DZIAŁ NAUKOWY

MATEMATYKA STOSOWANA TOM 11/52 2010

Ryszard Zieliński (Warszawa)

# O średniej arytmetycznej i medianie

**Streszczenie.** Mierząc pewną wielkość $\mu$ (długość, ciężar, temperaturę...) otrzymujemy wynik $X$, zwykle różniący się od $\mu$ o pewną wielkość losową (błąd losowy) $\varepsilon$. Rozkład $F$ prawdopodobieństwa błędu losowego $\varepsilon$ czasami jest znany, a czasami wiemy o nim tylko to, że jest jakimś rozkładem z ustalonej rodziny rozkładów $\mathcal{F}$ (np. rozkładem normalnym o średniej zero i nieznanym odchyleniu standardowym $\sigma$, albo jakimś rozkładem o ciągłej dystrybuancie). Jeżeli rozkład $F$ ma duży rozrzut, dokładność pomiaru może być niezadowalająca. Dobrze znanym i powszechnie stosowanym lekarstwem jest wielokrotne powtórzenie pomiaru i uśrednienie otrzymanych wyników. Okazuje się, że powszechnie stosowana średnia arytmetyczna może okazać się wysoce zawodna. Chociaż w bardziej abstrakcyjnym ujęciu rozważany w artykule problem polega na estymacji parametru położenia $\mu$ w modelu statystycznym z rodziną rozkładów $\{F_\mu : F_\mu(x) = F(x-\mu)\}$, w artykule trzymam się terminologii „pomiar-błąd pomiaru". W ogólniejszym sformułowaniu mówi się o problemie estymacji średniej wartości cechy w danej populacji, ale przejście na tę terminologię nie nastręcza żadnych trudności.

**Słowa kluczowe.** Pomiar, średnia arytmetyczna, mediana, estymacja, parametr położenia, rozrzut.

**1. Wstęp.** Mierząc pewną wielkość $\mu$ (długość, ciężar, temperaturę...) otrzymujemy wynik $X$, zwykle różniący się od $\mu$ o pewną wielkość losową $\varepsilon$ (błąd losowy). Rozkład prawdopodobieństwa $F$ błędu losowego $\varepsilon$ czasami jest znany, a czasami wiemy o nim tylko to, że jest jakimś rozkładem z ustalonej rodziny rozkładów $\mathcal{F}$. Jeżeli rozkład $F$ ma duży rozrzut, dokładność pomiaru może być niezadowalająca. Dobrze znanym i powszechnie stosowanym lekarstwem jest wielokrotne powtórzenie pomiaru. Bardziej formalnie: rozważamy model statystyczny

$$X_i = \mu + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

w którym $\mu$ jest parametrem liczbowym oraz $\varepsilon_i$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $F$ takim, że $E_F(\varepsilon) = 0$ (pomiar nieobciążony).

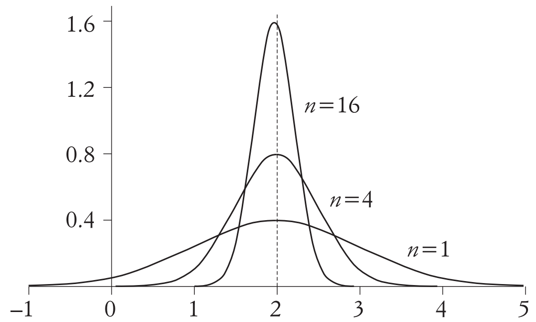
Jeżeli rozkład $F$ błędu jest jednoznacznie znany, będziemy mówili o *prostym modelu* (1), a jeżeli wiemy tylko tyle, że $F \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest ustaloną rodziną rozkładów – będziemy mówili o *modelu złożonym.* Jeżeli błąd $\varepsilon$ ma rozkład $F$, to rozkład obserwacji będzie oznaczany przez $F_\mu$. Przyjmujemy, że $F_\mu(x) = F(x - \mu)$.

Zadanie polega na oszacowaniu $\mu$ na podstawie obserwacji $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$. Własności rozkładu $F$ w modelu prostym lub własności rodziny $\mathcal{F}$ w modelu złożonym decydują o tym, co jest a co nie jest „dobrym estymatorem" wielkości (parametru) $\mu$.

