski 2, w każdym razie będziemy zakładać że jest większy od 1. Spośród składowych uzupełnienia tego zbioru nieograniczona jest obszarem Johna, ograniczona nie.

Będziemy teraz konstruować uogólnione pokrycie Whitney'a dla tego zbioru. Zacznijmy od składowej ograniczonej uzupełnienia. Konstrukcję będziemy prowadzić równolegle do konstrukcji Λ (wymusza ona pewne warunki na wybór prostokątów w tamtej konstrukcji). W pierwszym kroku weźmy duży kwadrat, jedynie odrobinę mniejszy od kwadratu jaki mamy w pierwszym kroku konstrukcji Λ. W drugim kroku otaczamy ten kwadrat warstewką mniejszych kwadracików, oraz dodajemy cztery kolumny takich kwadracików, wchodzące w prostokąty dodane w drugim kroku konstrukcji Λ. Zarówno warstewka, jak i kolumny mają grubość jednego kwadraciku, zob. rysunek 9.



Rysunek 9: Kontrprzykład 2 - rozbicie

W n-tym kroku konstrukcji otaczamy wszystko co skonstruowaliśmy do tej pory jednoelementową warstewką mniejszych niż uprzednio kwadracików, a następnie dodajemy kolumienki wchodzące w prostokąty dodane w n-tym kroku konstrukcji Λ.

Jeżeli rozmiary kwadracików jakie używamy w n-tym kroku (a więc także grubość prostokątów, jakie dodajemy w n-tym kroku) zmniejszają się szybciej niż wykładniczo, to łatwo sprawdzić że wykładnik zbieżności tej rodziny jest równy 1 (możemy oszacować liczbę kwadratów użytych w n-tym kroku konstrukcji jako iloraz długości brzegu $(n-1)$-ego przybliżenia zbioru Λ – która rośnie wykładniczo – oraz boku używanych kwadracików).

Jest to przy tym uogólnione pokrycie Whitney'a składające się z kwadratów, możemy skonstruować nawet pokrycie Whitney'a o tym samym wykładniku zbieżności.

Pokryliśmy jednak jedynie ograniczoną składową uzupełnienia Λ. Składową nieograniczoną pokrywamy w podobny sposób – jednoelementowymi warstewkami coraz mniejszych zbiorów. Jednak ponieważ konstruując zbiór Λ dostawiamy prostokąty na zewnątrz, nie możemy używać kwadratów (musimy zostawić miejsce na dodawane prostokąty). Będziemy więc używać figur wyglądających jak kwadrat z powycinanymi na brzegu głębokimi ząbkami przeróżnych kształtów. Ponieważ cała zewnętrzna składowa Λ^c jest obszarem Johna, więc również to pokrycie można wybrać tak, by było jednostajną rodziną Johna. Wykładnik zbieżności tej części pokrycia szacujemy tak sam jak dla składowej ograniczonej. Natomiast nie ma żadnej możliwości uzyskać jakiekolwiek ograniczenie na wahanie wektora stycznego do brzegu elementów pokrycia.

Łącząc pokrycia w ograniczonej i nieograniczonej składowej Λ^c otrzymaliśmy więc uogólnione pokrycie Whitney'a będące jednostajną rodziną Johna, ze spójnymi przecięciami zbiorów i o wykładniku zbieżności ostro mniejszym od wymiaru Minkowskiego zbioru granicznego.

4 Podstawowe informacje o iteracyjnych układach funkcyjnych

4.1 Definicja

Iteracyjny układ funkcyjny jest to skończona (k-elementowa) rodzina kontrakcji $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ze wspólnie ograniczonym współczynnikiem kontrakcji, tj.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d \ \operatorname{dist}(f_i(x), f_i(y)) \leq \lambda \cdot \operatorname{dist}(x, y), \ \lambda < 1$$

Tak zadana rodzina odwzorowań określa odwzorowanie na przestrzeni Z zwartych niepustych podzbiorów $\mathbb{R}^d$:

$$F(X) = \bigcup_{i=1}^{k} f_i(X)$$

Na przestrzeni tej naturalna jest metryka zadana przez odległość Hausdorffa, określona wzorem:

$$d(X, Y) = \max(\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \operatorname{dist}(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \operatorname{dist}(x, y))$$

Przestrzeń (Z, d) jest zupełna. Hutchinson w pracy [Hu] pokazał, że odwzorowanie F jest kontrakcją na Z, zatem z twierdzenia Banacha istnieje dokładnie jeden punkt stały tego odwzorowania, czyli dokładnie jeden niepusty zwarty podzbiór $\mathbb{R}^d$ równy sumie mnogościowej swoich obrazów pod działaniem funkcji f_i. Jest on nazywany *zbiorem granicznym* i.u.f., będę go oznaczać przez Λ.

Zbiór ten można również zdefiniować inaczej, i tej właśnie definicji będziemy głównie używać. Wprowadźmy *przestrzeń symboliczną* $\Sigma = \{1, \ldots, k\}^{\mathbb{N}}$. Elementy tej przestrzeni będę oznaczać $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$. Będę także pisać $\omega^n = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ na oznaczenie skończonych ciągów symboli. Zbiór tych elementów $\omega \in \Sigma$, których ciąg n początkowych symboli równy jest ω^n, będę oznaczał C_{ω^n} i nazywał *cylindrem rzędu n*.

Na przestrzeni Σ wprowadzam topologię za pomocą metryki

$$\rho(\omega, \omega') = 2^{1 - \inf\{n; \omega_n \neq \omega'_n\}}$$

Jest to topologia równoważna topologii produktowej, więc przestrzeń (Σ, ρ) jest zwarta (twierdzenie Tichonowa). Każdemu skończonemu ciągowi symboli ω^n przyporządkowuję kontrakcję

$$f_{\omega^n} = f_{\omega_1} \circ \ldots \circ f_{\omega_n}$$

Definiuję następnie projekcję $\pi : \Sigma \to \mathbb{R}^d$ zadaną następującym wzorem:

$$\pi(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_{\omega^n}(0) \tag{4.1}$$

Granica w tej definicji istnieje i nie zmieni się, jeżeli zamiast 0 podstawimy jakikolwiek inny punkt jako początkowy. Zbieżność jest wykładnicza, nie wolniej niż λ^n. Odwzorowanie π jest ciągłe, a nawet hölderowskie. Zbiorem granicznym nazywamy obraz $\pi(\Sigma)$ przestrzeni symbolicznej przy tym rzutowaniu. Dla dowolnego punktu $x \in \Lambda$ jego *rozwinięciem symbolicznym* będę nazywać element $\omega \in \Sigma$ należący do $\pi^{-1}(x)$; nie musi być ono określone jednoznacznie.

Jeżeli Λ nie jest jednopunktowy (co może się zdarzyć), będę zawsze zakładał (przez odpowiednią zamianę zmiennych, jeśli zajdzie potrzeba), że Λ ma średnicę w przybliżeniu równą 1 (z dokładnością do stałej multiplikatywnej).

Przestrzeń symboliczna Σ jest w pewnym sensie dualna do zbioru granicznego Λ. Jak będzie widać, wiele konstrukcji i definicji wymagać będzie w naturalny sposób utożsamienia Σ i pewnych jej podzbiorów z pewnymi zbiorami otwartymi pokrywającymi Λ bądź jego podzbiory. Jest tak, gdyż dynamika na Λ zadana przez funkcje f_i jest faktorem dynamiki zadanej przez prawostronne przesunięcia na Σ:

$$f_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$$

W pewnych sytuacjach zbiór graniczny ma szczególnie łatwą do zanalizowania strukturę. Dzieje się tak w szczególności kiedy spełniony jest tak zwany *warunek zbioru otwartego* (OSC), czyli kiedy istnieje taki zbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}^d$, że

$$\forall i \neq j \qquad f_i(V) \cup f_j(V) = \emptyset \tag{4.2}$$

$$\forall i \qquad f_i(V) \subset V \tag{4.3}$$

Jeżeli nie tylko zbiory $f_i(V)$, ale także zbiory $f_i(\bar{V})$ są rozłączne (jest to tak zwany *silny warunek zbioru otwartego*, SOSC), to projekcja π jest różnowartościowa, każdy punkt z Λ ma dokładnie jedno rozwinięcie symboliczne, a zbiór Λ jest całkowicie niespójnym zbiorem doskonałym (zbiorem Cantora). Jeżeli jest spełniony jedynie OSC, to mogą istnieć punkty z wieloma symbolicznymi rozwinięciami, jest ich jednak niewiele (ich wymiar jest mniejszy od wymiaru całego zbioru).

Będę żądał, aby wszystkie odwzorowania f_i były gładkimi (co najmniej w klasie $C^{1+\beta}$, tj. różniczkowalnymi i z pierwszą pochodną hölderowską) dyfeomorfizmami. Będę także zakładał, że są one konforemne na pewnym otwartym otoczeniu Λ. W $\mathbb{R}^1$ założenie konforemności jest spełnione automatycznie. Zgodnie z twierdzeniem Liouville'a dla $d \geq 3$ jedynymi (lokalnie) konforemnymi dyfeomorfizmami są złożenia inwersji, jednokładności i obrotów, [BP].

Ponieważ odwzorowania f_i są kontrakcjami ze stałymi kontrakcji wspólnie oddzielonymi od 1, więc również dowolne ich złożenia f_{ω^n} są w klasie $C^{1+\beta}$ dla tej samej β i dla wspólnie ograniczonej stałej.

Niech U będzie zbiorem otwartym regularnym, zawierającym Λ. Zbiór U wybieramy tak, by domknięcia jego obrazów były w nim zawarte:

$$f_i(\bar{U}) \subset U$$

(np. dowolne r-otoczenie zbioru Λ spełnia ten warunek). W tym przypadku zbiory $\bar{U}, F(\bar{U}), F^2(\bar{U}), \ldots$ tworzą zagnieżdżony ciąg zbiorów zwartych, zaś

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(\bar{U}) \tag{4.4}$$

Zbiory $f_{\omega^n}(U)$ nazywamy *cylindrami rzędu n* (w *przestrzeni konfiguracyjnej* $\mathbb{R}^d$) i oznaczamy L_{ω^n}. Cylinder $C_{\omega^n} \subset \Sigma$ nazywam *podniesieniem* L_{ω^n}. Dla cylindra L_{ω^n} (lub C_{ω^n}, w przestrzeni symbolicznej) jego *rozwinięciem symbolicznym* będę nazywać ciąg ω^n.

Dziećmi cylindra L_{ω^n} będę nazywał cylindry $L_{\omega^n,i}$. W przypadku OSC są to cylindry bezpośrednio wyższego rzędu, zawarte w L_{ω^n}. Cylinder L_{ω^n} będę z kolei nazywał *rodzicem* jego dzieci. Potomków i przodków wyższych rzędów definiuję w podobny sposób. Analogiczne definicje będę stosować dla cylindrów w przestrzeni symbolicznej.

Z powodu konforemności przekształceń f_i, spełniony jest na pewnym otoczeniu Λ *warunek dystorsji*

$$\exists K\ \forall \omega^n\ \forall x, y \in U \quad \frac{1}{K} \leq \frac{Df_{\omega^n}(x)}{Df_{\omega^n}(y)} \leq K \tag{4.5}$$

gdzie Df oznacza pierwiastek stopnia d z wartości bezwzględnej jakobianu różniczki odwzorowania f (nasze odwzorowania są konforemne, zatem jest to po prostu lokalny współczynnik kontrakcji odwzorowania f).

Natychmiastowym wnioskiem jest fakt następujący:

$$\exists K\ \forall \omega^n\ \forall x, y \in U \quad \frac{1}{K} \leq \frac{\mathrm{dist}(f_{\omega^n}(x), f_{\omega^n}(y))}{\mathrm{dist}(x, y)} \leq K \tag{4.6}$$

co implikuje, że cylindry L_{ω^n} są jednakowo regularne dla dowolnie dużych n.

Ponadto, jeśli przez L oznaczymy najmniejszą wartość $Df_i(x)$ wziętą po wszystkich $x \in U$ i po wszystkich i, to

$$\forall \omega^n \ \forall i \ \ L \leq \frac{\operatorname{diam}(f_i(L_{\omega^n}))}{\operatorname{diam}(L_{\omega^n})} \leq \lambda. \tag{4.7}$$

Zauważmy, że

$$\pi(C_{\omega^n}) = f_{\omega^n}(\Lambda) \subset L_{\omega^n}$$

Zatem, jeżeli pewna rodzina cylindrów $C_{\omega^{n_i}}$ tworzy pokrycie Σ, to odpowiadające im cylindry $L_{\omega^{n_i}}$ tworzą pokrycie Λ.

Zdefiniujmy następujące *pokrycie Morana*, [Mo]. Mianowicie, niech l będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, nie przekraczającą $\operatorname{diam} U$. Pokryciem Morana *rozmiaru* l nazywamy skończone pokrycie zbioru granicznego Λ cylindrami $L_{\omega^{n_i}}$, których średnice zawierają się między l a $L \cdot l$ włącznie i których podniesienia $C_{\omega^{n_i}}$ w przestrzeni symbolicznej są rozłączne.

Konstrukcja jest iteracyjna. W pierwszym kroku mamy pokrycie Λ jednym cylindrem $L_\emptyset = U$. Dla każdego cylindra w konstruowanej rodzinie sprawdzam, czy któreś z jego dzieci ma średnicę mniejszą od $L \cdot l$. Jeżeli nie, to zastępuję cylinder przez rodzinę jego dzieci i powtarzam procedurę dla każdego z nich. Jest to zastąpienie cylindra przez rodzinę jego podcylindrów, których podniesienia w Σ są rozłączne. Zatem w każdym kroku konstruowana rodzina składa się z cylindrów o rozłącznych podniesieniach. Konstrukcję przerywam kiedy w konstruowanej rodzinie nie ma już więcej cylindrów których wszystkie dzieci mają średnicę większą od $L \cdot l$.

Ponieważ cylindry n-tego rzędu mają średnicę nie większą niż $\lambda^n \cdot \operatorname{diam}(U)$ (4.7), więc procedura zatrzyma się po skończonej ilości kroków. Każdy z cylindrów, dla którego procedura staje, ma średnicę mniejszą od l ze względu na (4.7). Równocześnie w rodzinie nigdy nie pojawią się cylindry o średnicach mniejszych od $L \cdot l$. Zatem otrzymane pokrycie Λ jest faktycznie pokryciem Morana. Będę je oznaczać je Λ_l.

Poniżej podaję dwie własności cylindrów, z których będę korzystać w kolejnych rozdziałach. Pierwszy lemat jest bezpośrednim wnioskiem z konstrukcji pokrycia Morana.

Lemat 4.1. *Istnieje taki ściśle malejący ciąg l_n, że do któregoś z pokryć Λ_{l_n} (niekoniecznie tylko jednego) należy każda para rozłącznych cylindrów wystarczająco bliskiego rozmiaru (z dokładnością do małej stałej multiplikatywnej), o ile żaden nie jest przodkiem drugiego. Ciąg ten można wybrać w taki sposób by $l_n \approx l_0^n$ dla pewnego l_0 bliskiego 1.*

Lemat 4.2. *Jeżeli zbiór graniczny Λ nie jest jednopunktowy, to dla dowolnego cylindra pewna para jego potomków jest nie tylko rozłączna ale także oddalona od siebie o więcej niż c razy średnica większego z nich; przy tym można je wybrać tak, by każdy z nich miał średnicę większą niż l_N razy średnica cylindra wyjściowego. Liczba N zależy nie tylko od u.i.f. ale także od wyboru pierwszego cylindra U.*

Dowód. Z warunku ograniczonej dystorsji (4.6) własność tę wystarczy pokazać dla $N' = K \cdot N$ i wyjściowego cylindra U, gdyż odwzorowanie f_{ω^n} przenosi nie tylko U na L_{ω^n}, ale także potomków U (czyli wszystkie cylindry) na potomków L_{ω^n}. Ale dla U wystarczy wziąć dwa cylindry odpowiednio małe i zawierające możliwie odległe punkty zbioru granicznego Λ; cylindry takie muszą istnieć, bo pokrycie Morana pokrywa zbiór graniczny. □

W przypadku gdy zachodzi warunek SOSC zbiory tworzące pokrycie Morana użyjemy do wyliczenia wymiaru Hausdorffa zbioru Λ. Znajdziemy mianowicie miarę ν o nośniku w Λ taką, że

$$\nu(L_{\omega^n}) \approx (\mathrm{diam}(L_{\omega^n}))^s \tag{4.8}$$

dla pewnego s. Wtedy (z lematu Frostmana) wymiar Hausdorffa Λ równy jest s. Można stosować lemat Frostmana, gdyż miara taka musi być geometryczna: pokrycie Morana składa się z rozłącznych zbiorów otwartych regularnych, więc kula o promieniu cl przetnie co najwyżej c' cylindrów z pokrycia Morana rozmiaru l i będzie zawierać co najmniej jeden z nich (dla dużego c i odpowiednio dobranego c').

Miara ta będzie projekcją miary μ, określonej na Σ i spełniającej warunek analogiczny do (4.8):

$$\mu(C_{\omega^n}) \approx (\mathrm{diam}(L_{\omega^n}))^s \tag{4.9}$$

Miarę μ można zdefiniować także wtedy, gdy warunek OSC nie jest spełniony. Jest ona niezmiennicza przy działaniu lewostronnego przesunięcia na Σ.

Najpierw rozpatrzmy (za [Mo] i [Hu]) przypadek szczególny: niech wszystkie odwzorowania f_i będą podobieństwami, o stałych kontrakcji równych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Oznaczmy przez s jedyne rozwiązanie równania

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^s = 1 \tag{4.10}$$

Niech μ będzie miarą Bernoulliego na przestrzeni Σ ze współczynnikami $(\lambda_1^s, \ldots, \lambda_k^s)$. Miara taka jest probabilistyczna z warunku (4.10). Miarę ν zadajemy jako projekcję

$$\nu = \pi_*(\mu) \tag{4.11}$$

Jak łatwo sprawdzić, spełnia ona założone warunki.

Manning i McCluskey w [MM] oraz Bowen w [Bo2] podali sposób na uogólnienie tej metody na przypadek ogólny. Określmy na Σ rodzinę funkcji ϕ_t następującym wzorem:

$$\phi_t(\omega) = t \cdot \log(Df_{\omega_1} \circ \pi(\sigma_-(\omega))$$

Są to funkcje hölderowskie, gdyż zarówno Df_i jak i π są hölderowskie. Niech s oznacza najmniejszą (i jedyną) wartość t, dla której ciśnienie funkcji ϕ_t równe jest 0 – jest to uogólnienie równania (4.10). Jako μ wybieramy miarę Gibbsa dla potencjału ϕ_s, ν jest zadana wzorem (4.11), podobnie jak poprzednio.