Chociaż przyjęta w artykule terminologia odwołuje się do intuicji związanej z dokonywaniem pomiarów różnych obiektów, to problem jest ogólniejszy i obejmuje na przykład estymację średniej wartości cechy w danej populacji, np. estymację średnich zarobków w populacji danego kraju, średnich zwrotów danych papierów na giełdzie papierów wartościowych, średniego stopnia zanieczyszczenia powietrza, itp. Nie precyzuję na razie, co rozumiem przez „średnią" w tych sformułowaniach. Jeżeli $X$ jest interesującą nas cechą elementów populacji oraz $\mu$ jest interesującym nas wskaźnikiem, uzyskujemy model (1) pisząc $X = \mu + (X - \mu)$; tu $\mu$ może być średnią arytmetyczną badanej cechy, medianą, kwantylem (np. V@R), itp.

**2. Prosty model pomiaru z rozkładem normalnym.** Przypuśćmy, że rozkład błędu $F$ jest rozkładem normalnym $N(0, \sigma)$, gdzie $\sigma > 0$ jest ustalone i znane. W praktyce odpowiada to mierzeniu nieznanej wielkości $\mu$ za pomocą przyrządu pomiarowego o znanej dokładności. Model jest tak powszechnie znany i stosowany (metrologia, geodezja, astronomia, fizyka, zastosowania przemysłowe i zastosowania przyrodnicze), że nie musimy tutaj poświęcać mu dużo miejsca. Celem tego paragrafu jest ustalenie terminologii i oznaczeń oraz przywołanie narzędzi, które będą istotne w dalszej części artykułu.

W rozważanym modelu istotne jest to, że duże błędy są mało prawdopodobne: prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że błąd przekroczy bezwzględnie $x$, jest dla dużych $x$ wielkością rzędu $\exp(-x^2)$. Rozkładem obserwacji $X$ jest wtedy rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$ i zagadnienie sprowadza się do znanego z elementarnego kursu statystyki problemu estymacji wartości oczekiwanej zmiennej losowej o rozkładzie normalny ze znaną wariancją. Istotą tego modelu jest możliwość dowolnego zmniejszenia błędu (dowolnego zwiększenia dokładności pomiaru) przez wybór odpowiednio dużej liczby $n$ pomiarów: *średnia arytmetyczna* $\overline{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$. Redukcję błędu na skutek uśredniania coraz to większej liczby obserwacji ilustruje Rys. 1.




Rys. 1. Rozkład średniej $\bar{X}_n$ w modelu (1) dla $\mu = 2$ oraz $\epsilon \sim N(0,1)$

Ten mechanizm redukcji błędu przez powtarzanie pomiarów chyba najłatwiej jest spostrzec patrząc na odpowiednie funkcje charakterystyczne(*): jeżeli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest ciągiem zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma)$ z *funkcją charakterystyczną*

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\},$$

to funkcja charakterystyczna średniej arytmetycznej $\overline{X}_n = \sum_{j=1}^n X_j/n$ jest równa:

$$\varphi_{\overline{X}_n}(t) = \Big(\varphi_X(t/n)\Big)^n = \exp\{i\mu t - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) t^2\}.$$

Zakończenie procesu estymacji polega na podaniu przedziału ufności dla estymowanego parametru; wyższa dokładność estymacji prowadzi do krótszego przedziału ufności. W rozważanym tu modelu gaussowskim przedział ufności wyznacza się w podręcznikowy sposób.

**3. Prosty model pomiaru z rozkładem $\alpha$-stabilnym.** Będziemy teraz rozważali rozkłady $\alpha$-stabilne $S_\alpha(\mu, \lambda)$ z funkcją charaterystyczną

$$\varphi_X(t) = \exp\{i\mu t - |\lambda t|^\alpha\},$$

gdzie $\alpha$ jest parametrem kształtu (wykładnikiem charakterystyczym), $\mu$ – parametrem położenia oraz $\lambda$ – parametrem skali.