Z definicji miary Gibbsa

$$\nu(L_{\omega^n}) = \mu(C_{\omega^n}) \approx \exp(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_s(\sigma_-^i(\omega)))$$

dla dowolnie wybranego $\omega \in C_{\omega^n}$. Wyrażenie po prawej stronie jest to po prostu $(Df_{\omega^n}(x))^s$ w pewnym punkcie $x \in U$. To zaś, z warunku dystorsji (4.5), jest (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) s-tą potęgą średnicy cylindra L_{ω^n}, czyli miara ν spełnia założenia lematu Frostmana.

Powyżej udowodniliśmy faktycznie coś więcej. Po pierwsze, ponieważ wszystkie stałe z dokładnością do których przeprowadzaliśmy powyższe rozumowanie są zadane jednostajnie (ta sama wartość działa dla dowolnie dużego n), miara ν jest równoważna s-wymiarowej mierze Hausdorffa. Oznacza to, że Λ ma dodatnią i skończoną s-wymiarową miarę Hausdorffa. Po drugie, wymiary Hausdorffa i Minkowskiego zbioru granicznego są równe (jest to szczególny przypadek twierdzenia Falconera [Fa2]). Faktycznie, cylindry nale- żące do pokrycia Morana rozmiaru l mają (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) tę samą miarę l^s. Ponieważ miara jest probabilistyczna, więc oznaczając moc pokrycia Morana rozmiaru l przez M_l otrzymujemy

$$M_l \approx l^{-s} \tag{4.12}$$

Stąd

$$\dim_H(\Lambda) = \dim_M(\Lambda) = \lim_{l \to 0} \frac{\log M_l}{-\log l} = s$$

Wzór ten zachodzi również, gdy spełniony jest jedynie warunek OSC. Wprawdzie cylindry rozbicia Morana nie są wtedy rozłączne, ale można dobrać taki zbiór U, aby zachodziły na siebie tylko troszeczkę (tj. aby każdy cylinder należący do rozbicia Morana rozmiaru l zawierał kulę o promieniu cl, rozłączną z pozostałymi cylindrami). Jako przykład można wziąć U równe pewnemu ε-otoczeniu zbioru V spełniającego (4.3). Wtedy miara ν także spełnia założenia lematu Frostmana.

Jeśli jednak OSC nie jest spełniony, to sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana. Powyższe rozumowanie, łącznie z twierdzeniem Falconera, daje nam tylko nierówność

$$\dim_H(\Lambda) = \dim_M(\Lambda) \leq s \tag{4.13}$$

Liczbę s będę nazywał *wymiarem podobieństwa* (similarity dimension).

W przypadku u.i.f. nie spełniających OSC (tzw. u.i.f. *z samoprzecięciami*) nie potrafimy zazwyczaj zbyt dużo powiedzieć dla konkretnego układu. Z tego powodu rozważa się zwykle całe rodziny układów, zależnych od jednego albo wielu parametrów. W przypadku u.i.f. w $\mathbb{R}^d$ będziemy się zajmować d-parametrowymi rodzinami; parametry będę oznaczać przez $t_1, \ldots, t_d$.

Oto przykład dwu rodzin u.i.f., jakie były badane i dla których działają twierdzenia w pracy:

Przykład 4.3. $k = 3$

$f_1(x) = \lambda x$

$f_2(x) = \lambda x + 1$

$f_3(x) = \lambda x + 3$, gdzie $1/4 < \lambda < 2/5$.

Badanie tego u.i.f. nosi nazwę $(0, 1, 3)$ *problemu*, zostało zaproponowane przez Keane, Smorodinsky'ego i Solomyaka [KSS]. Pozostałe wartości parametru λ nie prowadzą do ciekawych sytuacji – dla $\lambda \leq 1/4$ układ ten spełnia OSC dla odpowiednio dobranego odcinka otwartego U, dla $\lambda \geq 2/5$ zbiór graniczny jest odcinkiem.

Wiadomo ([PoSi]), że dla prawie wszystkich parametrów λ w przedziale $(1/4, 1/3)$ wymiar Hausdorffa zbioru granicznego równy jest jego wymiarowi podobieństwa $s = \frac{\log 3}{-\log \lambda}$. Jest to nawet prawda dla wszystkich parametrów za wyjątkiem zbioru o lokalnym wymiarze Hausdorffa nie większym od $s(\lambda)$ – wynika to zarówno z pracy Pollicotta i Simona (choć wypisane tam explicite szacunki są gorsze) jak i z moich wyników, jest to szczególny przypadek twierdzenia 5.1. Mimo to ([So1]), dla prawie wszystkich parametrów λ w przedziale $(1/4, 1/3)$ warunek OSC nie jest spełniony. Dla prawie wszystkich parametrów λ z przedziału $(1/3, 2/5)$ miara ν jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a na prostej, a jej gęstość jest całkowalna z kwadratem

([So2]). Peres i Schlag w [PeSch] pokazali, że również w tym wypadku zbiór wyjątkowych parametrów ma lokalny wymiar Hausdorffa nie większy od $2-s$.

Przykład 4.4. $k = 2$
$f_1(x) = \lambda x$
$f_2(x) = \lambda x + 1$
Jest to problem postawiony przez Erdösa. Zapytał on (i dał częściową odpowiedź, [E1] i [E2]) czemu będzie równa w tej sytuacji miara ν. Dokładnie pytanie jego brzmiało: dla jakich parametrów miara ta będzie absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Interesująca jest jedynie sytuacja dla $\lambda \geq 1/2$, w przeciwnym wypadku zachodzi OSC a wymiar Hausdorffa tej miary jest ściśle mniejszy od 1. Solomyak w [So2] pokazał, że dla prawie wszystkich wartości parametru λ w przedziale $(1/2, 1)$ miara ν jest absolutnie ciągła i z gęstością w L^2, następnie Peres i Schlag w [PeSch] pokazali, że zbiór wyjątkowych parametrów ma lokalny wymiar Hausdorffa nie większy od $2-s$.

Naturalnie, przy badaniu rodzin układów trzeba narzucić pewne warunki (tzw. *warunki transwersalności*, pierwszy raz użyte przez Pollicotta i Simona w [PoSi]) aby zmiana parametru rzeczywiście zmieniała coś w zachowaniu układu. Warunki jakie podali Pollicott i Simon (w jednowymiarowej sytuacji, dla $(0, 1, 3)$-problemu) miały następującą postać:

$$\exists c, c' \; \forall \omega, \omega'; \; \omega_1 \neq \omega_1' \quad |h_t(\omega, \omega')| < c \implies |\frac{d}{dt} h_t(\omega, \omega')| > c' \tag{4.14}$$

gdzie

$$h_t(\omega, \omega') = \pi_t(\omega) - \pi_t(\omega')$$

Oznaczają one, że nawet gdy dla dowolnej wartości parametru t pewne bliskie siebie punkty mają rozwinięcia bardzo odległe (zatem drobną zmianą parametru można spowodować by jeden punkt miał wiele różnych rozwinięć), każda taka sytuacja trwa krótko (zachodzi tylko dla krótkiego przedziału parametrów). Innymi słowy, funkcja $h_t(\omega, \omega')$ nie może mieć podwójnych zer, a nawet ma w otoczeniu dowolnego ze swoich zer pochodną oddzieloną od zera.

Praca Peresa i Schlaga [PeSch] zawiera bardzo ogólny wynik o obrazach miar (uogólnienie twierdzenia Marstranda). Rozważają oni miarę μ na zwartej przestrzeni metrycznej Ω oraz jej rzuty $\nu_t = \mu \circ \pi_t^{-1}$, gdzie π_t są to gładko zależące od t odwzorowania z Ω w $\mathbb{R}^m$. Zakładają także pewne warunki transwersalności (podobne do powyższych, ale dodatkowo także coś o wyższych pochodnych funkcji h_t). Przy tych założeniach, otrzymują oni rezultat, którego nie przytoczę (gdyż zapisany jest w terminach energii i norm Sobolewa), ale który w powyższych przykładach sprowadza się do podanych wyżej wyników.

Warunki jakich będę potrzebował w tej pracy są nieco słabsze. Potrzebuję mieć spełnione podobne warunki jedynie dla większości par (ω, ω'), ponadto funkcja h_t (podobnie jak u Peresa i Schlaga) może mieć podwójne, potrójne itd. zera – ale wtedy rezultat (szacowanie na wymiar wyjątkowych parametrów) się pogarsza. Dokładne sformułowanie podam później.

4.2 Uogólnienia

Wszystkie powyższe geometryczne rezultaty nie wymagają konforemności odwzorowań f_i na całej przestrzeni. Dla uzyskania ograniczonej dystorsji wystarczy konforemność każdego z nich na jakimkolwiek otwartym otoczeniu zbioru granicznego. Mianowicie, takie otoczenie ma jedynie skończenie wiele składowych przecinających Λ. Można więc wziąć dla odpowiednio dużego n otwarte regularne otoczenia zbiorów $\pi(C_{\omega^n})$, zawarte w obszarze konforemności u.i.f. Oznaczmy je L_{ω^n}, jak uprzednio. Jeśli dobrać je tak, by

$$f_i(L_{\omega_1,\dots,\omega_n}) \subset L_{i,\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}$$

to zbiory L_{ω^n} można traktować jak cylindry rzędu n. Wszystkie cylindry wyższych rzędów definiujemy jako ich odpowiednie obrazy. Cylindrów rzędu mniejszego niż n nie musimy definiować w ogóle – wszystkie dowody wymagają ograniczonej dystorsji i innych własności jedynie dla cylindrów dużych rzędów. Tak naprawdę konforemność jest nam potrzebna głównie po to, aby uzyskać ograniczoną dystorsję.

U.i.f. można traktować jak projekcję przesunięcia na przestrzeni symbolicznej $\Sigma = \Sigma_A$ dla macierzy przejścia A składającej się z samych jedynek. Można jednak rozpatrywać także sytuację ogólniejszą, układy takie nazywa się *soficznymi* (sofic systems). Geometrycznie warunek ten oznacza, że mamy pewną rodzinę kontrakcji f_i, ale w każdym kroku możemy podziałać nie dowolną z nich, a jedynie niektórymi, zależnie od odwzorowania użytego uprzednio. Możliwą kolejność zadaje nam macierz przejścia A.

Jedynym ciekawym przypadkiem jest, kiedy macierz ta jest tranzytywna – będę to w dalszym ciągu zakładał – inaczej zbiór graniczny jest sumą skończonej lub przeliczalnej ilości zbiorów granicznych dla pewnych mniejszych układów soficznych.

W takim wypadku możemy, jak wyżej, zdefiniować zbiór graniczny (obie definicje działają), pokrycie Morana i pierwsze zero ciśnienia s oraz znaleźć miarę ν przy pomocy formalizmu termodynamicznego. Jeżeli układ spełnia odpowiednio przeformułowaną wersję OSC (nie obchodzi nas, czy wszystkie obrazy zbioru są rozłączne – wystarczy, by były parami rozłączne wszystkie obrazy, które mogą się zdarzyć równocześnie, tj. spełniające warunek $A^n_{ki} = A^n_{kj} = 1$ dla pewnego n oraz k), to wymiar Hausdorffa zbioru granicznego równy jest s a jego s-wymiarowa miara Hausdorffa jest dodatnia i skończona.

Jeżeli OSC nie zachodzi, to wciąż działa nierówność (4.13), a wymiary Hausdorffa i Minkowskiego są równe.

Innym możliwym uogólnieniem, jakim będziemy się zajmować, jest dopuszczenie nieskończonych i.u.f. W tym wypadku nie musi istnieć zbiór otwarty, którego obrazy są w nim zawarte – będziemy zawsze to zakładać. Podobnie, nie musi w ogóle istnieć zwarty niepusty zbiór niezmienniczy – będziemy zbiór graniczny określać poprzez projekcję z przestrzeni symbolicznej na nieskończenie wielu symbolach (nie jest to w ogólności zbiór zwarty). Wreszcie, warunki dystorsji (4.5) nie muszą być spełnione, trzeba je założyć, zaś warunek (4.7) spełniony być nie może.

Będziemy musieli używać formalizmu termodynamicznego dla nieskończenie wielu symboli, rozwiniętego przez Mauldina i Urbańskiego [MU1]. Okazuje się, że nie zawsze istnieje taka wartość s, dla której ciśnienie się zeruje. Można znaleźć kontrprzykłady nawet dla układów odwzorowań liniowych.

Przykład 4.5. Niech $\lambda_i = c\frac{1}{i(\log i)^2}$, gdzie c jest tak dobrane by $\sum \lambda_i < 1$. Oczywiście $\sum \lambda_i^t = \infty$ dla dowolnego $t < 1$, ale dla $t \geq 1$ suma ta jest zawsze mniejsza od jedynki. Wtedy dla układu nieskończenie wielu odwzorowań liniowych o stałych kontrakcji równych λ_i ciśnienie się nigdy nie zeruje.

Układy, dla których istnieje s, w którym ciśnienie się zeruje (jest najwyżej jedno takie s) nazywają się *regularnymi*; dalej będę się zajmował tylko regularnymi nieskończonymi u.i.f.

Ich formalna definicja jest następująca: nieskończony u.i.f. (f_i) nazywamy regularnym, jeśli dla pewnych n, s' oraz s''

$$\underline{M}_n(s') > 1 > \overline{M}_n(s'') \tag{4.15}$$

gdzie

$$\underline{M}_n(s) = \sum_{\omega^n} \underline{\lambda}^s_{\omega^n}$$

a $\underline{\lambda}_{\omega^n}$ jest to infimum lokalnego współczynnika kontrakcji jaki odwzorowanie f_{ω^n} przyjmuje na pewnym otoczeniu zbioru granicznego. $\overline{M}_n(s)$ definiuje się podobnie, tylko używając supremum lokalnego współczynnika kontrakcji (czyli globalną stałą kontrakcji).

Funkcje $\underline{M}_n(\tilde{s})$ i $\overline{M}_n(\tilde{s})$ są malejące względem $\tilde{s}$, zwiększenie $\tilde{s}$ o c powoduje zmniejszenie każdej z nich co najmniej λ^{nc} razy, gdzie λ jest największym ze współczynników kontrakcji odwzorowań f_i. Zatem pochodna po $\tilde{s}$ logarytmu każdej z tych funkcji jest nie większa od $n \log \lambda < 0$, zatem oddzielona od zera.

Ponieważ wszystkie odwzorowania f_{ω^n} spełniają warunki dystorsji (4.5), więc $\underline{M}_n(\tilde{s})$ i $\overline{M}_n(\tilde{s})$ różnią się co najwyżej o stałą multiplikatywną $K^{\tilde{s}}$.

Poniższy lemat jest standardowy

Lemat 4.6. *Ciągi* $\frac{1}{n} \log \underline{M}_n(\tilde{s})$ *oraz* $\frac{1}{n} \log \overline{M}_n(\tilde{s})$ *są zbieżne i mają wspólną granicę.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że pierwszy z nich jest (po pomnożeniu przez n) nadaddytywny, drugi podaddytywny, a różnica między ich n-tymi wyrazami szacuje się przez c/n (z warunku dystorsji (4.5)). Stąd oraz z (4.15) wynika także, że warunek (4.15) pozostanie spełniony dla wszystkich $\acute{n} > n$.

Ciśnieniem nazywam następującą funkcję:

$$P(\tilde{s}) = \log \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \underline{M}_n(\tilde{s}) \tag{4.16}$$

Zachodzi przy tym nierówność $P(x + c) < P(x) + c \cdot \log \lambda$.

Wymiarem podobieństwa nazywam jedyną liczbę rzeczywistą, dla której ciśnienie się zeruje. Będę ją oznaczał przez s. Zauważmy, że s jest większe od s', występującego w (4.15). Ponadto z (4.15) wynika, że

$$\sum \underline{\lambda}_{\omega^n}^{s} \log \underline{\lambda}_{\omega^n} < \infty \tag{4.17}$$

(gdyż zgodnie z (4.15) zbieżny jest nawet szereg $\sum \underline{\lambda}_{\omega^n}^{s(1+\varepsilon)}$).

Kolejnym problemem, pojawiającym się dla nieskończonych u.i.f. jest nieistnienie pokrycia Morana. W ogólności cylindrami o mniej więcej takich samych rozmiarach można pokryć tylko część zbioru granicznego. Jedną z konsekwencji jest fakt, że wymiar Hausdorffa nie musi być równy wymiarowi Minkowskiego. Natomiast wymiary Minkowskiego i pakujący są zawsze równe, nawet dla nieregularnych nieskończonych u.i.f.

Natomiast pozytywnymi wynikami, jakie można uzyskać dla regularnych nieskończonych u.i.f. są:

- wymiar Hausdorffa zbioru granicznego równy jest s,
- s-wymiarowa miara Hausdorffa zbioru granicznego jest dodatnia i skończona,

- istnieje miara Gibbsa μ na Σ, a jej projekcja ν jest równoważna s-wymiarowej mierze Hausdorffa.

Wyniki te należą do Mauldina i Urbańskiego [MU1].

Przedstawię teraz konstrukcję, którą można dla nieskończonych u.i.f. w dużym stopniu zastąpić pokrycie Morana. Ustalmy małą stałą L. Rozpatrzmy rodzinę wszystkich cylindrów, których średnice są między l a lL. Rodzinę tę będę nazywał pokryciem Morana rozmiaru l ze skokiem L, i oznaczał $\Lambda_{l,L}$. Nazwa ta jest może trochę myląca, jako że rodzina ta nie jest pokryciem całego zbioru granicznego. Również rodzina podniesień tych cylindrów nie składa się z rozłącznych cylindrów w Σ, ale każdy punkt z Σ który należy do jakiegoś ze zbiorów z tej rodziny należy jeszcze do co najwyżej c innych, gdzie c zależy od L ale nie od l.

Stwierdzenie 4.7. *Dla regularnego u.i.f. dla odpowiednio małych L oraz l*

$$\mu(\bigcup_{C\in\Lambda_{l,L}} C) \geq \gamma(L)$$

przy czym $\gamma(L)$ zbiega do 1 kiedy L dąży do nieskończoności.

Dowód. Przyjmijmy (bez zmniejszania ogólności), że warunek (4.15) zachodzi dla $n = 1$ (w przeciwnym wypadku możemy zamiast układu f_i rozpatrywać układ f_{ω^n}, pokrycie Morana dowolnego rozmiaru jedynie się zmniejszy). Ustalmy L. Niech l nie przekracza średnicy Λ.

Sumę mnogościową wszystkich cylindrów C_{ω^n} dla których zachodzi nierówność $L^{i-1} > \underline{\lambda}_{\omega^n} \geq L^i$ będę oznaczał K_i. Podobnie, niech A_i oznacza sumę mnogościową tych cylindrów pierwszego rzędu C_j dla których $L^{i-1} > \underline{\lambda}_j \geq L^i$.