Rozszerzenie zastosowań statystyki na ekonomię, ubezpieczenia, rynki finansowe, itp. spowodowało, że standardowe metody związane z modelem gaussowskim stały się nieadekwatne: duże odchylenia poszczególnych obserwacji $X_i$ od „wartości centralnej $\mu$" stały się dużo bardziej prawdopodobne, niżby to wynikało z modelu gaussowskiego. Przykładem może służyć wysokość szkód pokrywanych przez towarzystwa ubezpieczeniowe: od czasu do

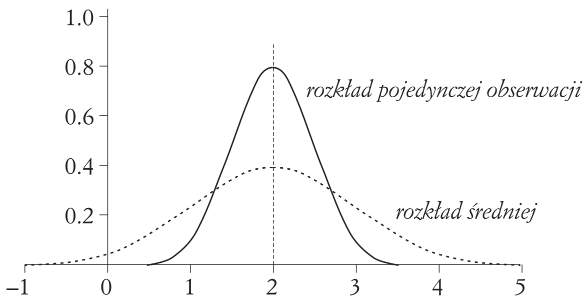
(*) Termin funkcja charakterystyczna nie ma tutaj nic wspólnego ze znanym w teorii zbiorów (przyp. red.).

czasu, ale częściej niżby to sugerował rozkład normalny, pojawia się szkoda bardzo wysoka.

Jeżeli próba $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest ciągiem zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\alpha$-stabilnym $S_\alpha(\mu, \lambda)$, to funkcja charakterystyczna średniej arytmetycznej $\overline{X}_n$ jest równa

$$\varphi_{\overline{X}_n}(t) = \left(\exp\{i\mu\frac{t}{n} - |\lambda\frac{t}{n}|^\alpha\}\right)^n = \exp\{i\mu t - |n^{1/\alpha-1}\lambda t|^\alpha\}.$$

Wnioskujemy stąd natychmiast, że średnia z $n$-elementowej próby może mieć rozkład bardziej rozproszony niż rozkład pojedynczej obserwacji (Rys. 2).




Rys. 2. Rozkład obserwacji $X \sim S_\alpha(2,1), \alpha < 1$, oraz średniej $\overline{X}_n$

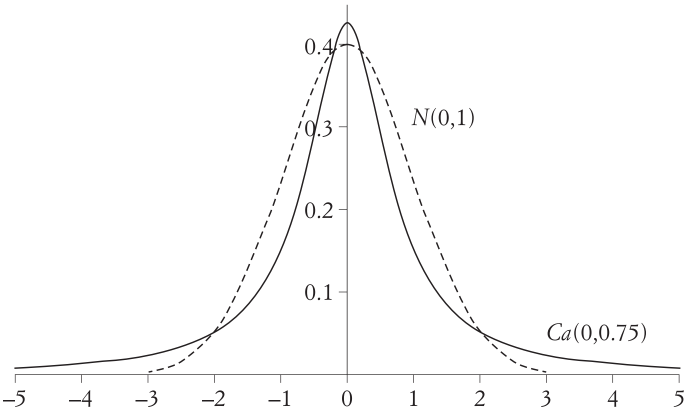
Co więcej, w takich przypadkach obserwacja $X$, a więc także średnia arytmetyczna obserwacji, może w ogóle nie mieć wartości oczekiwanej.

Typowym przedstawicielem rozkładów $\alpha$-stabilnych jest rozkład Cauchy'ego $Ca(\mu, \sigma)$ o gęstości

$$\frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Jest to rozkład $\alpha$-stabilny z parametrem $\alpha = 1$. W pobliżu zera błąd losowy $\varepsilon$ o tym rozkładzie zachowuje się podobnie jak błąd losowy w modelu gaussowskim, ale bardziej tłuste ogony tego rozkładu (Rys. 3) wskazują na wyraźnie większe prawdopodobieństwo błędów dużych. W przypadku rozkładu Cauchy'ego rozkład średniej arytmetycznej z próby $n$-elementowej jest taki sam jak rozkład pojedynczej obserwacji. Wyróżniłem tutaj ten rozkład z powodu jego roli w zastosowaniach: nadaje się do modelowania różnych zjawisk (np. w fizyce znany jest jako rozkład Lorenza lub Breita-Wignera), a jednocześnie jest łatwy numerycznie i w symulacjach.