Zachodzą następujące zależności:

$$\mu(K_1^c) = 1 - \mu(A_1)$$

$$\mu(K_n^c) \leq (1 - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu(K_i)(c \cdot \sum_{j=n-i+1}^{\infty} \mu(A_j))$$

Nierówność ta wynika stąd, że dla dowolnego ciągu symboli ω, ciąg $\underline{\lambda}_{\omega^n}$ maleje do zera. Zatem do zbioru K_n^c należą ciągi $\omega \in \Sigma$, dla których albo $\underline{\lambda}_{\omega_1} < L^{-n}$ (pierwszy wyraz), albo dla pewnego m $\underline{\lambda}_{\omega^m} \geq L^{1-n}$ oraz $\underline{\lambda}_{\omega^{m+1}} < L^{-n}$ (czego oszacowaniem z góry jest drugi wyraz). Korzystam tutaj ze wzoru

$$\frac{1}{c} < \frac{\mu(C_{\omega^n})\mu(C_i)}{\mu(C_{\omega^n i})} < c$$

wynikającego z ograniczonej dystorsji (4.5) oraz warunku na miarę μ (4.9).

$$\mu(K_n) = 1 - \mu(K_n^c) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(K_i)(c \cdot \sum_{j=n-i+1}^{\infty} \mu(A_j))$$

Ponieważ zaś miara żadnego ze zbiorów K_n nie przekracza 1, więc nierówność tę można przepisać następująco:

$$\mu(K_n) \geq \mu(A_1) - c\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)\mu(A_i) \geq \mu(A_1) + \frac{c'}{\log L}\sum_{\underline{\lambda}_i < L} \underline{\lambda}_i^s |\log \underline{\lambda}_i|$$

Szereg ten jest zbieżny z (4.17). Zauważmy, że wyrażenie to jest niezależne od n, przy tym zbiega do 1 gdy L dąży do zera. Równocześnie wyrażenie to jest dolnym oszacowaniem na $\gamma(L^2)$, gdyż jeśli $L^m < l \leq L^{m-1}$, to każdy cylinder z K_{m+1} należy do Λ_{l,L^2}. $\square$

Kolejnym możliwym uogólnieniem (dokonanym w [MU2]) jest dopuszczenie istnienia punktów parabolicznych dla u.i.f. na $\mathbb{R}^1$. Paraboliczny i.u.f. składa się z $(k-1)$ kontrakcji oraz jednego odwzorowania f_k z punktem parabolicznym x_0. Odwzorowanie to ma być dyfeomorfizmem klasy $C^{1+\varepsilon}$, a także kontrakcją wszędzie poza x_0, gdzie jego pochodna równa jest ± 1. Żądamy ponadto, aby

$$|1 - |f_k'(x)|| \approx |x - x_0|^\beta$$

gdzie $\beta < \varepsilon/(1-\varepsilon)$. Ponadto żądamy, by punkt x_0 leżał poza zbiorem granicznym dla i.u.f. $(f_1, \ldots, f_{k-1})$.

W takim wypadku możemy, stosując metodę z [MU2], zastąpić nasz paraboliczny u.i.f. przez nieskończony u.i.f. składający się z odwzorowań postaci $f_k^n \circ f_i$ gdzie $n \geq 0$ a $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Układ ten będzie regularny, a jego zbiór graniczny będzie się różnił od zbioru granicznego dla wyjściowego układu parabolicznego (zadanego jako obraz Σ przy odwzorowaniu π zadanym wzorem (4.1)) co najwyżej o zbiór przeliczalny: punkt x_0 i całą jego trajektorię. Zatem będą mieć ten sam wymiar Hausdorffa.

5 Liniowe układy iteracyjne funkcji ze stałymi współczynnikami kontrakcji

5.1 Wprowadzenie

Zanim przedstawię (w kolejnych rozdziałach) pełne dowody twierdzeń 7.11 oraz 7.14, chciałbym najpierw przedstawić dowody tych twierdzeń w szczególnym, prostym przypadku. Właściwe dowody w pełnej ogólności przebiegają podobnie, ale poszczególne kroki wymagają dodatkowych technicznych uzasadnień, utrudniających zrozumienie właściwej linii rozumowania.

W tym rozdziale będę się więc zajmował liniowymi iteracyjnymi układami funkcyjnymi na prostej o jednakowych stałych kontrakcji, tj. układami postaci

$$f_i(x) = \lambda x + a_i,$$

$i = 1, \ldots, k$, gdzie stałe λ oraz k nie zależą od i. Będę również rozpatrywał jednoparametrowe rodziny takich u.i.f., w których jedynie a_i, ale nie λ, zależą od parametru t; zakładam przy tym, że zależność ta jest klasy C^2. Będę również zakładać, że zachodzi warunek transwersalności w wersji podanej przez Pollicotta i Simona (4.14). Bez zmniejszenia ogólności dzięki zmianie współrzędnych mogę założyć, że a_1 jest tożsamościowo równe zeru dla dowolnego t.

W tym wypadku wymiar podobieństwa wynosi

$$s = \frac{\log k}{-\log \lambda} \tag{5.1}$$

i nie zależy od parametru t. Przestrzeń symboliczna w naszym przypadku równa jest $\Sigma = \{1, \ldots, k\}^{\mathbb{N}}$, zaś miara Gibbsa μ na niej określona jest to po prostu miara Bernoulliego równomiernie rozłożona na k symbolach.

Twierdzenia jakie będę dowodził przybierają w tym szczególnym przypadku postać następującą:

Twierdzenie 5.1. *Dla dowolnej liczby $p < \min(s, 1)$ zbiór B_p parametrów t, dla których wymiar Hausdorffa zbioru granicznego $\Lambda(t)$ jest nie większy od p, ma wymiar Hausdorffa nie większy od p.*

Twierdzenie 5.2. *Jeśli $s > 1$, to zbiór G parametrów t, dla których miara $\nu = \pi(t)_*(\mu)$ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a a jej gęstość jest całkowalna z kwadratem, jest pełnej miary.*

Oba twierdzenia 5.1 i 5.2 zostaną udowodnione poprzez najpierw sformułowanie pewnych warunków koniecznych, jakie musi spełniać u.i.f. aby mógł się zachować nietypowo, a następnie wykazanie (używając warunku transwersalności), że zbiór parametrów dla których podobna sytuacja może nastąpić jest mały (wymiaru co najwyżej p w pierwszym przypadku, zerowej miary Lebesgue'a w drugim). Warunki jakich będziemy używać oraz część rozumowań są uogólnieniem wyników pracy Simona i Solomyaka [SS].

Warunki sformułuję w terminach liczby przecięć cylindrów. Niech U będzie dowolnie wybranym odcinkiem otwartym, zawierającym zbiór graniczny $\Lambda(t)$ dla $t \in (t_0, t_1)$. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że odcinek ten ma długość 1. Konstruujemy teraz rodzinę cylindrów, dla której odcinek U jest cylindrem zerowym. Cylindry rzędu n mają długość λ^n i jest ich k^n.

Przez $\tilde{A}_n$ będę oznaczał (w tym rozdziale) liczbę par przecinających się cylindrów n-tego rzędu. Podobnie A_n będzie oznaczać liczbę takich uporządkowanych par przecinających się cylindrów n-tego rzędu, których pierwsze symbole w rozwinięciu symbolicznym są różne. Przy tym w $\tilde{A}_n$ będę liczył także przecięcia cylindrów z samymi sobą (zatem liczba ta nie będzie mniejsza od k^n), a za A_0 będę podstawiał 1. Naturalnie, jeśli $A_1 = 0$, to $A_n = 0$ dla każdego $n > 0$ i spełniony jest warunek SOSC.

Ponieważ dwa cylindry C, C' przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy przecinają się ich obrazy $f_i(C)$ oraz $f_i(C')$ (dla wszystkich możliwych i), więc zachodzi wzór następujący:

$$\tilde{A}_n = \sum_{l=0}^{n} k^l A_{n-l} \tag{5.2}$$

Wynika stąd, że jeśli $\tilde{A}_n$ rośnie szybciej niż $k^{n(1+\varepsilon)}$, to A_n musi rosnąć równie szybko przynajmniej na pewnym podciągu n_i.

5.2 Wymiar zbioru granicznego

Można oczekiwać, że zmniejszanie się wymiaru zbioru granicznego w porównaniu z wymiarem podobieństwa jest związane z dużą liczbą przecięć pomiędzy cylindrami. Faktycznie, zachodzi następujący fakt:

Stwierdzenie 5.3.

$$\liminf \frac{\log \tilde{A}_n}{n \log k} \geq 2 - \frac{\dim_H(\Lambda)}{s}$$

Dowód. Niech wymiar Hausdorffa zbioru Λ będzie równy p. Możemy założyć, że $p < s$, w przeciwnym wypadku teza stwierdzenia jest spełniona automatycznie. Zgodnie z twierdzeniem Falconera, dla zbioru granicznego u.i.f. wymiar Hausdorffa jest równy wymiarowi Minkowskiego. Zatem dla odpowiednio dużych n zbiór Λ można pokryć przy pomocy nie więcej niż $\lambda^{-n(p+\varepsilon)}$ odcinków długości λ^n. Ponieważ każdy cylinder zawiera punkt ze zbioru granicznego, więc biorąc odcinki trzy razy dłuższe (albo w trzy razy większej liczbie), można nimi pokryć nie tylko zbiór graniczny ale także cylindry rzędu n.

Lemat 5.4. *Jeżeli rodzinę a odcinków danej długości można pokryć przy pomocy b odcinków tej samej długości, $b < a$, to w rodzinie tej jest co najmniej $(a-b)^2/2b$ par przecinających się odcinków.*

Lemat ten (w ogólniejszej postaci) zostanie udowodniony w rozdziale 7. Stosując go do rodziny cylindrów rzędu n, otrzymujemy (dla $a = \lambda^{-ns}$ oraz $b = \lambda^{-n(p+\varepsilon)}$), że

$$\tilde{A}_n > k^{n(2-\frac{p+2\varepsilon}{s})}$$

dla odpowiednio dużego n, gdyż $a \gg b$ dla $p < s - \varepsilon$. Przechodząc z ε do zera, otrzymujemy tezę. □

Bezpośrednim wnioskiem z powyższego faktu jest

$$B_p \subset \bigcap_N \bigcup_{n>N} \{t; A_n(t) > k^{n(2-\frac{p+\varepsilon}{s})}\} \tag{5.3}$$

Zastanówmy się teraz, jak duży może być zbiór parametrów, dla których dane dwa cylindry C, C' rzędu n (określone poprzez ich rozwinięcia symboliczne ω^n, ω'^n) przecinają się. Możemy przy tym założyć, że $\omega_1 \neq \omega_1'$, w przeciwnym wypadku cylindry przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy przecinają się zbiory $f_{\omega_1}^{-1}(C)$ oraz $f_{\omega_1}^{-1}(C')$, które są cylindrami rzędu $(n-1)$.

Cylindry te przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między punktami $x = f_{\omega^n}(0)$ oraz $x' = f_{\omega'^n}(0)$ jest mniejsza od λ^n. Punkty te należą do zbioru granicznego. Z warunku transwersalności, dla odpowiednio dużego n, jeśli te punkty są blisko siebie, to muszą się (a wraz z nimi ich cylindry) względem siebie szybko poruszać przy zmianie parametru, tj.

$$\frac{d}{dt}(x(t) - x'(t)) > c$$

Zatem cylindry C i C' przecinają się dla parametrów należących do przedziału o długości co najwyżej $2c^{-1}\lambda^n$.

Równocześnie, ponieważ odwzorowania f_i są kontrakcjami, funkcja $x(t) = \pi(t)(\omega)$ jest dwukrotnie różniczkowalna dla dowolnie wybranego ω, a jej druga pochodna jest uniwersalnie ograniczona (odpowiedni lemat zostanie udowodniony w rozdziale 7). Zatem, odcinki parametrów dla których dane dwa cylindry się przecinają są oddzielone przynajmniej o stałą (gdyż między dwoma takimi odcinkami funkcja $d/dt(x(t) - x'(t))$ zmienia wartość od c do $-c$), czyli jest ich co najwyżej c_1. Udowodniliśmy zatem dla dużych n fakt następujący:

Stwierdzenie 5.5. *Istnieją takie stałe c_1 i c_2, że dla dowolnego n dla dowolnych dwu cylindrów C, C' rzędu n o różnych pierwszych wyrazach w rozwinięciu symbolicznym zbiór parametrów $B_n(C, C')$, dla których cylindry te się przecinają można pokryć przy pomocy co najwyżej c_1 odcinków długości $c_2\lambda^n$.*

Jeśli przyjmiemy c_1 odpowiednio duże, to także dla małych n fakt ten będzie automatycznie spełniony.

Będziemy potrzebować jeszcze następującego lematu (który udowodnimy w większej ogólności w rozdziale 6):

Lemat 5.6. *Dla danej rodziny a odcinków o tej samej długości, zbiór punktów należących do co najmniej b spośród nich można nakryć przy pomocy co najwyżej a/b odcinków o tej samej długości.*

Teraz możemy przystąpić do dowodu twierdzenia 5.1. Przypomnijmy inkluzję (5.3) dotyczącą zbioru B_p. Zbiór parametrów, dla których $A_n(t) > k_n$ jest to zbiór punktów, należących do co najmniej k_n spośród zbiorów $B_n(C, C')$. Każdy z tych zbiorów można nakryć c_1 odcinkami o długości $c_2\lambda^n$. Zatem B_p zawiera się w zbiorze parametrów, należących do co najmniej $b = k^{n(2-\frac{p+\varepsilon}{s})}$ spośród $a = c_1(k-1)k^{2n-1}$ odcinków o długości $c_2\lambda^n$ każdy, dla nieskończenie wielu n.

Zgodnie z lematem 5.6, zbiór takich parametrów można pokryć nie więcej niż $c_1\lambda^{-n(p+\varepsilon)}$ odcinkami długości $c_2\lambda^n$. Stąd, zgodnie z (5.3), aby pokryć B_p potrzebujemy $c_1\lambda^{-N(p+\varepsilon)}$ odcinków długości $c_2\lambda^N$ oraz $c_1\lambda^{-(N+1)(p+\varepsilon)}$ odcinków długości $c_2\lambda^{N+1}$ oraz $c_1\lambda^{-(N+2)(p+\varepsilon)}$ odcinków długości $c_2\lambda^{N+2}$ itd., od dowolnie dużego N zaczynając. Stąd, $(p + 2\varepsilon)$-wymiarowa miara Hausdorffa zbioru B_p szacuje się następująco:

$$H^{p+2\varepsilon}(B_p) \leq \sum_{n=N}^{\infty} c_1\lambda^{-n(p+\varepsilon)}(c_2\lambda^n)^{p+2\varepsilon} < \infty$$

Przechodząc z ε do zera otrzymujemy tezę twierdzenia 5.1. $\square$

5.3 Absolutna ciągłość miary naturalnej

W sytuacji z twierdzenia 5.2 zawsze będziemy mieć dużo przecięć cylindrów – zgodnie ze stwierdzeniem 5.3, ponieważ wymiar Hausdorffa zbioru granicznego nie może być większy od 1, korzystając z równania (5.1) otrzymujemy wzór

$$\liminf \frac{\log \tilde{A}_n}{n \log(k^2\lambda)} \geq 1$$

Warunek, jakiego będziemy używać, mówi, że liczba przecięć nie rośnie jeszcze szybciej.

Chcemy sprawdzić, kiedy miara ν jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a oraz kiedy jej gęstość jest w L^2. Będziemy korzystać z *dolnej gęstości* miary ν, zadanej wzorem:

$$\underline{D}(\nu)(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{1}{2r}\nu([x-r, x+r])$$

Miara m' jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy gdy jej dolna gęstość jest skończona m'-prawie wszędzie, [Ma]. Jeżeli wiemy ponadto, że

$$\int \underline{D}(m')(x)dm'(x) < \infty$$

to gęstość miary m' jest całkowalna z kwadratem, [PeSo].

Stwierdzenie 5.7. *Jeżeli* $\int \underline{D}(\nu)d\nu = \infty$ *to* $\lim \tilde{A}_n(k^2\lambda)^{-n} = \infty$

Dowód. Będę przybliżać miarę ν ciągiem miar ν_n, słabo zbiegających do ν, zadanych wzorem

$$\nu_n = (k\lambda)^{-n} \sum_{C\in C_n} m_{|C}$$

gdzie C_n oznacza rodzinę cylindrów n-tego rzędu a m miarę Lebesgue'a. Zwróćmy uwagę, że miary te są (jeśli U jest odcinkiem długości 1) unormowane.

Pokażemy najpierw zależność następującą:

$$\underline{D}(\nu) \approx \liminf_{n\to\infty} D(\nu_n) \tag{5.4}$$

Wybierzmy dowolny punkt x. Ponieważ cylindry L_{ω^n} są otoczeniami cylindrów $\pi(C_{\omega^n})$, przy tym każde dwie pary $(L_{\omega^n}, \pi(C_{\omega^n}))$ są identyczne z dokładnością do jednokładności, więc istnieje taka stała c że jeśli odcinek $[x-c\lambda^n, x+c\lambda^n]$ przecina $\pi(C_{\omega^n})$ to $x \in L_{\omega^n}$. Zachodzi oczywiste szacowanie:

$$\nu([x-r, x+r]) \leq k^{-n}\sharp\{\omega^n; [x-r, x+r] \cap \pi(C_{\omega^n}) \neq \emptyset\}$$

Podstawmy do niego $r_n = c\lambda^n$. Prawa strona szacuje się z góry przez liczbę cylindrów $L_{\omega^n} \in C_n$, do których należy punkt x, pomnożoną przez k^{-n}. Jest to dokładnie λ^n razy gęstość miary ν_n w punkcie x. Dzieląc obie strony przez $2c\lambda^n$ i obliczając dolną granicę przy n uciekającym do nieskończoności otrzymujemy górne oszacowanie gęstości miary ν:

$$\underline{D}(\nu) < \frac{1}{2c} \cdot \liminf_{n\to\infty} D(\nu_n)$$

Podobnie nierówność

$$\nu([x-r, x+r]) \geq k^{-n}\sharp\{\omega^n; L_{\omega^n} \subset [x-r, x+r]\}$$

pozwala na otrzymanie oszacowania dolnego:

$$\underline{D}(\nu) \geq \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} D(\nu_n)$$

Faktycznie, podstawiając $r = \lambda^n$ widzimy, że $x \in L_{\omega^n}$ wtedy i tylko wtedy gdy $L_{\omega^n} \subset [x-r, x+r]$, zatem prawa strona powyższej nierówności równa jest gęstości miary ν_n w punkcie x, pomnożonej przez λ^n. Oszacowanie dostajemy tak, jak uprzednio – dzieląc obustronnie przez $2\lambda^n$ i przechodząc z n do granicy.

Niech teraz I będzie odcinkiem o długości co najmniej λ^n. Jeżeli I zawiera punkt $x \in \pi(C_{\omega^n})$, to ma z L_{ω^n} przecięcie o długości co najmniej $c\lambda^n$ a co najwyżej λ^n (stała c ta sama co uprzednio). Zatem

$$\nu(I) \approx \nu_n(I)$$

Ponieważ gęstość miary ν_n jest sumą pewnej ilości funkcji charakterystycznych odcinków o długości λ^n (pomnożonych przez stałą), możemy więc zapisać

$$\int D(\nu_n) d\nu \approx \int D(\nu_n) d\nu_{n'} \tag{5.5}$$

dla wszystkich $n' \geq n$.

Korzystając z własności (5.4) oraz (5.5), jak też lematu Fatou, otrzymujemy

$$\liminf \int D(\nu_n) d\nu_n \approx \liminf \int D(\nu_n) d\nu \geq \int \liminf D(\nu_n) d\nu \approx \int \underline{D}(\nu) d\nu = \infty$$

Dla dokończenia dowodu wystarczy jedynie, przekształcając wzór na gęstość miary ν_n

$$D(\nu_n) = (k\lambda)^{-n} \sum_{C \in C^n} 1_C$$

otrzymać nierówność

$$\int D(\nu_n) d\nu_n = (k\lambda)^{-2n} \sum_{C \in C_n} \sum_{C' \in C_n} m(C \cap C') \leq \frac{2\tilde{A}_n}{(k^2\lambda)^n}$$

□

Dla dowodu twierdzenia 5.2 potrzeba jeszcze wykazać następującą nierówność:

$$\int \tilde{A}_n(t) dt < c \cdot (k^2\lambda)^n$$

Ze wzoru (5.2) wystarczy pokazać podobną nierówność dla A_n (zamiast $\tilde{A}_n$). Wynika ona natychmiast (dla stałej $C = c_1 \cdot c_2$) z warunku transwersalności, gdyż całkę po lewej stronie możemy zastąpić przez sumę (po wszystkich możliwych parach cylindrów rzędu n o różnych pierwszych symbolach) miar tych parametrów, dla których dane cylindry się przecinają. □

6 Zbiór graniczny i miara naturalna

W tym rozdziale zajmiemy się dokładniej zbiorem granicznym i.u.f. (lub układu soficznego) nie spełniającego OSC. Podamy proste kryteria, określające kiedy konkretny układ spełnia tezy twierdzeń 7.11 bądź 7.14.

Oznaczam przez $\tilde{A}_l$ liczbę par cylindrów z pokrycia Morana rozmiaru l, które się przecinają. Uwzględniam tu także przecięcia cylindra z samym sobą, więc $\tilde{A}_l$ nie może być mniejsze niż l^{-s} (z dokładnością do stałej multiplikatywnej). Za każdym razem, kiedy będę mówić o 'liczbie par przecinających się zbiorów należących do danej rodziny' będę uwzględniał także przecięcia zbioru z samym sobą.

Stosuję następujące oznaczenia:

$$\limsup_{l\to 0} \frac{\log \tilde{A}_l}{-\log l} = s_+$$

$$\liminf_{l\to 0} \frac{\log \tilde{A}_l}{-\log l} = s_-$$

Granice te nie zależą od wyboru rodziny cylindrów, tj. od wyboru początkowego cylindra U, co pokażę we wniosku 6.5.

6.1 Wymiar zbioru granicznego

Jeśli nie byłoby żadnych samoprzecięć (tj. zachodziłby SOSC), to wymiar Hausdorffa (Minkowskiego, korelacyjny) byłyby wszystkie równe wymiarowi podobieństwa. Natomiast jeśli zbiór graniczny byłby jednopunktowy (co zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy punkty stałe wszystkich kontrakcji f_i pokrywają się), to każdy cylinder przecinałby się z każdym i $\tilde{A}_l$ byłby największy możliwy.

Pozwala to mieć nadzieję na istnienie zależności pomiędzy liczbą przecięć cylindrów a różnicą wymiarów: podobieństwa i któregoś z pozostałych. Zależność tę (uogólnienie głównego twierdzenia w pracy [SS]) pokażę na dwa sposoby. Pierwszy dowód jest bardzo podobny do oryginalnego dowodu w [SS], jedynie (dzięki innemu sformułowaniu tezy) mogę pominąć niektóre założenia.

Stwierdzenie 6.1.

$$\dim_C(\nu) = 2s - s_+$$

Dowód. Jeżeli Λ jest zbiorem jednopunktowym, to wszystkie cylindry się przecinają. Zatem $\tilde{A}_l$ równe jest w tym przypadku (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) l^{-2s}. W tym przypadku teza stwierdzenia jest spełniona.

Załóżmy więc, że Λ nie jest zbiorem jednopunktowym. W celu obliczenia wymiaru korelacyjnego musimy oszacować całkę

$$Z(\alpha) = \int\int \frac{1}{|\pi(\omega) - \pi(\omega')|^\alpha} d(\mu \times \mu)(\omega, \omega')$$

Całka ta liczona jest po mierze produktowej w przestrzeni $\Sigma_A \times \Sigma_A$.

Niech W_l oznacza zbiór par cylindrów (C_a, C_b), będących podniesieniami pary rozłącznych cylindrów należących do pokrycia Morana Λ_l, których rodzice się przecinają. Przez W' będę oznaczać wszystkie pary (ω, ω') nie należące do żadnej z takich par cylindrów $(C_a, C_b) \in W_l$ dla żadnego l. Inaczej mówiąc, jest to zbiór tych par (ω, ω'), dla których $\pi(\omega) = \pi(\omega')$.

Lemat 6.2. *Zbiór W' ma w przestrzeni $\Sigma_A \times \Sigma_A$ miarę produktową różną od zera wtedy i tylko wtedy, gdy Λ jest zbiorem jednopunktowym.*

Dowód. Jeśli Λ jest jednopunktowy, to W' jest całą przestrzenią $\Sigma_A \times \Sigma_A$. Dalej Λ nie jest jednopunktowy.

Niech C_a, C_b będą podniesieniami pary cylindrów z pokrycia Morana rozmiaru l. Pary takich cylindrów pokrywają przestrzeń $\Sigma_A \times \Sigma_A$. Z lematu 4.2 mogę w pierwszym z nich znaleźć dwa podcylindry C_{a1} i C_{a2}, będące podniesieniami cylindrów L_{a1} i L_{a2} o średnicach mniej więcej równych cl, odległość między którymi jest większa niż cl.

Niech teraz L_{b1} będzie pewnym cylindrem o średnicy cl, którego podniesienie C_{b1} zawiera się w C_b. Cylinder L_{b1} nie może przecinać zarówno L_{a1} jak i L_{a2}, z którymś z nich musi być rozłączny (bez zmniejszania ogólności z L_{a1}). Wtedy zbiór $C_{a1} \times C_{b1}$ jest rozłączny z W'. Zbiór ten ma miarę produktową nie mniejszą niż $c^2 \cdot c'$ razy miara zbioru $C_a \times C_b$ ze względu na (4.9).

Tę samą konstrukcję można przeprowadzić dla dowolnej pary podniesień cylindrów mniej więcej tego samego rozmiaru. Niech $g(l)$ będzie sumą miar produktowych wszystkich par cylindrów, przecinających W' i będących podniesieniami cylindrów z rozbicia Morana rozmiaru l. Z powyższego rozumowania wynika, że

$$g(cl) \leq (1 - c^2 \cdot c')g(l)$$

Stąd, $g(l)$ zbiega do 0 wraz z l. Miara zbioru W' jest nie większa od $g(l)$ dla każdego l, musi więc być równa 0. □

Zbiór W' możemy zatem przy obliczaniu całki zaniedbać.

Każda para (ω, ω'), która nie należy do W', należy do co najmniej jednej a co najwyżej c par (C_a, C_b) należących do którejś z rodzin W_l. Z kolei każda z takich par należy do co najmniej jednej a co najwyżej c spośród rodzin W_{l_n}, wynika to z lematu 4.1. Zachodzi zatem przybliżona równość

$$Z(\alpha) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{(C_a, C_b) \in W_{l_i}} \int_{C_b} \int_{C_a} \frac{1}{|\pi(\omega) - \pi(\omega')|^{\alpha}} d\mu^2(\omega, \omega') \tag{6.1}$$

Niech cylindry L_a, L_b (o podniesieniach C_a, C_b) są rozmiaru w przybliżeniu l. Wtedy

$$\mu^2(C_a \times C_b) \approx l^{2s}$$

Cylindry te są rozłączne, ale ich rodzice się przecinają. Zatem odległość między nimi jest co najwyżej rzędu l, a więc także odległość między punktami $\pi(\omega), \pi(\omega')$ jest co najwyżej tego rzędu.

Z drugiej strony, para zbiorów $(L_a, \pi(C_a))$ jest obrazem pary U, Λ pod działaniem pewnego odwzorowania konforemnego. Ponieważ U jest otwartym otoczeniem Λ, więc zawiera pewne ε-otoczenie Λ. Z warunku dystorsji (4.6) wynika, że punkty z $\pi(C_a)$ leżą w odległości co najmniej $Kl\varepsilon$ od brzegu obszaru L_a, więc tym bardziej od $\pi(C_b)$. Ostatecznie,

$$\mathrm{dist}(\pi(\omega), \pi(\omega')) \approx l$$

dla $\omega \in C_a, \omega' \in C_b$.

Każda z całek, występujących w sumie (6.1), szacuje się więc przez $l_i^{2s-\alpha}$. Aby oszacować liczność rodziny W_l zauważmy, że dowolni przodkowie każdej pary (L_a, L_b) do niej należącej przecinają się. Zatem można znaleźć takich przodków, którzy leżą razem w pokryciu Morana rozmiaru l/l_n, przecinają się, a więc są liczeni do $\tilde{A}_{l/l_n}$.

Z drugiej strony, każda para przecinających się cylindrów z Λ_{l/l_n} ma rozłącznych potomków rozmiaru l (patrz dowód lematu 6.2), co najmniej jedną parę a co najwyżej $c_0 = c \cdot l_n^{-s}$. Taka para rozłącznych potomków nie musi należeć do W_l (bo ich rodzice również mogą być rozłączni), ale musi mieć pewnych przodków którzy należą do $W_{l'}$ dla pewnego $l' \in [l, l/l_n]$. Ostatecznie,

$$c_1 \tilde{A}_{l/l_n} < \sharp(W_l) < c_2 \sum_{l_i \in [l, l/l_n]} \tilde{A}_{l_i} \tag{6.2}$$

i suma ta ma w przybliżeniu n składników.

Stąd otrzymujemy oszacowanie na całkę

$$Z(\alpha) \approx \sum_{i=0}^{\infty} l_i^{2s-\alpha} \cdot \tilde{A}_{l_i}$$

Zatem wymiar korelacyjny miary ν (czyli ta wartość parametru α, dla której ta całka przestaje być zbieżna) równy jest

$$\dim_C(\nu) = 2s - \limsup_{i\to\infty} \frac{\log \tilde{A}_{l_i}}{-\log l_i} = 2s - \limsup_{l\to 0} \frac{\log \tilde{A}_l}{-\log l}$$

□

Z podanego dowodu nietrudno uzyskać geometryczną interpretację liczby s_+. Wprowadźmy w przestrzeni symbolicznej Σ_A inną metrykę: niech odległość d_μ między dwoma ciągami symboli ω, ω' równa jest mierze μ najmniejszego cylindra zawierającego oba te ciągi. Metryka ta zadaje naturalnie tę samą topologię, ale rzutowanie π jest w niej lipschitzowskie (a w przypadku SOSC nawet bi-lipschitzowskie). Zwróćmy uwagę, że metryka ta zależy od układu a nie tylko od przestrzeni Σ_A jak uprzednio.

Wniosek 6.3.

$$\limsup \frac{\log \tilde{A}_l}{-\log l} \geq \overline{\dim}_M(W')$$

który to wymiar policzony jest w metryce

$$d_2((\omega,\tau),(\omega',\tau')) = \max(d_m u(\omega,\omega'), d_m u(\tau,\tau'))$$

Niech spełniony będzie dodatkowo warunek $(*)$ następujący: jeśli dwa cylindry się przecinają to pewne ich podcylindry również. Wtedy zamiast nierówności możemy zapisać równość.

Dowód. Będziemy najpierw dowodzić drugą część tezy, tj. gdy warunek $(*)$ jest spełniony. Nasza teza, w połączeniu ze stwierdzeniem 6.1 da w efekcie wynik z [SS] (udowodniony tam w przypadku jednowymiarowym).

Zauważmy, że warunek $(*)$ można przepisać następująco: jeśli dwa cylindry C, C' się przecinają, to iloczyn kartezjański ich podniesień ma niepuste przecięcie z W' (tj. istnieją takie $\omega \in C$ oraz $\omega' \in C'$, że $\pi(\omega) = \pi(\omega')$).

Ponieważ zgodnie z nierównością (6.2) W_l ma mniej więcej $\tilde{A}_l$ elementów, więc do udowodnienia pozostał fakt następujący:

$$\limsup \frac{\log \sharp W_l}{-\log l} = \overline{\dim}_M(W')$$

Rozpatrzmy rodzinę $S_l = \Lambda_l \times \Lambda_l$, tj. rozbicie przestrzeni $\Sigma_A \times \Sigma_A$ na iloczyny kartezjańskie cylindrów z pokrycia Morana rozmiaru l. Rodzina S_{lL} składa się z podcylindrów rodziny S_l (przypominam, że L oznacza infimum lokalnego współczynnika kontrakcji dla odwzorowań f_i, zatem $\operatorname{diam}(L_{\omega^{n+1}}) \geq L \cdot \operatorname{diam}(L_{\omega^n})$). Niech $A(i)$ oznacza liczbę elementów rodziny S_{L^i}, przecinających W'. Podobnie, niech $D(i)$ oznacza liczbę takich elementów rodziny S_{L^i}, które nie przecinają W' ale które zawierają się w elemencie rodziny $S_{L^{i-1}}$, przecinającym W'.

Ciąg $A(i)$ pozwala określić wymiar zbioru W':

$$\overline{\dim_M}(W') = \limsup \frac{\log A(i)}{-i \log L}$$

Oczywiście, wymiar ten nie może być większy od wymiaru całej przestrzeni $\Sigma_A \times \Sigma_A$. Wymiar ten (policzony w [SS]) można obliczyć na wiele sposobów. Chyba najprościej zauważyć, że miara μ^2 jest w tej przestrzeni miarą geometryczną z wykładnikiem $2s$, więc zgodnie z lematem Frostmana jej nośnik (czyli cała przestrzeń) ma wymiar $2s$.

Z kolei ciąg $D(i)$ wyraża się przez W_l:

$$D(i) \approx \sum_{l_j \in (L^{i+1}, L^{i-1}]} W_{l_j}$$

gdyż zarówno zbiory liczone do $D(i)$ jak i do W_{l_j} mają miarę μ^2 w przybliżeniu równą L^{2is}.

Ostatecznie musimy pokazać wzór następujący:

$$\limsup \frac{\log(A(i))}{-i \log L} = \limsup \frac{\log(D(i))}{-i \log L}$$

podobnie jak w stwierdzeniu 3.2. Zbiory, zliczane w $D(i)$ tworzą uogólnione pokrycie Whitney'a zbioru W', gdyż ich średnice są rzędu L^i a ich odległości od W' są co najwyżej tego rzędu.

Oznaczmy lewą i prawą stronę powyższego wzoru przez B i D, odpowiednio. Ponieważ suma mnogościowa zbiorów, liczonych w ciągu $B(i)$ (każdy z nich ma miarę około L^{2is}) równa jest sumie zbiorów, liczonych do $D(i+1)$, $D(i+2)$,... plus zbiór W' (który ma miarę 0 – patrz lemat 6.2), więc

$$B(n) \approx \sum_{i=n+1}^{\infty} D(i) L^{2(i-n)s} \geq L^{2s} D(n+1) \tag{6.3}$$

co daje oszacowanie $B \geq D$.

Przy wyprowadzeniu nierówności odwrotnej możemy więc założyć, że $D < 2s$. Niech $\varepsilon < 2s - D$. Dla odpowiednio dobranej stałej $c(\varepsilon)$ możemy zapisać definicję D w postaci

$$D(i) \leq c(\varepsilon) L^{-i(D+\varepsilon)}$$

Podstawiając tę nierówność do pierwszej części (6.3) otrzymujemy

$$B(n) \approx \sum_{i=n+1}^{\infty} D(i) L^{2(i-n)s} \leq c(\varepsilon) L^{-n(D+\varepsilon)} \sum_{i=1}^{\infty} L^{i(2s-D-\varepsilon)} = \frac{c}{1 - L^{2s-D-\varepsilon}} L^{-n(D+\varepsilon)}$$

skąd wynika $B \leq D + \varepsilon$. Ponieważ ε możemy wybrać dowolnie bliskie zeru, otrzymujemy stąd równość $B = D$, a zatem drugą część tezy.

Pierwsza część tezy (kiedy warunek $*$ nie jest spełniony) wynika natychmiast z drugiej. Faktycznie, niespełnienie tego warunku odpowiada rozbiciu pewnych elementów uogólnionego pokrycia Whitney'a na podzbiory – może to spowodować jedynie wzrost jego wykładnika zbieżności, tj. granicy $\limsup \frac{\log \tilde{A}_l}{-\log l}$. □

Przedstawię jeszcze jeden dowód stwierdzenia 6.1, tym razem geometryczny, prosto z definicji. Jego zaletą jest to, że nie korzystamy z samopodobieństwa zbioru granicznego. Ponadto, w dowodzie tym nie będę musiał (w odróżnieniu od poprzedniego) zakładać, że zbiór U (cylinder zerowego rzędu) zawiera Λ. Znacznie lepiej widać w nim także przyczynę związku między liczbą przecięć cylindrów a wymiarem korelacyjnym.

Będzie nam potrzebny następujący lemat:

Lemat 6.4. *Niech dana będzie rodzina R składająca się z a zbiorów otwartych jednakowo regularnych, o średnicy l (z dokładnością do stałej multiplikatywnej). Jeżeli można ją pokryć przy pomocy b kul o średnicy l, $a >> b$, to w rodzinie R można znaleźć co najmniej $c \cdot a^2/b$ par zbiorów przecinających się, gdzie c nie zależy od a oraz b.*

Dowód. Skoro zbiory z rodziny R są jednakowo regularne, każdy z nich musi zawierać kulę o średnicy $c_0 \cdot l$. Niech B będzie jedną z kul o promieniu l, którymi pokryliśmy R. Wybierzmy w niej pewną liczbę punktów tak dobranych, że jeśli kula o promieniu $c_0 \cdot l$ ma środek w B to musi zawierać któryś z tych punktów. Podobnie wybierzmy punkty w pozostałych kulach pokrywających R. Otrzymamy $c_1 \cdot b$ punktów tak rozłożonych, że każdy zbiór należący do R zawiera któryś z nich.

Niech $n_1, \ldots, n_{c_1 \cdot b}$ oznacza liczbę zbiorów z rodziny R, zawierających odpowiednio pierwszy punkt, drugi ale nie pierwszy,..., ostatni ale żaden z pozostałych. Naturalnie, $a = \sum n_i$.