**4. Prosty model (1) pomiaru z medianą $\mu$.** Rozpatrzmy model pomiaru (1) z rozkładem $F$ błędu $\varepsilon$ o medianie równej zeru. Wtedy obserwacja ma rozkład $F_\mu$ o medianie równej $\mu$: mówimy, że pomiar jest medianowo-nieobciążony.




Rys. 3. Rozkład normalny i rozkład Cauchy'ego

Jeżeli $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jest statystyką z próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i jeżeli $F$ jest rozkładem obserwacji $X$, to medianę rozkładu tej statystyki będziemy oznaczali symbolem $Med(F,T)$. Problem estymacji $\mu$ w modelu pomiaru (1) staje się teraz problemem estymacji mediany rozkładu obserwacji $X$ na podstawie próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Standardowym *estymatorem mediany rozkładu* jest mediana $M_n$ z próby $n$-elementowej definiowana wzorem

$$M_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(X_{\frac{n}{2}:n} + X_{\frac{n}{2}+1:n}\Big), & \text{jeżeli } n \text{ jest parzyste,} \\ X_{\frac{n+1}{2}:n}, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases} \tag{2}$$

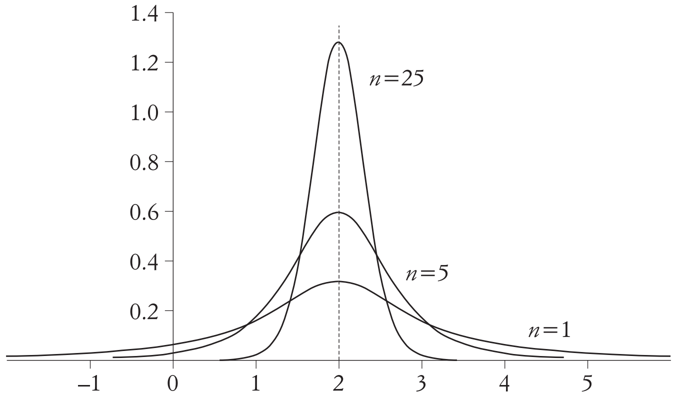
Tu, jak zwykle, $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n} (X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n})$ oznaczają statystyki pozycyjne z tej próby. Będę zajmował się przypadkiem nieparzystego $n$; przypadek estymatora $M_n$, gdy $n$ jest parzyste, jest bardziej złożony niż na pierwszy rzut oka można by się tego spodziewać i skomentuję ten przypadek oddzielnie później.

Jeżeli obserwacje mają rozkład $F_\mu$ z gęstością $f_\mu$, to gęstość rozkładu mediany $M_n$ ma postać

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} \Big(F_\mu(x)\Big[1 - F_\mu(x)\Big]\Big)^{(n-1)/2} f_\mu(x).$$

Wykresy tej gęstości dla $n = 1,\ 5,\ 25$ w przypadku, gdy $\mu = 2$ i rozkład błędu $\varepsilon$ jest rozkładem Cauchy'ego $Ca(0,1)$, przedstawia Rys. 4.

Porównanie Rys. 1 i Rys. 4 wskazuje na to, że mediana w modelu z rozkładem Cauchy'ego spełnia taką samą rolę, jak średnia arytmetyczna w modelu gaussowskim. Mediana w modelu gaussowskim może oczywiście być także traktowana jako estymator parametru $\mu$, chociaż nie jest to w tym modelu estymator tak dobry, jak zwykła średnia arytmetyczna.




Rys. 4. Rozkład mediany $M_n$ w modelu (1) z błędem $\epsilon \sim Ca(0,1)$

Wygodna forma dystrybuanty rozkładu mediany $M_n$ ma postać

$$P_F\{M_n \le x\} = B\left(F(x-\mu); \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), \tag{3}$$

gdzie $B(t;\alpha,\beta)$ jest dystrybuatą rozkładu beta:

$$B(t;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du.$$

Kwantyl rzędu $q \in (0,1)$ tego rozkładu będziemy oznaczali przez $B^{-1}(q;\alpha,\beta)$. Obie te funkcje są łatwo dostępne w standardowych pakietach komputerowych (np. Mathematica, Excel, R, Statgraphics). *Kwantylem* $x_q = x_q(F, M_n)$ rzędu $q$ rozkładu mediany $M_n$ jest wtedy

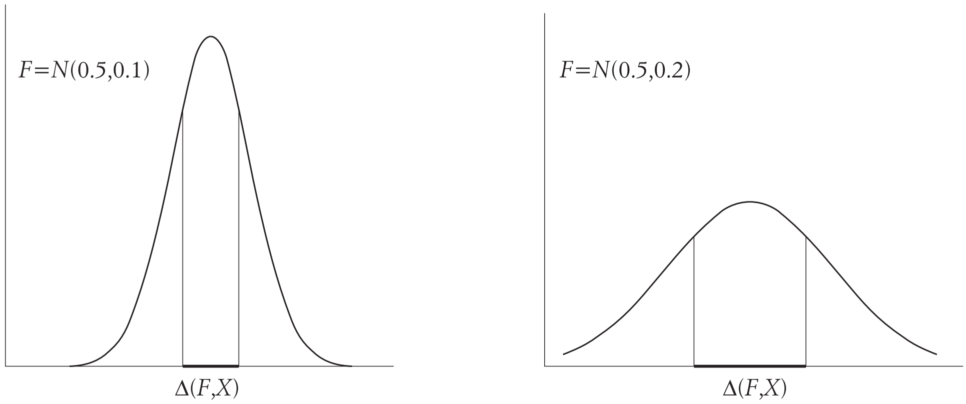
$$x_q = \mu + F^{-1}\left(B^{-1}(q; \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2})\right). \tag{4}$$

Ocena dokładności pomiaru i jej zależności od liczby $n$ powtórzeń za pomocą odchylenia standardowego (jak to miało miejsce w modelu gaussowskim) nie jest teraz możliwa, bo odpowiednie momenty rozkładów w modelu $\alpha$-stabilnym nie istnieją. Odpowiednią miarą dokładności może być teraz rozstęp międzykwartylowy rozkładu estymatora (używana jest również nazwa odległość międzykwartylowa).

Jeżeli statystyka $T_n = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ma rozkład ciągły, to jej kwantyl rzędu $q$ będziemy oznaczali przez $x_q = x_q(F, T_n)$. *Rozstępem międzykwartylowym* rozkładu statystyki $T_n$, gdy obserwacja $X$ ma rozkład $F$, nazywamy wielkość

$$\Delta(F, T_n) = x_{0.75}(F, T_n) - x_{0.25}(F, T_n).$$

Ilustrację graficzną tej wielkości przedstawia Rys. 5, a numeryczną Tab. 1.




Rys. 5. Rozstęp międzykwartylowy rozkładu $F$ zmiennej losowej $X$

Tab. 1. Rozstęp międzykwartylowy $\Delta(F, T_n)$

| $n$ | Rozkład, statystyka | | |
|---|---|---|---|
| | $Ca(0,1), M_n$ | $N(0,1), M_n$ | $N(0,1), \overline{X}_n$ |
| 5 | 0.9455 | 0.7199 | 0.6033 |
| 15 | 0.5472 | 0.4294 | 0.3483 |
| 25 | 0.4239 | 0.3348 | 0.2698 |
| 51 | 0.2968 | 0.2356 | 0.1889 |
| 101 | 0.2108 | 0.1678 | 0.1342 |

Finał procesu estymacji wielkości (parametru) $\mu$ polega oczywiście na podaniu przedziału ufności na zadanym poziomie ufności $\gamma$, co ma nam dać wyobrażenie o wielkości błędu estymatora. W celu zbudowania takiego przedziału wystarczy wyznaczyć kwantyle $x_{\frac{1-\gamma}{2}}$ oraz $x_{\frac{1+\gamma}{2}}$ takie, żeby

$$P_F\{x_{\frac{1-\gamma}{2}} \leq M_n \leq x_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = \gamma.$$