Jeśli n zbiorów zawiera dany punkt, to każde dwa z nich się przecinają, czyli mamy mniej więcej n^2 par przecinających się zbiorów. Zatem liczba przecięć wynosi co najmniej $c_2 \sum n_i^2$, co wobec wypukłości funkcji x^2 jest nie mniejsze od $c_1 c_2 b \cdot (a/(c_1 b))^2$. □

Korzystając z tego lematu, stwierdzenie 6.1 dowodzi się następująco:

Dowód. Niech teraz U będzie dowolnym regularnym zbiorem otwartym, niekoniecznie zawierającym Λ. Konstruujemy cylindry L_{ω^n} z U jako cylindrem zerowym. Ponieważ wszystkie pary $(L_{\omega^n}, \pi(C_{\omega^n}))$ są konforemnymi obrazami pary (U, Λ), więc istnieje taka stała c_0, że zbiór $\pi(C_{\omega^n})$ leży w $c_0 \cdot \mathrm{diam}(L_{\omega^n})$-otoczeniu L_{ω^n} dla każdego ω^n.

Chcemy policzyć wymiar korelacyjny z jego geometrycznej definicji. Podzielmy więc $\mathbb{R}^d$ na kostki o boku $2l$, kostkę zawierającą x oznaczam $B_l(x)$. Liczbę cylindrów z rozbicia Morana rzędu l', przecinających $B_l(x)$, będę oznaczał $N_{l,l'}(x)$. Szacuję miarę pojedynczej kostki:

$$\nu(B_l(x)) \leq cl^s \sharp\{L_{\omega^n} \in \Lambda_l; \pi(C_{\omega^n}) \cap B_l(x) \neq \emptyset\} \leq$$

$$\leq cl^s N_{l(1+c_0),l} \leq c' \cdot \nu(B_{l(1+2c_0)}(x))$$

Zauważmy, że kostkę $B_{l(1+2c_0)}(x)$ można przedstawić jako pewną sumę kostek $B_l(y_i)$, których będzie nie więcej niż $(3+2c_0)^d$.

Interesuje nas suma kwadratów miar poszczególnych kostek.

$$\sum \nu^2(B_l(x)) \leq c^2 l^{2s} \sum N^2_{l(1+c_0),l}(x) \leq (c')^2 \cdot \sum \nu^2(B_{l(1+2c_0)}(x)) \leq$$

$$\leq (c')^2(3+2c_0)^d \sum_x \sum_{y;\rho(x,y)<(3+2c_0)l} \nu^2(B_l(y)) \leq (c')^2(3+2c_0)^{2d} \sum \nu^2(B_l(x)) \tag{6.4}$$

Przedostatnia nierówność wynika stąd, że kwadrat sumy n wyrazów jest nie większy niż n razy suma ich kwadratów.

Z (6.4) wynika, że

$$\sum \nu^2(B_l(x)) \approx l^{2s} \sum N^2_{l(1+c_0),l}(x) \tag{6.5}$$

Teraz chcielibyśmy wyrazić prawą stronę przy pomocy liczby przecięć cylindrów rzędu l. Przypomnijmy, że przez $N_{l(1+c_0),l}$ oznaczyliśmy liczbę cylindrów z rozbicia Morana rzędu l, które przecinają $B_{l(1+c_0)}(x)$. Wszystkie te cylindry muszą się zawierać w $B_{l(2+c_0)}(x)$, który to zbiór można pokryć przy pomocy nie więcej niż $c(2+c_0)^d$ kul o średnicy l. Z lematu 6.4, liczba przecięć pomiędzy tymi cylindrami wynosi co najmniej $c \cdot N^2_{l(1+c_0),l}(x)$. Z drugiej strony, nie może ona przekroczyć $N^2_{l(1+c_0),l}(x)$.

Zatem, w wyrażeniu

$$\sum N^2_{l(1+c_0)}(x)$$

poszczególne składniki są równe (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) liczbom przecięć między cylindrami z pokrycia Morana rzędu l, jakie zachodzą w pobliżu x (w odległości nie większej niż $(1+c_0)l$). Suma ta jest obliczana po x-ach, leżących na siatce o boku l. Zatem, każde istniejące przecięcie jest liczone co najmniej raz, a co najwyżej $(1+c_0)^d$ razy. Stąd, suma ta jest z dokładnością do stałej równa $\tilde{A}_l$. To zaś, wraz z równaniem (6.5), daje tezę z drugiej definicji wymiaru korelacyjnego. □

Przy okazji udowodniliśmy (dla zwykłych u.i.f.) następujący przydatny fakt:

Wniosek 6.5. *Niech C i C' będą dwiema rodzinami cylindrów, zdefiniowanymi dla różnych cylindrów zerowych U i U'. Wtedy ich liczby przecięć $\tilde{A}_l$ i $\tilde{A}'_l$ różnią się co najwyżej o stałą multiplikatywną, zależącą od U i U' ale nie od l. W szczególności, wyrażenia s_+ i s_- są dobrze określone i nie zależą od wyboru konkretnego cylindra zerowego.*

Jak łatwo sprawdzić, jest on prawdziwy także kiedy zbiory U i (lub) U' nie są spójne (ale są skończoną sumą zbiorów regularnych). Dla dowodu wystarczy dokonać odpowiedniej poprawki w lemacie 6.4. Niech U składa się z n zbiorów spójnych, które są oczywiście mniej więcej jednakowego rozmiaru (bo jest ich skończenie wiele; możemy wziąć odpowiednio dużą stałą multiplikatywną). Możemy wziąć wszystkie przecięcia pomiędzy nimi. Każde przecięcie pomiędzy cylindrami będzie liczone co najwyżej n^2 razy (każda składowa z każdą). Zatem, w tezie lematu 6.4 trzeba będzie jedynie zmienić stałą.

Ponadto, ponieważ wymiar korelacyjny zbioru granicznego nie może przekroczyć d, ze stwierdzenia 6.1 otrzymujemy także oszacowanie na minimalną liczbę przecięć cylindrów:

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\log \tilde{A}_l}{-\log l} \geq 2s - d$$

Niestety, pokrycie Morana jest dla naszych celów trochę zbyt wąskim pojęciem (jak to będzie widać w następnym rozdziale). Zdefiniujmy nieco ogólniejsze pojęcie δ-pokrycia. Pokrycie Morana definiowaliśmy jako funkcję, przyporządkowującą każdej odpowiednio małej dodatniej liczbie rzeczywistej l rozłączną rodzinę cylindrów Λ_l, pokrywających Σ i których rzuty na przestrzeń konfiguracyjną mają średnicę między cl a $c^{-1}l$. Niech *δ-pokrycie* będzie funkcją, przyporządkowującą liczbie l rodzinę Λ_l^δ cylindrów, których średnice leżą między $cl^{1+\delta}$ a $c^{-1}l^{1-\delta}$, i które spełniają wszystkie pozostałe własności pokrycia Morana. Naturalnie, pokrycie Morana jest 0-pokryciem.

Dla δ-pokrycia określamy liczbę przecięć $\tilde{A}_l^\delta$ oraz jej szybkość wzrostu s_-^δ, s_+^δ analogicznie, jak dla pokrycia Morana. Wielkości te zależą od konkretnego wyboru δ-pokrycia. Dla małych δ jednak zależność ta nie jest zbyt silna. Możemy więc użyć δ-pokryć do szacowania wymiaru Hausdorffa zbioru granicznego:

Stwierdzenie 6.6. *Dla dowolnego δ-pokrycia*

$$\dim_H(\Lambda) \geq \frac{2s - s_-(1-\delta)}{1+\delta}$$

W szczególności,

$$\dim_H(\Lambda) \geq 2s - s_-$$

Dowód. Tezę lematu 6.4 można przedstawić następująco: jeżeli w a-elementowej rodzinie R zbiorów otwartych, jednakowo regularnych, rozmiaru l jest b par zbiorów przecinających się, to jest w niej co najmniej $(c{\cdot}a^2/b)$-elementowa podrodzina zbiorów parami rozłącznych.

Przypuśćmy bowiem, że tak nie jest, i że maksymalna podrodzina R' zbiorów parami rozłącznych ma $z < ca^2/b$ elementów. Oznacza to, że każdy z pozostałych zbiorów przecina któryś ze zbiorów z R'. Stąd, l-otoczenia zbiorów z R' pokrywają R. Oznacza to, że R można pokryć przy pomocy z zbiorów o średnicy nie większej od $3l$, zatem także przy pomocy $c'z$ kul o średnicy l – co stoi jednak w sprzeczności z lematem 6.4 (bo par zbiorów przecinających się jest za mało).

Rozpatrzmy wszystkie cylindry z δ-pokrycia rozmiaru l (jest ich nie mniej niż $c_0 l^{-(1-\delta)s}$) i wybierzmy spośród nich możliwie największą rodzinę R_l cylindrów parami rozłącznych. Będzie ona liczyć co najmniej $c_1 l^{-2(1-\delta)s}/\tilde{A}_l^\delta$ elementów o średnicy co najmniej $c_2 l^{1+\delta}$ każdy.

Ustalmy dowolne (małe) l. Wszystkie cylindry z R_l są obrazami U pod działaniem pewnych odwzorowań konforemnych g_i, będących złożeniami odwzorowań f_i. Odwzorowań tych jest tyle, ile cylindrów w R_l. Każdy punkt, który jest granicą wyrażeń postaci $g_{\omega^n}(0)$, musi być także granicą ciągu $f_{\omega'^n}(0)$. Zatem w przypadku u.i.f. zbiór graniczny Λ' dla u.i.f. (g_i) jest zawarty w Λ.

Dla układu soficznego jest to troszeczkę bardziej skomplikowane. Aby wszystkie możliwe kombinacje odwzorowań g_i (tj. złożenia odpowiadających im ciągów symboli) były dopuszczalne, trzeba tę rodzinę nieco zmienić. Po pierwsze, spośród cylindrów R_l pozostawiamy jedynie te, których rozwinięcia symboliczne zaczynają się od jednego ustalonego symbolu j_1 (wybranego tak, aby cylindrów tych pozostało jak najwięcej). Ponieważ symboli jest k, więc liczność tej rodziny zmniejszy się co najwyżej o stałą. Następnie zaś każdy z tych cylindrów zastępuję przez taki jego podcylinder, którego rozwinięcie symboliczne kończy się na takie j_2 że $A_{j_2 j_1} = 1$. Ponieważ macierz A jest tranzytywna, można znaleźć taki podcylinder wśród potomków co najwyżej M-tego rzędu, zatem średnica cylindra zmniejszy się co najwyżej o stałą. Teraz odwzorowania g_i' odpowiadające nowo otrzymanym cylindrom można składać bez problemu, zaś u.i.f. przez nie generowany ma zbiór graniczny zawarty w Λ.

W obu przypadkach rodzina (g_i) jest układem skończonym, spełniającym SOSC. Odwzorowania g_i (bądź g_i') spełniają warunki dystorsji (4.5) z tymi samymi stałymi co funkcje f_i, więc żadne z nich nie ma w żadnym punkcie z U lokalnej stałej kontrakcji mniejszej niż $cl^{1+\delta}$. Stąd

$$\dim_H(\Lambda') \geq \frac{\log(cl^{-2(1-\delta)s}/\tilde{A}_l^\delta)}{-\log(cl^{1+\delta})}$$

Biorąc l małe i odpowiednio dobrane można skonstruować ciąg zbiorów $\Lambda(l)$, zawartych w Λ, których wymiary zbiegają do $\frac{2s-s_-(1-\delta)}{1+\delta}$. $\square$

Powyższe sformułowanie lematu 6.4 nie wymaga tak naprawdę żadnych warunków geometrycznych nałożonych na cylindry – pozostaje prawdziwe dla zupełnie dowolnych zbiorów. Zachodzi mianowicie następujący prosty lemat [AS]:

Lemat 6.7. *Niech G będzie grafem prostym nieskierowanym (tj. grafem nieskierowanym, w którym między dowolnymi dwoma wierzchołkami przebiega co najwyżej jedna krawędź, a żadna krawędź nie ma obu swoich końców w tym samym wierzchołku) o a wierzchołkach i $b-a$ krawędziach. Przez n_i oznaczam liczbę krawędzi, wychodzących z i-tego wierzchołka. Wtedy uzupełnienie tego grafu zawiera graf pełny o n wierzchołkach, gdzie*

$$n = \sum \frac{1}{n_i+1} \geq \frac{2a^2}{b}$$

W celu użycia tego lematu należy utworzyć graf, którego wierzchołkami będą cylindry, a krawędzie będą odpowiadać przecięciom między nimi – otrzymujemy powyższe sformułowanie lematu 6.4 bez jakichkolwiek założeń o kształcie cylindrów.

6.2 Absolutna ciągłość miary naturalnej

Zajmiemy się teraz jedynie układami dla których $s > d$. W tym wypadku możemy oczekiwać, że zbiór graniczny będzie miał wymiar d. Wymiar zbioru granicznego nie jest więc specjalnie interesującym obiektem (chociaż twierdzenie 7.11 działa również dla takich układów). Będziemy natomiast badać regularność miary ν.

Miarę ν będziemy przybliżać miarami ν_l o kawałkami stałej gęstości, słabo zbiegającymi do ν, określonymi następująco:

$$\nu_l = \sum_{C \in \Lambda_l} l^{s-d} m_{|C} \tag{6.6}$$

Ponieważ w rozbiciu Morana rozmiaru l jest około l^{-s} cylindrów, z których każdy ma d-wymiarową objętość około l^d, miara całej przestrzeni $\nu_l(\mathbb{R}^d)$ będzie równa 1 z dokładnością do stałej.

Przypomnijmy, że ([PeSo], [Ma]) aby miara ν była absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a i z całkowalną z kwadratem gęstością, potrzeba i wystarcza by

$$\int \underline{D}_\nu d\nu < \infty \tag{6.7}$$

Do szacowania dolnej gęstości miary ν użyję następującego lematu:

Lemat 6.8.

$$\underline{D}_\nu \approx \liminf_{l \to 0} D_{\nu_l}$$

Dowód. Wybierzmy dowolny punkt $x \in \Lambda$. Miara kuli o środku w x i promieniu r szacuje się następująco dla dowolnego l:

$$\nu(K_r(x)) \leq c_0 l^s \cdot \sharp\{L_{\omega^{n_i}} \in \Lambda_l; K_r(x) \cap \pi(C_{\omega^{n_i}}) \neq \emptyset\} \tag{6.8}$$

$$\nu(K_r(x)) \geq c_1 l^s \cdot \sharp\{L_{\omega^{n_i}} \in \Lambda_l; L_{\omega^{n_i}} \subset K_r(x)\}$$

Z definicji (6.6):

$$D_{\nu_l}(x) = l^{s-d} \sharp\{L_{\omega^{n_i}} \in \Lambda_l; x \in L_{\omega^{n_i}}\}$$

Jednak, podobnie jak w dowodzie stwierdzenia 6.1, odległość dowolnego punktu z $\pi(C_{\omega^n})$ od brzegu zbioru L_{ω^n} szacuje się z dołu przez $c_2 \cdot \mathrm{diam}(L_{\omega^n})$. Skoro tak, to

$$K_r(x) \cap \pi(C_{\omega^n}) \neq \emptyset \implies x \in L_{\omega^n}$$

dla dowolnego $L_{\omega^n} \in \Lambda_{r/c_2}$. Zatem prawa strona nierówności (6.8) równa jest $c_0 c_2^{s-d} l^d$ razy gęstość miary ν_{r/c_2} w punkcie x. Ostatecznie

$$\frac{\nu(K_r(x))}{m(K_r(x))} \leq c_0 c_2^{s-d} c_3 D_{\nu_{r/c_2}}(x),$$

stała c_3 pochodzi ze wzoru na objętość d-wymiarowej kuli.

Szacowanie w drugą stronę jest jeszcze prostsze: jeżeli $x \in L_{\omega^n} \in \Lambda_l$ to $L_{\omega^n} \subset K_l(x)$. Zatem

$$\frac{\nu(K_r(x))}{m(K_r(x))} \geq c_1 c_3 D_{\nu_r}(x)$$

Tezę lematu otrzymujemy, przechodząc w powyższych nierównościach z r do zera i biorąc dolną granicę obu stron. □

Następujące stwierdzenie będzie nam służyć jako kryterium regularności miary ν.

Stwierdzenie 6.9. *Jeżeli* $\int \underline{D}_\nu d\nu = \infty$ *to* $\lim_{l\to 0} l^{2s-d} \tilde{A}_l = \infty$.

Dowód. Z lematu Fatou oraz lematu 6.8 (analogicznie jak w dowodzie stwierdzenia 5.7) otrzymujemy

$$\liminf_{l\to 0} \int D_{\nu_l} d\nu_l = \infty$$

Po podstawieniu definicji (6.6) otrzymujemy

$$\int D_{\nu_l} d\nu_l = l^{2(s-d)} \sum_{C\in\Lambda_l} \sum_{C'\in\Lambda_l} m(C\cap C') \leq c l^{2s-d} \tilde{A}_l$$

□

Powyższy dowód przechodzi jedynie, gdy $\Lambda \subset U$. Jednak wniosek 6.5 pozwala usunąć to założenie.

6.3 Wymiar zbioru granicznego dla nieskończonych u.i.f.

Następujące stwierdzenie jest połączeniem stwierdzeń 6.1 oraz 6.6.

Stwierdzenie 6.10. *Dla nieskończonych u.i.f.*

$$\dim_C(\nu) \leq 2s - s_+$$

$$2s - s_- \leq \dim_H(\Lambda)$$

Dowód. Dowód pierwszej nierówności jest bardzo podobny do pierwszego dowodu stwierdzenia 6.1. Tak jak tam, rozbijamy przestrzeń $\Sigma \times \Sigma$ na rodzinę iloczynów kartezjańskich cylindrów W_{l_i} (tj par rozłącznych cylindrów z pokrycia Morana rozmiaru l_i, których rodzice się przecinają) oraz resztę, którą oznaczamy W'.

Przypominam, że dla nieskończonych u.i.f. pokrycie Morana rozmiaru l było definiowane jako rodzina wszystkich cylindrów o rozmiarach mniej więcej l (z dokładnością do raz wybranej stałej), zatem podniesienia tych cylindrów nie muszą być rozłączne ani też nie muszą pokrywać całego Σ (pokrywają jednak ustaloną część miary w tej przestrzeni).

$$Z(\alpha) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{(C_a, C_b) \in W_{l_i}} \int_{C_b} \int_{C_a} \frac{1}{|\pi(\omega) - \pi(\omega')|^\alpha} d\mu^2(\omega, \omega') +$$

$$+ \int \int_{W'} \frac{1}{|\pi(\omega) - \pi(\omega')|^\alpha} d\mu^2(\omega, \omega')$$

Niestety, nie wszystkie pary $(\omega, \omega') \in \Sigma \times \Sigma$ należą do pary cylindrów z pokrycia Morana jakiegokolwiek rozmiaru. Zatem zbiór W' jest większy niż w przypadku skończonych u.i.f., może zawierać coś więcej niż tylko pary symboli (ω, ω') dla których $\pi(\omega) = \pi(\omega')$. Zatem możemy jedynie oszacować, że pełna całka po Σ^2 jest nie mniejsza niż suma całek po W_{l_i}.

Zauważmy, że jeśli para ciągów symboli należy do pary przecinających się cylindrów z pokrycia Morana rozmiaru l, to odległość między ich rzutami jest nie większa od $2l$. Oznaczam

$$w(\omega, \omega') = \sup\{n; \exists C, C' \in \Lambda_{l_n}\ C \cap C' \neq \emptyset, \pi(\omega) \in C, \pi(\omega') \in C'\}$$

Poniższe szacunki wynikają ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego:

$$|\pi(\omega)-\pi(\omega')|^{-\alpha} \geq c\cdot l_{w(\omega,\omega')}^{-\alpha} \approx \sum_{j=0}^{w(\omega,\omega')} l_0^{-\alpha j}$$

Możemy teraz oszacować całkę $Z(\alpha)$

$$Z(\alpha)=\int |\pi(\omega)-\pi(\omega')|^{-\alpha} d\mu^2(\omega,\omega') \geq c\cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{C,C'\in\Lambda_{l_j};C\cap C'\neq\emptyset} \mu(C)\mu(C')l_j^{-\alpha} \approx$$

$$\approx \sum_j \tilde{A}_{l_j} l_j^{2s-\alpha}$$

co daje szukane górne ograniczenie na wymiar korelacyjny miary ν.

Ważniejsze dla nas będzie ograniczenie dolne, które niestety jesteśmy w stanie przeprowadzić jedynie dla wymiaru Hausdorffa. Przyjrzyjmy się pokryciu Morana rozmiaru l. Ponieważ każdy jego element ma miarę około l^s, a ich suma pokrywa pewien ustalony procent γ miary μ, więc ma ono (z dokładnością do stałej) γl^{-s} elementów.

Teraz możemy powtórzyć dowód stwierdzenia 6.6 – jedyna różnica polega na obecności dodatkowej stałej γ, która nie ma znaczenia dla małych l. $\square$

7 Przestrzeń parametrów

7.1 Oszacowania wstępne

Zajmiemy się teraz rodzinami u.i.f. lub układów soficznych, zależnych od jednego lub więcej parametrów. Będę zakładał, że liczba parametrów równa jest wymiarowi przestrzeni, w której działamy; wszystkie twierdzenia pozostaną oczywiście prawdziwe (choć słabsze) dla mniejszej liczby parametrów. Natomiast dodanie choćby jednego dodatkowego parametru spowoduje, że nie będą mogły być spełnione warunki transwersalności, które zdefiniuję dalej i które są niezbędne aby twierdzenia w pracy chciały działać.

Będę zakładać, że zależność kontrakcji f_i od parametrów t jest klasy $C^{1+\beta}$ na pewnym otoczeniu zbioru granicznego, ze stałą Höldera wybraną jednostajnie, tj. że funkcje Df_i oraz $\partial/\partial t f_i$ są w klasie C^β jako funkcje t i x.

Poniższe dwa lematy są standardowe.

Lemat 7.1. *Dla ustalonego ω $\pi_t(\omega)$ jest klasy $C^{1+\beta}$ jako funkcja t, stałą Höldera można wybrać niezależną od ω.*

Dowód. Będę korzystał z (4.1) jako definicji π_t. Wzór na pochodną względem parametru złożenia n funkcji, zależnych od tego parametru, wygląda następująco:

$$\frac{d}{dt}(f_1 \circ \ldots \circ f_n)(x) = \sum_{i=1}^{n} (f_1 \circ \ldots \circ f_{i-1})'(f_i \circ \ldots \circ f_n(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f_i(f_{i+1} \circ \ldots \circ f_n(x))$$

We wzorze (4.1) występuje granica, jednak jest ona osiągana eksponencjalnie szybko (szereg różnic jest bezwzględnie zbieżny), więc pochodna granicy równa jest granicy pochodnych. Zatem

$$\frac{d}{dt}\pi_t(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} Df_{\omega^i}(\pi_t(\sigma^i\omega)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f_{\omega_{i+1}}(\pi_t(\sigma^{i+1}\omega))$$

Oznaczmy tę sumę przez $H(t)$. Można ją oszacować z góry przez stałą c_0, gdyż mnożnik (macierz Df_{ω^i}) jest postaci $\lambda_i \cdot I$, z λ_i zbiegającym wykładniczo do zera, a mnożna $\partial/\partial t f_{\omega_{i+1}}$ jest ograniczona. Oszacujmy teraz różnicę mnożnych dla różnych t:

$$D_t f_i(\pi_t(\omega)) - D_{t'} f_i(\pi_{t'}(\omega)) = (D_t f_i(\pi_t(\omega)) - D_t f_i(\pi_{t'}(\omega)))+$$

$$+(D_t f_i(\pi_{t'}(\omega)) - D_{t'} f_i(\pi_{t'}(\omega)))$$

gdzie $D_{t'}$ oznacza pochodną po parametrze, obliczoną gdy jego wartość wynosi t'.

Pierwszy składnik jest to różnica wartości funkcji klasy C^β, obliczonych w punktach odległych o co najwyżej $c_0|t'-t|$. Drugi składnik jest to różnica wartości funkcji klasy C^β, obliczonych w punktach odległych o $|t'-t|$. Zatem oba szacują się przez $c_1|t'-t|^\beta$. Stąd

$$|H(t') - H(t)| \leq (c_1 \sum \lambda_i)|t'-t|^\beta$$

co kończy dowód lematu. □

Lemat 7.2. *Dla dowolnie wybranych t_1, t_2, ω^n i $x \in U$ zachodzi nierówność*

$$|\log Df_{\omega^n}(x)(t_1) - \log Df_{\omega^n}(x)(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|^\beta \log \det Df_{\omega^n}(x)$$

ze stałą niezależną od x oraz ω^n.

Dowód. Równoważne sformułowanie: funkcja

$$F_{x,\omega^n}(t) = |\frac{\log \det Df_{\omega^n}(x)(t)}{\log \det Df_{\omega^n}(x)(t_1)}|$$

jest klasy C^β, ze stałą Höldera niezależną od x i ω^n.

Oznaczmy $g_{\omega^n}(t,x) = \log Df_{\omega^n}(x)(t)$. Z założenia o funkcjach f_i wiem, że dla pewnej stałej c dla dowolnego i

$$|g_i(t_1,x) - g_i(t_2,x)| \leq c|t_2 - t_1|^\beta$$

(ponieważ Df_i ma wyznacznik oddzielony od zera, więc także jej logarytm jest hölderowski). Bez zmniejszenia ogólności możemy rozpatrywać jedynie t_1 i t_2 bliskie sobie – dla dalekich punktów spełnienie warunku Höldera można bez problemu osiągnąć, zmieniając stałą.

Wzór na pochodną złożenia n funkcji wygląda następująco:

$$(f_1 \circ \ldots \circ f_n)'(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i'(f_{i+1} \circ \ldots \circ f_n(x))$$

Zatem

$$|g_{\omega^n}(t_1,x) - g_{\omega^n}(t_2,x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |g_{\omega_i}(t_1, f_{i+1} \circ \ldots \circ f_n(x)(t_1)) - g_{\omega_i}(t_2, f_{i+1} \circ \ldots \circ f_n(x)(t_2))|$$

Tak, jak w lemacie 7.1, wyrażenie $f_{i+1} \circ \ldots \circ f_n(x)$ jest klasy $C^{1+\beta}$ jako funkcja t, ze stałą Höldera wybraną jednostajnie. Zatem jego wartości dla różnych t_1, t_2 nie różnią się bardziej niż o $c \cdot |t_1 - t_2|$. Rozpisując każdą z różnic pod znakiem sumy tak, jak w dowodzie lematu 7.1, możemy oszacować każdą z nich przez $c' \cdot |t_1 - t_2|^\beta$.

Szacując teraz liczbę wyrazów n powyższej sumy ze wzoru

$$|\log \det Df_{\omega^n}| \geq nd |\log \lambda(t)|,$$

gdzie λ jest największym współczynnikiem kontrakcji odwzorowań f_i, otrzymujemy

$$|\log Df_{\omega^n}(x)(t_1) - \log Df_{\omega^n}(x)(t_2)| \leq \frac{c' |\log \det Df_{\omega^n}(x)|}{d |\log \max(\lambda(t_1), \lambda(t_2))|} |t_1 - t_2|^\beta$$

Aby zakończyć dowód lematu wystarczy zauważyć, że $\lambda(t)$ jest funkcją klasy C^β (więc dla bliskich t_1 i t_2 nie zmienia się za dużo) i jest oddzielona od 1. $\square$

Wniosek 7.3. *Wymiar podobieństwa s jest klasy C^β jako funkcja parametru t.*

Dowód. Niech ω^{n_i} będą rozwinięciami symbolicznymi dowolnej ustalonej rodziny rozłącznych cylindrów, pokrywających Σ. Przy zmianie parametru t zarówno $\frac{\log \underline{\lambda}_{\omega^n}(t)}{\log \underline{\lambda}_{\omega^n}(t_0)}$ jak i $\frac{\log \overline{\lambda}_{\omega^n}(t)}{\log \overline{\lambda}_{\omega^n}(t_0)}$ są funkcjami klasy C^β, ze stałymi Höldera niezależnymi od ω^n. Aby to pokazać, wystarczy zastosować lemat 7.2 do dwu punktów x: tego, w którym lokalny współczynnik kontrakcji odwzorowania f_{ω^n} osiąga wartość $\underline{\lambda}_{\omega^n}(t)$ ($\overline{\lambda}_{\omega^n}(t)$) i tego, w którym osiągane jest $\underline{\lambda}_{\omega^n}(t_0)$ ($\overline{\lambda}_{\omega^n}(t_0)$).

Wtedy (z definicji ciśnienia (4.16)) dla dowolnego ustalonego $\tilde{s}$ ciśnienie $P(\tilde{s})(t)$ jest hölderowską funkcją t. Ponieważ zaś pochodna ciśnienia jest ograniczona co do modułu z dołu przez stałą, więc jego miejsce zerowe (czyli wymiar podobieństwa s) również zależy od t w sposób hölderowski. $\square$

W poprzednim rozdziale zostały pokazane stwierdzenia 6.1, 6.6 oraz 6.9, wiążące własności zbioru granicznego Λ i miary ν z szybkością wzrostu liczby przecięć cylindrów $\tilde{A}_l$. Dla określenia zbioru parametrów, dla których własności te zachodzą, wygodniej jest jednak przedstawić te warunki w terminach funkcji A_l, przez co oznaczam liczbę par przecinających się cylindrów z pokrycia Morana rozmiaru l, których rozwinięcia symboliczne mają różne pierwsze symbole. Zachodzi ważna zależność pomiędzy tymi wielkościami (analogiczna do (5.2)):

Lemat 7.4. *Zachodzi (dla pewnej stałej c) oszacowanie*

$$\tilde{A}_l \le c l^{-s} (1 + \sum_{l_i > l} l_i^s A_{l_i})$$

Dowód. Dowód będzie przeprowadzony następująco: skonstruuję odwzorowanie ϕ, przyporządkowujące każdej parze przecinających się cylindrów z Λ_l ($\tilde{A}_l$ jest to właśnie liczba takich par) pewną parę przecinających się cylindrów z $\Lambda_{l'}$, $l' \ge l$, których pierwsze wyrazy w rozwinięciu symbolicznym są różne; te pary są zliczane w $A_{l'}$. Następnie zaś wyszacuję liczbę przeciwobrazów dowolnego elementu z przeciwdziedziny tego odwzorowania.

Odwzorowanie konstruujemy następująco. Każda para przecinających się różnych cylindrów L_a, L_b z pokrycia Morana rozmiaru l ma gdzieś wśród cylindrów mniejszego rzędu swojego najbliższego wspólnego przodka L_{ω^n}. Trójka (L_{ω^n}, L_a, L_b) jest obrazem trójki $(U, L_{a'}, L_{b'})$ pod działaniem odwzorowania f_{ω^n}. Cylindry $L_{a'}$ i $L_{b'}$ mają rozwinięcia symboliczne zaczynające się od różnych symboli (w przeciwnym wypadku L_{ω^n} nie byłby najbliższym wspólnym przodkiem L_a i L_b). Przy tym, z ograniczoności dystorsji, cylindry $L_{a'}$ i $L_{b'}$ mają zbliżone rozmiary. Jeżeli nawet nie należą razem do jednego pokrycia Morana (bo np. $L_{a'}$ ma większą średnicę) to jeden z nich należy do wspólnego pokrycia Morana z pewnym przodkiem drugiego, który może (przy zadaniu jakichś kryteriów wyboru – np. największy taki przodek $L_{b''}$, którego średnica jest jeszcze mniejsza od średnicy $L_{a'}$) być wybrany jednoznacznie. Tak otrzymaną parę $L_{a'}, L_{b''}$ będę nazywał obrazem pary L_a, L_b przy odwzorowaniu ϕ.

Zatem każdej parze różnych przecinających się cylindrów rozmiaru l mogę jednoznacznie przyporządkować pewną parę przecinających się cylindrów (L', L'') większego rozmiaru, których rozwinięcia symboliczne zaczynają się od różnych symboli i które należą do wspólnego pokrycia Morana odpowiedniego rozmiaru. Cylindry te są więc policzone w A_{l_i} dla pewnego $i \le n$.

Z drugiej strony, w przypadku u.i.f. każda para cylindrów (L', L'') rozmiaru l' o różnych pierwszych symbolach rozwinięcia odpowiada co najwyżej (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) $(l_n/l)^s$ parom przecinających się cylindrów rozmiaru l. Mianowicie, rozważmy pary cylindrów postaci $L'_0 = (f_{\omega^n}(L'), L''_0 = f_{\omega^n}(L''))$ gdzie ω^n jest tak dobrane, aby mniejszy z otrzymanych cylindrów (bez zmniejszania ogólności L'_0) był rozmiaru w przybliżeniu l. Takich ciągów ω^n jest mniej więcej tyle, co cylindrów w pokryciach Morana rozmiarów między Kl/l_n a $l/(Kl_n)$, czyli $(l_n/l)^s$ (z dokładnością do stałej multiplikatywnej).

Otrzymane dwa cylindry nie muszą należeć do wspólnego pokrycia Morana, ale (podobnie jak poprzednio) muszą mieć w przybliżeniu te same rozmiary ze względu na ograniczoną dystorsję. Podobnie, jak powyżej, zastępujemy większy z tych cylindrów (L_0''), tym razem przez odpowiedniego jego potomka. Odpowiedni znaczy tutaj rozmiarów zbliżonych do drugiego cylindra i przecinający się z nim – takich potomków nie może być więcej niż $c_0 = c'(K/L)^s$, gdyż średnice cylindrów L_0' oraz L_0'' nie różnią się bardziej niż o stałą K/L. W ten sposób otrzymujemy wszystkie możliwe pary $(L_0', \tilde{L}_0'')$ leżące w przeciwobrazie (L', L'') przy odwzorowaniu ϕ.

Dla układów soficznych podobne oszacowanie uzyskuje się tym łatwiej, gdyż niektóre zbiory postaci $f_{\omega^n}(L_{\tau^m})$ cylindrami nie są (gdyż $\omega^n\tau^m$ nie musi być ciągiem dopuszczalnym).

Należy jeszcze dodać przecięcia cylindrów z samymi sobą (jest ich tyle samo ile cylindrów w pokryciu Morana, czyli l^{-s}). □

7.2 Transwersalność 1: wymiar zbioru granicznego

Aby z warunków na A_l otrzymać warunki na parametry t, konieczne są warunki transwersalności, gwarantujące niezdegenerowanie zależności układu od parametrów. Dla ich zapisania oznaczmy przez $I(C_1, C_2)$ zbiór tych parametrów t, dla których rzuty danych dwu cylindrów $\pi_t(C_1)$ i $\pi_t(C_2)$ przecinają się.

Przypomnijmy, że warunek transwersalności użyty przez Pollicotta i Simona (4.14) mówił (w jednowymiarowej sytuacji), że jeśli obrazy dwu ciągów symboli z Σ pod działaniem projekcji π są blisko siebie, to przy zmianie parametru ich wzajemne położenie zmienia się szybko. Naturalnym wielowymiarowym uogólnieniem tego warunku jest żądanie, by

$$\exists Y\ \forall \omega, \omega'; \omega_1 \neq \omega_1' \quad |h_t(\omega, \omega')| < Y \implies |J(h_t(\omega, \omega')| > Y \tag{7.1}$$

gdzie $J(h)$ jest jakobianem (względem zmiennej t) odwzorowania h a h_t oznacza (podobnie jak w (4.14)) $\pi_t(\omega) - \pi_t(\omega')$. Warunek (7.1) będę nazywał *klasycznym* warunkiem transwersalności.

Lemat 7.5. *Jeżeli spełniony jest klasyczny warunek transwersalności to dla dowolnie ustalonych ω, ω' każda składowa przeciwobrazu kuli o środku w początku układu i promieniu $r < Y$, Y to samo co w (7.1), przy odwzorowaniu $h_t(\omega, \omega')$ (jako funkcji t) mieści się w kuli o promieniu $c' \cdot r$, przy czym stała c' nie zależy od ω, ω'.*

Dowód. Ponieważ pochodne kierunkowe (po t_i) funkcji $h_t(\cdot, \cdot)$ są ograniczone co do modułu przez stałą, więc z ograniczoności z dołu wyznacznika macierzy Jacobiego wynika, że odwzorowanie odwrotne jest (lokalnie) dobrze określone a wartości własne jego macierzy Jacobiego są wspólnie ograniczone z góry. Zatem zwiększa ono odległości między punktami co najwyżej o stałą. □

Naszym celem będzie oszacowanie rozmiaru zbioru tych parametrów, dla których wymiar Hausdorffa zbioru granicznego jest mniejszy zarówno od wymiaru podobieństwa, jak i od wymiaru całej przestrzeni. Stosować będziemy następujący warunek:

Definicja 7.6. d-parametrowa rodzina u.i.f. spełnia *warunek transwersalności* dla parametru t_0, jeżeli dla dowolnego dodatniego ε istnieje taka stała $c(\varepsilon)$ oraz takie otwarte otoczenie V punktu t_0, że dla dowolnego rozmiaru l dla wszystkich poza $c(\varepsilon) \cdot l^{-s(t_0)}$ par cylindrów $C_1, C_2 \in \Lambda_l(t_0)$, nie mających żadnych wspólnych przodków poza cylindrem zerowym, zbiór $I(C_1, C_2) \cap V$ można nakryć przy pomocy co najwyżej $c(\varepsilon) \cdot l^{-\varepsilon}$ kul o promieniu $c(\varepsilon) \cdot l^{1-\varepsilon}$ każda.

Stwierdzenie 7.7. *Warunek transwersalności wynika z klasycznego warunku transwersalności.*

Dowód. Wystarczy rozpatrywać warunek transwersalności dla małych l – dla dużych jest on zawsze spełniony (dla odpowiednio dużego $c(\varepsilon)$).

Niech więc $l < Y/4$, gdzie Y jest wzięte z (7.1). Weźmy dowolne dwa cylindry C_1 oraz C_2, należące do pokrycia Morana rozmiaru l dla $t = t_0$, oznaczmy przez $L_1(t)$ i $L_2(t)$ ich rzuty. Niech ω oraz ω' będą dowolnymi dwoma ciągami symboli z Σ, należącymi odpowiednio do C_1 i C_2. Punkty $\pi_t(\omega)$ i $\pi_t(\omega')$ oznaczam $x(t)$ i $x'(t)$.

Każdy ze zbiorów $L_1(t_0)$ oraz $L_2(t_0)$ zawiera się w kuli o promieniu l i środku w $x(t_0)$ lub $x'(t_0)$, odpowiednio. Jeżeli weźmiemy odpowiednio małe otoczenie V punktu t_0, to logarytm rozmiaru każdego z cylindrów L_1 i L_2 zmieni się w nim co najwyżej o stałą multiplikatywną, którą można uczynić dowolnie bliską jedności. Zatem dla dowolnego $t \in V$ cylindry L_1 i L_2 będą się zawierać w kulach o promieniu $r = 2l^{1-\varepsilon}$ i środku w $x(t)$ bądź $x'(t)$, odpowiednio. Zatem, jeżeli cylindry te się przecinają to punkty $x(t)$ i $x'(t)$ leżą w odległości mniejszej niż Y.

Możemy więc zastosować warunek (7.1) klasycznej transwersalności do ciągów ω oraz ω'. Wynika z niego (patrz lemat 7.5), że zbiór parametrów, dla których punkty x i x' są w odległości mniejszej od $2r$, składa się z pewnej liczby składowych spójnych, każda z których zawiera się w kuli o promieniu Yr.

Wystarczy teraz oszacować liczbę takich składowych. Weźmy dwie takie składowe, V_1 i V_2, i dowolne dwa punkty t_1 i t_2 do nich należące. Rozpatrzmy funkcję (o wartościach wektorowych)

$$H(w) = h_{t_1 + w(t_2 - t_1)/|t_2 - t_1|}(\omega, \omega')$$

na odcinku $w \in [0, |t_2 - t_1|]$. W punkcie początkowym $w_1 = 0$, jak również końcowym $w_2 = |t_2 - t_1|$, wartością tej funkcji jest wektor o długości mniejszej od $2r$, a jej pochodna jest wektorem o długości oddzielonej od zera (jak w dowodzie lematu 7.5). Kiedy zmieniamy w, ta pochodna musi się bardzo zmienić (w szczególności, jej rzut na $\frac{d}{dw}H(w)_{|w=w_0}$ musi zmienić znak) bo w przeciwnym wypadku wektor $H(w_2)$ byłby duży.

Wszystkie funkcje $h_t(\cdot,\cdot)$ są klasy $C^{1+\beta}$, ze stałą Höldera wspólnie ograniczoną (lemat 7.1). Zatem aby składowa pochodnej kierunkowej którejś z tych funkcji zmieniła się o stałą Y, punkt t w którym obliczamy tę pochodną musi się przesunąć co najmniej o pewną inną stałą c'. Zatem odległość między składowymi V_1 oraz V_2 jest ograniczona z dołu przez stałą c', niezależnie od wyboru ω, ω', l, V_1 oraz V_2, czyli liczba zbiorów V_i szacuje się przez stałą. $\square$

Warunek ten można jeszcze uogólnić:

Definicja 7.8. d-parametrowa rodzina u.i.f. spełnia *zmodyfikowany warunek transwersalności* z funkcją $(g(u), h(u))$ dla parametru t_0, jeżeli istnieje taka stała c oraz takie otwarte otoczenie V punktu t_0, że dla dowolnego rozmiaru l i dla każdego $u \in (0, 2)$ dla wszystkich poza $c \cdot l^{-s(t_0)(2-u)}$ par cylindrów $C_1, C_2 \in \Lambda_l(t_0)$, nie mających żadnych wspólnych przodków poza cylindrem zerowym, zbiór $I(C_1, C_2) \cap V$ można nakryć przy pomocy co najwyżej $c \cdot l^{-h(u)}$ kul o promieniu $c \cdot l^{g(u)}$ każda.

W tej definicji $0 < u < 2$, $h(u) \geq 0$ a nierosnąca funkcja $g(u)$ przyjmuje wartości nieujemne. Utwórzmy funkcję odwrotną do $g(u)$ (obejmującą także takie wartości, jakich funkcja $g(u)$ nie przyjmuje) wzorem

$$g^{-1}(v) = \inf\{u; g(u) \leq v\}$$

Powyższa definicja jest dosyć skomplikowana. Aby przedstawić bliżej jej działanie, podam kilka przykładów. Niech funkcja h równa jest tożsamościowo 0, a funkcja g równa jest 1 dla $0 < u \leq 1$ oraz 0 dla $u > 1$. Wtedy zmodyfikowany warunek transwersalności sprowadza się do żądania, by dla wszystkich poza cl^{-s} par cylindrów $(C_1, C_2) \in \Lambda_l(t_0)$ nie mających wspólnych przodków poza cylindrem zerowym zbiór $I(C_1, C_2)$ dawał się nakryć przy pomocy ograniczonej liczby kul o promieniu l. Jeśli g byłoby zawsze równe 1, to warunek ten musiałby być spełniony dla niemal wszystkich (poza c) takich par cylindrów. Jeśli g byłoby równe 1 dla $u \leq 1$ oraz 1/2 dla $u > 1$, to dla wszystkich poza cl^{-s} par cylindrów $(C_1, C_2) \in \Lambda_l(t_0)$ nie mających wspólnych przodków poza cylindrem zerowym zbiór $I(C_1, C_2)$ można pokryć przy pomocy ograniczonej liczby kul o promieniu l, zaś dla pozostałych par cylindrów możemy musieć używać kul o promieniu $\sqrt{l}$ (co odpowiada nie transwersalności, ale styczności drugiego rzędu). Na koniec, niech g równe jest zawsze 1, ale niech h równe jest tożsamościowo $1/2$ – wtedy dla niemal wszystkich par cylindrów zbiór $I(C_1, C_2)$ można pokryć kulami o promieniu l, ale trzeba ich wziąć $c\sqrt{l^{-1}}$.

Dzięki takiemu sformułowaniu definicja uwzględnia układy, w których występuje wiele różnych stopni nietranswersalności (styczności).

Ustalmy $p < \min(s, d)$ i niech B_p oznacza zbiór tych parametrów t, dla których wymiar Hausdorffa zbioru granicznego Λ jest nie większy od p. Będziemy szacować lokalny wymiar zbioru B_p w otoczeniu dowolnie wybranego punktu t_0, korzystając z następującego lematu:

Lemat 7.9. *Niech Λ_l będzie pokryciem Morana rozmiaru l dla u.i.f. przy $t = t_0$. Wtedy ta sama rodzina cylindrów jest δ-pokryciem dla dowolnego t bliskiego t_0, przy czym $\delta = O(|t_0 - t|^\beta)$.*

Dowód. Przypominam, że δ-pokrycie jest to rodzina rozłącznych cylindrów, których podniesienia pokrywają Σ, ale których rozmiary nie są takie same z dokładnością do stałej (jak dla pokrycia Morana) ale mogą się różnić nieco bardziej (zależnie od δ). Dokładna definicja została podana w poprzednim rozdziale.

Rodzina cylindrów, będąca pokryciem Morana ustalonego rozmiaru dla pewnej wartości parametru, jest rodziną zbiorów rozłącznych, pokrywających Σ. Wystarczy zatem sprawdzić czy spełniony jest warunek na rozmiary cylindrów. Z warunku dystorsji (4.6) rozmiary cylindrów są proporcjonalne (z dokładnością do stałej K) do pochodnej odwzorowania f_{ω^n} w dowolnie wybranym punkcie $x \in U$. Pochodna ta zaś z lematu 7.2 szacuje się wzorem

$$|\log \frac{Df_{\omega^n}}{l}| \leq c \cdot |t_0 - t|^\beta \log l$$

co daje żądane szacowanie na δ-pokrycie dla $\delta = c \cdot |t_0 - t|^\beta$. □

Niech Λ_l będzie pokryciem Morana rozmiaru l dla u.i.f. dla parametru t_0. Dla bliskich parametrów jest to δ-pokrycie tego samego rozmiaru, z δ dowolnie bliskim zeru. Przez $\tilde{A}_l(t)$ oraz $A_l(t)$ będę oznaczać liczbę przecięć między cylindrami z naszego wybranego pokrycia (odpowiednio: wszystkich przecięć bądź tylko między cylindrami bez wspólnych przodków) w zależności od parametru t. Zgodnie z lematem 7.4, funkcje $\tilde{A}_l$ oraz A_l rosną mniej więcej równie szybko gdy l zbiega do zera (gdyż $\tilde{A}_l \geq A_l$), naturalnie pod warunkiem że funkcje te w ogóle rosną, czyli że nie zachodzi OSC. Stwierdzenie 6.6 można więc zapisać następująco:

$$B_p \cap K_r(t_0) \subset \bigcap_{\varepsilon > \varepsilon(r)} \bigcap_{l>0} \bigcup_{l_i<l} \{t; A_{l_i}(t) > l_i^{p-2s+\varepsilon}\} \tag{7.2}$$

gdzie $\varepsilon(r)$ zbiega do zera wraz z r.

Z kolei zbiór $\{t; A_l(t) > M\}$ można opisać jako zbiór tych punktów t, które należą do co najmniej M spośród zbiorów $I(C_1, C_2)$.

Poniższy lemat jest mocniejszą wersją lematu 5.6.

Lemat 7.10. *Dana jest rodzina B składająca się z a zbiorów regularnych o średnicach d_i. Niech s będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wtedy zbiór punktów, należących do co najmniej b spośród zbiorów należących do tej rodziny można nakryć przy pomocy rodziny kul o średnicach $\tilde{d}_i$, przy czym*

$$\sum \tilde{d}_i^s \leq c \cdot \frac{1}{b} \sum d_i^s$$

zaś średnica każdej z kul nie przekracza czterokrotnej średnicy największego ze zbiorów.

Dowód. Zbiór punktów, b-krotnie nakrytych zbiorami z B, będę oznaczał przez B'. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że

$$d_1 > d_2 > \ldots > d_a$$

Dowód opiera się na konstrukcji, wykorzystywanej także do dowodu lematu Vitaliego. Wybierzmy z naszej rodziny B pewną maksymalną podrodzinę zbiorów rozłącznych B_1 (tj. zbiory należące do B_1 są parami rozłączne, ale każdy z pozostałych zbiorów należących do B przecina jakiś ze zbiorów z B_1). Rodzinę tę wybieramy w następujący sposób: bierzemy zbiór o największej średnicy, następnie zbiór o największej średnicy spośród rozłącznych z nim i tak dalej.

Następnie wybieramy w taki sam sposób rodzinę B_2 spośród zbiorów z $B \setminus B_1$, następnie B_3 z $B \setminus (B_1 \cup B_2)$, i tak dalej aż do B_b.

Dla zbioru regularnego X o średnicy d niech $T(X)$ oznacza najmniejszą kulę zawierającą d-otoczkę zbioru X. Kula taka ma średnicę nie większą od $4d$. Niech $C_i = T(B_i)$.

Wtedy dla dowolnego i każdy punkt $x \in B'$ należy do jakiegoś zbioru $X \in C_i$. Mianowicie, każdy punkt $x \in B'$ należy do któregoś ze zbiorów z $B \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$ (gdyż należy do b przecinających się zbiorów, a do każdej z rodzin B_j należy co najwyżej jeden z nich). Niech należy do zbioru X. Albo ten zbiór należy do B_i (i wtedy zawiera się w $T(X) \in C_i$), albo też nie należy.

W tym drugim przypadku musi on przecinać jakiś zbiór $Y \in B_i$ o takiej samej lub większej średnicy – wynika to z konstrukcji rodziny B_i. Oznacza to jednak, że jest zawarty w $T(Y) \in C_i$.

Mamy zatem b rodzin kul, każda z tych rodzin pokrywa B'. Równocześnie

$$\sum_{i=1}^{b} \sum_{Y \in C_i} \operatorname{diam}(Y)^s \leq 4^s \sum_{i=1}^{b} \sum_{X \in B_i} \operatorname{diam}(X)^s \leq 4^s \sum_{X \in B} \operatorname{diam}(X)^s$$

Zatem,

$$\sum_{Y \in C_i} \operatorname{diam}(Y)^s \leq \frac{1}{b} 4^s \sum_{X \in B} \operatorname{diam}(X)^s$$

dla pewnego i. □

Twierdzenie 7.11. *Jeżeli u.i.f. spełnia zmodyfikowany warunek transwersalności, to dla dowolnego* $p < \min(d, s(t_0), s(t_0) \cdot g^{-1}(0))$ *lokalny wymiar Hausdorffa zbioru* B_p *parametrów* t*, dla których wymiar Hausdorffa zbioru granicznego* Λ_t *spada poniżej* p*, obliczony w punkcie* t_0 *nie przekracza*

$$H(p) = \sup_{u \leq \frac{p}{s(t_0)}} \frac{p + h(u) - s(t_0)u}{g(u)}$$

W szczególności, jeśli spełniony jest warunek transwersalności to wymiar ten nie przekracza p *dla żadnego* $p < s(t_0)$.

Przed przystąpieniem do dowodu chciałbym przypomnieć, jak przebiegał dowód twierdzenia 5.1. Zaczęliśmy od zapisania warunku koniecznego przynależności punktu do zbioru B_p w terminach liczb przecięć – teraz użyjemy wzoru (7.2). Następnie przy pomocy kombinatorycznego lematu 5.6 i warunku transwersalności skonstruowaliśmy pokrycie zbioru B_p nieskończoną rodziną kul (odcinków) o różnych promieniach – teraz posłuży nam do tego lemat 7.10. Ostatecznie, pokazaliśmy że miara Hausdorffa zbioru B_p jest skończona w dowolnym wymiarze większym od p.

Poniższy dowód realizuje ten sam pomysł. Są jedynie dwie istotne różnice, związane z większą ogólnością zmodyfikowanego warunku transwersalności.

Po pierwsze, nie mamy informacji o przecięciach wszystkich par cylindrów (jedynie o 'wszystkich za wyjątkiem...'). Okazuje się jednak, że pełna informacja nie jest konieczna – jeśli wiemy, że przecina się x par, a nie mamy informacji o y parach, przy czym $y \ll x$, to nawet jeśli wszystkie z nich się przecinają, nie ma to istotnego znaczenia.

Po drugie, rozmiary kul, którymi będziemy pokrywać zbiór B_p nie muszą mieć takich samych rozmiarów jak odpowiadające im cylindry, gdyż w zmodyfikowanym warunku transwersalności dopuściliśmy przecięcia nietranswersalne. Efektem jest, że oszacowanie na wymiar zbioru B_p może być gorsze niż uprzednio.

W założeniach twierdzenia warunek $p < s(t_0) \cdot g^{-1}(0)$ został wprowadzony jedynie po to, aby rozmiary kul jakimi pokrywamy zbiór B_p zbiegały do zera – inaczej nie moglibyśmy nic powiedzieć o wymiarze Hausdorffa. W zastosowaniach $g^{-1}(0)$ będzie zazwyczaj równe 2.

Dowód. Wystarczy nam pokazać, że wymiar Hausdorffa zbioru B_p nie przekracza

$$H'(p) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{u \le \frac{p+2\varepsilon}{s(t_0)}} \frac{p + h(u) - s(t_0)u}{g(u)}$$

gdyż (z definicji) $B_p = \bigcup_\varepsilon B_{p-\varepsilon}$, zatem $\dim_H(B_p) = \sup \dim_H(B_{p+\varepsilon})$.

Weźmy dowolne $z > H'(p)$ i ustalmy r (promień rozpatrywanego otoczenia punktu t_0) tak małe, że

$$z > \frac{p + h(u) - s(t_0)u + 3\varepsilon}{g(u)} \tag{7.3}$$

dla $\varepsilon = \varepsilon(r)$ i dla każdego $u < \frac{p+2\varepsilon}{s(t_0)}$.

Będziemy szacować z-wymiarową miarę Hausdorffa zbioru $B_p \cap K_r(t_0)$. Zgodnie z (7.2), zbiór ten zawiera się w sumie (po odpowiednio małych l) zbiorów postaci $\{t; A_l(t) > l^{p-2s(t_0)+\varepsilon}\}$.

Oznaczmy przez $B_p(l, \varepsilon)$ zbiór parametrów t, należących do co najmniej $l^{p-2s(t_0)+\varepsilon}$ spośród około $l^{-2s(t_0)}$ zbiorów $I(C_1, C_2)$. Jeżeli spośród tych zbiorów odrzucić dowolnie wybrane $l^{p-2s(t_0)+2\varepsilon}$, to każdy punkt z $B_p(l, \varepsilon)$ będzie należał do co najmniej $l^{p-2s(t_0)+2\varepsilon}$ spośród pozostałych, o ile $l^\varepsilon < 1/2$, co można osiągnąć dla odpowiednio małego l.

Oznaczmy przez $J_l(q)$ rodzinę tych par cylindrów z pokrycia Morana rozmiaru l, które są odrzucane w definicji zmodyfikowanego warunku transwersalności dla $u = q$, jest ich $c \cdot l^{-s(t_0)(2-q)}$. Od tej pory spośród wszystkich zbiorów $I(C_1, C_2)$ odrzucam zbiory należące do $I(J_l(\frac{p+2\varepsilon}{s(t_0)}))$.

Niech (u_i) będzie ciągiem arytmetycznym długości N, którego pierwszym wyrazem jest 0 a ostatnim $(p + 2\varepsilon)/s(t_0)$. Wtedy sumę (z krotnościami) nie wyrzuconych zbiorów $I(C_1, C_2)$ można nakryć $D(1)$ kulami o średnicy $c \cdot l^{g(u_1)}$, $D(2)$ kulami o średnicy $c \cdot l^{g(u_2)}$, … oraz $D(N)$ kulami o średnicy $c \cdot l^{g(u_N)}$ łącznie, gdzie

$$D(i) = c^2 l^{-2s-h(u_i)+su_{i-1}}$$

Wszystkie punkty z $B_p(l,\varepsilon)$ należą do co najmniej $c \cdot l^{p-2s+2\varepsilon}$ spośród powyższych kul. Zgodnie z lematem 7.10, $B_p(l,\varepsilon)$ można więc nakryć przy pomocy pewnej rodziny kul, przy czym suma z-tych potęg średnic tych kul nie przekracza $cl^{-p+2s-2\varepsilon} \cdot \sum D(i) l^{zg(u_i)}$. Sumę mnogościową tych kul oznaczam przez $B_p'(l,\varepsilon)$.

Ze wzoru (7.2)

$$B_p \cap K_r(t_0) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} B_p'(l_n,\varepsilon)$$

dla dowolnego odpowiednio małego l. Oszacujmy z-wymiarową miarę Hausdorffa tego zbioru, korzystając z wyprowadzonego powyżej pokrycia tego zbioru kulami o różnych średnicach.

$$H^z_{l^{g((p+2\varepsilon)/s(t_0))}}(B_p'(l,\varepsilon)) \le c \cdot \sum_{i=1}^{N} l^{-p-h(u_i)-2\varepsilon} l^{s(t_0)u_{i-1}} l^{zg(u_i)}$$

(przypominam, że $H^b_a(X)$ oznacza przybliżenie b-wymiarowej miary Hausdorffa zbioru X pokryciami o średnicy nie przekraczającej a).

Wyrażenie pod znakiem sumy można zapisać jako

$$l^{-s(t_0)u_1} l^{-p-h(u_i)+s(t_0)u_i+zg(u_i)-2\varepsilon} < l^{\varepsilon/2}$$

dla odpowiednio małego u_1 (z definicji z, równanie (7.3)). Podstawiając zamiast l kolejno wszystkie l_n, otrzymamy szereg geometryczny, zbieżny. Zatem

$$H^z_{l^{g((p+2\varepsilon)/s(t_0))}}(B_p \cap K_r(t_0)) < c(z,l,\varepsilon)$$

i wyrażenie to zmniejsza się wraz z l (gdyż sumę rozpoczynamy od coraz dalszych wyrazów). Ponieważ $g((p+2\varepsilon)/s(t_0)) > 0$, więc biorąc coraz mniejsze l wyrażenie $l^{g((p+2\varepsilon)/s(t_0))}$ (a więc także średnica pokrycia) zbiega do zera. Zatem z-wymiarowa miara Hausdorffa zbioru $B_p \cap K_r(t_0)$ jest skończona, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

7.3 Transwersalność 2: regularność miary naturalnej

Teraz zajmijmy się przypadkiem $s > d$ i kwestią, dla jak wielu parametrów miara ν_t jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a, a jej gęstość jest całkowalna z kwadratem. Oznaczmy zbiór parametrów, dla których to nie zachodzi, przez B. Odpowiedni warunek na parametry daje nam stwierdzenie 6.9. Przyjmuje on postać

$$B \subset \bigcap_M \bigcup_{l>0} \bigcap_{z<l} \{t; \tilde{A}_z > M z^{d-2s}\} \tag{7.4}$$

Potrzebujemy więc bardziej precyzyjnych szacunków na $\tilde{A}_l$, niż przy szacowaniu zbioru parametrów, dla których spada wymiar zbioru granicznego – z dokładnością do stałej, a nie do wolno rozbieżnej funkcji. W konsekwencji, warunek ten nie da się zapisać przy pomocy δ-pokryć, gdyż δ-pokrycia umożliwiają jedynie szacowanie szybkości rozbieżności. Musimy się więc ograniczyć do bardzo szczególnego przypadku, kiedy ta sama rodzina rodzin cylindrów jest pokryciem Morana dla wszystkich wartości parametru. Jest tak np. gdy wszystkie odwzorowania f_i są jednokładnościami (złożonymi ewentualnie z izometriami) ze stałymi kontrakcji postaci $\lambda_i(t) = \lambda_i^{g(t)}$.

Warunek (7.4) jest zapisany w terminach funkcji $\tilde{A}_l$. Aby go zapisać przy pomocy funkcji A_l, musimy go jeszcze nieco osłabić. Wprowadźmy oznaczenie $l_n(t) = l_n^{\frac{s(t_0)}{s(t)}}$. Dla tak zmienionego ciągu $l_n(t)$, dla t bliskiego t_0, lemat 7.4 jest nadal prawdziwy, ewentualnie z nieznacznie zmienioną stałą - wynika to z wniosku 7.3.

Zachodzi szacowanie

$$B \subset \bigcap_M \bigcup_{l>0} \bigcap_{z<l} \bigcup_{l_i>z} B_{M,m,i} \tag{7.5}$$

gdzie

$$B_{M,z,i} = \{t; A_{l_i(t)}(t) > M l_i(t)^{\frac{1}{2}d-\frac{3}{2}s(t)} z(t)^{\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}s(t)}\}$$

a $z(t) = z^{\frac{s(t_0)}{s(t)}}$.

Faktycznie, jeśli dla danego z i M parametr t nie należy do żadnego $B_{M,z,i}$, to (z lematu 7.4)

$$\tilde{A}_{z(t)}(t) z(t)^{2s(t)-d} \le c z(t)^{s(t)-d} \sum_{l_i>z} l_i(t)^{s(t)} A_{l_i(t)}(t) \le cM \cdot \sum_i \left(\frac{z(t)}{l_i(t)}\right)^{\frac{1}{2}(s(t)-d)} \le c' M$$

Niestety, nie jest prosto badać warunki tego typu. Głównym problemem jest to, że dowolnie mała zmiana $s(t)$ (a zatem dowolnie mała zmiana t) powoduje duże zmiany wyrażeń postaci $m^{s(t)}$ dla odpowiednio małych m. Będziemy musieli znacznie zmodyfikować oszacowania z rozdziału 5.

Jeżeli V jest odcinkiem parametrów, to przez $s(V)$ oznaczam minimum funkcji $s(t)$ dla $t \in V$. Wybierzmy pokrycie Morana Λ_l dla $t = t_0$.

Definicja 7.12. d-parametrowa rodzina u.i.f. spełnia *mocny warunek transwersalności* dla parametru t_0, jeśli istnieje takie otwarte otoczenie V punktu t_0 i taka stała c, że dla dowolnego l dla wszystkich oprócz ewentualnie $l^{d-s(V)}$ par cylindrów $C_1, C_2 \in \Lambda_l$ zbiór $I(C_1, C_2) \cap V$ można nakryć przy pomocy co najwyżej c kul K_i, przy czym średnica każdej z kul K_i nie przekracza $c \cdot \max\{\operatorname{diam}(L_1(t)), \operatorname{diam}(L_2(t))\}$, gdzie t jest dowolnym punktem z K_i.

Przede wszystkim zauważmy, że średnica cylindra odpowiednio wysokiego rzędu nie zmienia się istotnie gdy parametr t zmienia się o wielkość porównywalną ze średnicą tego cylindra. Faktycznie, cylinder L_{ω^n} jest obrazem U pod działaniem odwzorowania f_{ω^n}, którego pochodna zależy od t w sposób hölderowski (lemat 7.2). Zatem jeśli dla $t = t_0$ średnica cylindra L_{ω^n} wynosi l, to dla $|t - t_0| < l$ zachodzi nierówność

$$|\log \frac{\operatorname{diam} L_{\omega^n}(t)}{l}| < cl^\beta \log l$$

i prawą stronę można uczynić dowolnie małą dla odpowiednio małego l. Ponieważ zaś interesuje nas przede wszystkim to, co dzieje się dla małych skal, więc wybór konkretnego punktu t w definicji 7.12 nie ma znaczenia.

Mocny warunek transwersalności wynika z klasycznego warunku transwersalności, dowód nie różni się istotnie od dowodu stwierdzenia 7.7.

Dalej musimy pokazać kolejne uogólnienie lematu 5.6.

Lemat 7.13. *Niech $h(x)$ będzie funkcją rzeczywistą dodatnią, spełniającą warunek Lipschitza ze stałą $Y < Y_0 = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$. Niech $b(x)$ będzie taką funkcją rzeczywistą dodatnią, że jej logarytm $\log b(x)$ jest funkcją lokalnie lipschitzowską ze stałą $\frac{Z}{h(x)}$. Niech B będzie a-elementową rodziną kul K_i, przy czym $\operatorname{diam}(K_i) < h(x_i)$, gdzie x_i jest środkiem K_i. Wtedy zbiór punktów $x \in \mathbb{R}^d$, należących do co najmniej $b(x)$ zbiorów z B, można nakryć rodziną kul $K_i' = K(y_i, h(y_i))$, przy czym $\sum b(y_i) < c \cdot a$, c zależy jedynie od Z.*

Dowód. Dla dowolnego i wartość funkcji $h(x)$ jest mniej więcej stała (z dokładnością do stałej multiplikatywnej $\frac{1+Y}{1-Y}$) na całej kuli K_i, gdyż jej promień jest mniejszy od $h(x_i)$. Zatem logarytm funkcji $b(x)$ jest na kuli K_i lipschitzowski ze stałą $\frac{Z(1+Y)}{(1-Y)h(x_i)}$, czyli funkcja $b(x)$ jest na K_i stała (z dokładnością do stałej multiplikatywnej).

Niech z_1 będzie punktem, należącym do co najmniej $b(z_1)$ spośród kul K_i. Niech będą to kule $K_1, \ldots, K_{b(z_1)}$. Dla każdej z nich mamy (jak wyżej)

$$h(x_j) < \frac{1+Y}{1-Y} h(z_1)$$

Zatem dla $R_1 = \frac{1+Y}{1-Y}h(z_1)$ kula $\tilde{K}_1 = K(z_1, R_1)$ nakryje je wszystkie. Ponieważ dla $Y < Y_0$ $R_1 < \frac{1}{2}Y^{-1}h(z_1)$, więc dla dowolnego punktu $x \in \tilde{K}_1$ spełniona jest nierówność $h(x) > \frac{1}{2}h(z_1)$.

Kulę $\tilde{K}_1$ możemy więc nakryć przy pomocy co najwyżej c kul $K(y_i, h(y_i))$. Przy tym $b(y_i) < c' \cdot b(z_1)$, gdyż punkty y_i są od z_1 oddalone co najwyżej o $R_1 \approx h(z_1)$.

Teraz wybieramy jakiś punkt z_2, należący do co najmniej $b(z_2)$ spośród kul K_i, ale nie należący do $\tilde{K}_1$. Dla niego możemy znaleźć w analogiczny sposób kulę $\tilde{K}_2$ i jej pokrycie c kulami $K(y_i, h(y_i))$ takimi, że $b(y_i) < c' \cdot b(z_2)$ itd. W ten sposób pokryjemy wszystkie punkty z należące do co najmniej $b(z)$ kul K_i. Aby zakończyć dowód, potrzebujemy jedynie następującego szacowania:

$$\sum b(y_i) < cc' \cdot \sum b(z_i) \leq cc'a$$

Ostatnia nierówność wynika stąd, że każdemu punktowi z_i możemy przyporządkować co najmniej $b(z_i)$ kul K_i (te, do których należy) i to (jak wynika z powyższej konstrukcji) każdemu inne. □

Teraz możemy już udowodnić nasze ostatnie twierdzenie

Twierdzenie 7.14. *Niech d-parametrowa rodzina u.i.f. spełnia mocny warunek transwersalności. Niech ponadto pokrycie Morana dla jednego parametru $t = t_0$ pozostaje pokryciem Morana dla dowolnego innego parametru t, tzn. dowolne dwa cylindry o porównywalnych średnicach pozostają porównywalne przy zmianie parametru, stosunek ich średnic zmienia się co najwyżej o stałą. Niech ponadto wymiar podobieństwa $s(t_0)$ będzie większy od wymiaru przestrzeni d.*

Wtedy zbiór B jest d-wymiarowej miary 0 w otoczeniu t_0, tj. dla prawie wszystkich parametrów t bliskich t_0 miara ν jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a a jej gęstość jest całkowalna z kwadratem.

Dowód. Niech $\Lambda_{l_0^n}(t_0)$ będzie pokryciem Morana rozmiaru l_0^n dla $t = t_0$. Wszystkie elementy pokrycia Morana mają mniej więcej tę samą miarę μ_{t_0}, a jest ich mniej więcej $l_0^{-ns(t_0)}$. Z założenia ta sama rodzina cylindrów jest pokryciem Morana także dla dowolnego pobliskiego parametru t. Zatem miara μ_t każdego z tych cylindrów również jest mniej więcej taka sama, czyli wynosi około $l_0^{ns(t_0)} = l_0(t)^{ns(t)}$. Zatem rozmiar tego pokrycia równy jest (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) $l_0(t)^n$.

Będziemy korzystać z relacji (7.5). Z mocnego warunku transwersalności zbiór $B_{M,z,i}$ jest to zbiór punktów t, należących do co najmniej $b(t) =$

$Ml_i(t)^{\frac{1}{2}d-\frac{3}{2}s(t)}z(t)^{\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}s(t)}$ spośród $a = cl_i^{-2s(t_0)} = cl_i(t)^{-2s(t)}$ kul K_j, nakrywających zbiory $I(C_1, C_2)$ dla wszystkich możliwych par $C_1, C_2 \in \Lambda_{l_i}(t_0)$. Kule te mają średnice nie przekraczające $l(t) = c' \cdot \max\{\mathrm{diam}(L_{\omega^n}(t)); C_{\omega^n} \in \Lambda_{l_i}(t_0)\} \approx l_i(t)$.

Zastosujmy do tej rodziny lemat 7.13. Otrzymamy pokrycie zbioru $B_{M,z,i}$ rodziną kul K'_j taką, że

$$\sum Ml_i(t_j)^{\frac{1}{2}d-\frac{3}{2}s(t_j)}z(t_j)^{\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}s(t_j)} < cl_i(t_0)^{-2s(t_0)}$$

Zwróćmy uwagę, że prawa strona tej nierówności nie zmieni się, jeśli zamiast t_0 podstawimy jakiekolwiek inne t. Przekształcając tę nierówność, otrzymujemy

$$\sum l_i(t_j)^d \leq c'M^{-1}\sup_t\left(\frac{z(t)}{l_i(t)}\right)^{\frac{1}{2}s(t)-\frac{1}{2}d}$$

Lewa strona powyższej nierówności jest (z dokładnością do stałej) oszacowaniem górnym na objętość rodziny K'_j, a więc także zbioru $B_{M,z,i}$.

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{l_i>z} B_{M,z,i}\right) \leq \sum_{l_i>z} c'M^{-1}\sup_t\left(\frac{z(t)}{l_i(t)}\right)^{\frac{1}{2}s(t)-\frac{1}{2}d} \leq c''M^{-1}$$

$$\mathrm{vol}\left(\bigcap_{z<l}\bigcup_{l_i>z} B_{M,z,i}\right) \leq c''M^{-1}$$

Oznaczmy zbiór, którego objętość oszacowaliśmy w powyższej nierówności, przez B_l. Dla coraz mniejszych l zbiory tej postaci tworzą ciąg wstępujący. Zatem miara ich sumy równa jest granicy ich miar, czyli również szacuje się z góry przez $c''M^{-1}$. Biorąc teraz dowolnie duże M, otrzymujemy z (7.5) tezę twierdzenia. $\square$

Bibliografia

[AS] N. Alon, J. Spencer *The Probabilistic Method* John Wiley, New York 1992.

[BP] R. Benedetti, C. Petronio *Lectures on Hyperbolic Geometry* Springer-Verlag, Heidelberg 1992.

[BT] A. S. Besicovitch, S. J. Taylor On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure, *J. London Math. Soc.* , 29 (1954), 449-459.

[Bi] Ch. Bishop Minkowski dimension and the Poincaré exponent, *Michigan Math. J.* 43 (1996), 231-246.

[Bo1] R. Bowen *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* Lecture Notes in Math. 470 (1975).

[Bo2] R. Bowen Hausdorff dimension of quasi-circles, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 50 (1979), 259-273.

[C] C. Carathéodory Über das lineare Mass von Punktmengen, eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen* (1914), 406-426.

[CHY] W. Chin, B. Hunt, J. A. Yorke Correlation dimension for iterated function systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* 349 (1997), 1783-1796.

[E1] P. Erdös On a family of symmetric Bernoulli convolutions, *Amer. J. Math.* 61 (1939), 974-975.

[E2] P. Erdös On the smoothness properties of Bernoulli convolutions, *Amer. J. Math.* 62 (1940), 180-186.

[Fa1] K. J. Falconer *Fractal geometry : mathematical foundations and applications* John Wiley and Sons, Chichester 1990.

[Fa2] K. J. Falconer Dimensions and measures of quasi self-similar sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* 106 (1989), 543-554.

[Fr] O. Frostman Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications á la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.* 3 (1935), 1-118.

[Ga] A. M. Garsia, Arithmetic properties of Bernoulli convolutions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 102 (1962), 409-432.

[Gr] P. Grassberger Generalized Dimensions of Strange Attractors, *Phys. Lett. A* 97 (1983), 227-231.

[Ha] F. Hausdorff Dimension und äusseres Mass, *Math. Ann.* 79 (1919), 157-179.

[HP] H. Hentschel, I. Proccacia The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Attractors, *Physica D* 8 (1983), 435-445.

[Hu] J. E. Hutchinson Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* 30 (1981), 713-747.

[KSS] M. Keane, M. Smorodinsky, B. Solomyak On the morphology of γ-expansions with deleted digits, *Trans. Amer. Math. Soc.* 347 (1995), 955-966.

[MV] O. Martio, M. Vuorinen Whitney cubes, p-capacity and Minkowski content, *Expo. Math.* 5 (1987), 17-40.

[Ma] P. Mattila *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces* Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[MU1] D. Mauldin, M. Urbański Dimensions and measures in infinite iterated function systems, *Proc. London Math. Soc.* 73 (1996), 105-154.

[MU2] D. Mauldin, M. Urbański Parabolic iterated function systems, preprint 1998.

[Mo] P. Moran Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 42 (1946), 15-23.

[MM] H. McCluskey, A. Manning Hausdorff dimension for horseshoes, *Erg. Th. and Dyn. Sys.* 3 (1983), 251-260.

[PeSch] Y. Peres, W. Schlag Smoothness of projections, Bernoulli convolutions and the dimension of exceptions, preprint 1998.

[PeSo] Y. Peres, B. Solomyak Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof, *Math. Res. Lett.* 3 (1996), 231-239.

[Pe] Y. Pesin *Dimension Theory in Dynamical Systems* The University of Chicago Press, Chicago 1997.

[PoSi] M. Pollicott, K. Simon The Hausdorff dimension of λ-expansions with deleted digits, *Trans. Amer. Math. Soc.* 347 (1995), 967-983.

[Po] C. Pommerenke *Boundary Behaviour of Conformal Maps* Springer-Verlag, Heidelberg 1992.

[SY] T. Sauer, J. Yorke Are the Dimensions of a Set and Its Image Equal under Typical Smooth Functions? *Erg. Th. and Dyn. Sys.* 17 (1997), 941-956.

[SS] K. Simon, B. Solomyak Correlation dimension for self-similar Cantor sets with overlaps, *Fund. Math.* 155 (1998), 293-300.

[Si] Y. Sinai Gibbsian measures in ergodic theory, *Russian Math. Surveys* 27 (1972), No. 4, 21-69.

[So1] B. Solomyak Measure and Dimension for some Fractal Families, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 124 (1998), 531-546.

[So2] B. Solomyak On the random series $\sum \pm\lambda^i$ (an Erdös problem), *Annals of Math.* 142 (1995), 611-625.

[St] E. Stein *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* Princeton University Press, Princeton 1970.

[T1] C. Tricot Two definitions of fractal dimension, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 91 (1982), 54-74.

[T2] C. Tricot Porous Surfaces, *Constr. Approx.* 5 (1989), 117-136.

[T3] C. Tricot Douze définitions de la densité logarithmique, *Comptes Rendus* 293 (1981), 549-552.