Korzystając z (4) otrzymujemy przedział ufności

$$\text{(5)} \quad \left(M_n - F^{-1}\left(B^{-1}\Big(\frac{1+\gamma}{2}; \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big)\right),\right.$$
$$\left. M_n - F^{-1}\left(B^{-1}\Big(\frac{1-\gamma}{2}; \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big)\right)\right).$$

Gdy $F$ jest rozkładem Cauchy'ego $Ca(0,\sigma)$, to $F^{-1}(t) = \sigma \cdot tg[(t-0.5)\pi]$. W przypadku innych, dowolnych ale ustalonych rozkładów $F$, sprawa może się obliczeniowo komplikować, ale pojawiające się trudności są tylko techniczne. Jeżeli rozkład $F$ błędu jest symetryczny względem zera, to otrzymany przedział ufności jest symetryczny względem zaobserwowanej wartości $M_n$ estymatora mediany.

**5. Złożony model pomiaru z medianą $\mu$.** Rozpatrzmy model pomiaru (1) z nieznanym rozkładem $F \in \mathcal{F}$ błędu $\varepsilon$ o medianie równej zeru. Jeżeli próba $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ma nieparzystą liczbę $n$ elementów, to $M_n$ jest medianowo-nieobciążonym estymatorem mediany $\mu$ obserwacji: wynika to natychmiast z wzoru (3):

$$P_F\{M_n \le \mu\} = B\left(F(0); \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}; \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Jak już wspominałem, przypadkiem parzystej liczby $n$ obserwacji zajmę się oddzielnie.

Przedział (5) jest oczywiście nadal przedziałem ufności dla mediany, ale problem polega na tym, że skoro nie znamy $F$, to z tego wzoru nie mamy wielkiego pożytku. Żeby wyobrazić sobie skalę pojawiających się trudności pomyślmy o $F$ w modelu gaussowskim jako o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym $\sigma$: przedział ufności dla $\mu$ buduje się wtedy z wykorzystaniem rozkładu Studenta, a nie rozkładu normalnego. Trudności pojawiające się wtedy, gdy $\mathcal{F}$ jest rodziną symetrycznych rozkładów $\alpha$-stabilnych, wydają się nie do pokonania na obecnym etapie wiedzy o estymacji parametrów takich rozkładów.

Chociaż może się to wydawać paradoksalne, pewnym wyjściem jest wtedy rozszerzenie rodziny $\mathcal{F}$ nieznanych rozkładów do wielkiej nieparametrycznej rodziny wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuantach. Użyłem tutaj określenia „wielkiej", bo jeżeli rozkład $F$ pewnej zmiennej losowej $X$ należy do tej rodziny i jeżeli $g$ jest ściśle monotonicznym przekształceniem prostej, to rozkład zmiennej losowej $g(X)$ również należy do $\mathcal{F}$. Konstrukcja przedziału ufności dla mediany $\mu_F$ rozkładu $F \in \mathcal{F}$ wymaga teraz jednak zupełnie innego podejścia: przedział ufności przyjmuje postać $(X_{k:n}, X_{n-k+1:n})$, gdzie dla danej liczby $n$, liczbę $k$ wyznacza się jako największą (!) liczbę, dla której przy założonym poziomie ufności $\gamma$

$$P_F\{X_{k:n} \le \mu_F \le X_{n-k+1:n}\} \ge \gamma, \quad \text{dla każdego } F \in \mathcal{F}.$$

Okazuje się to bardzo łatwe: wystarczy pamiętać, że jeżeli zmienna losowa $X$ ma rozkład o dystrybuancie $F \in \mathcal{F}$, to zmienna losowa $Y = F(X)$ ma rozkład jednostajny $U(0,1)$, a zmienna losowa $F(X_{k:n})$ ma taki sam rozkład jak $k$-ta statystyka pozycyjna z $n$-elementowej próby z rozkładu $U(0,1)$.

Mamy więc

$$P_F\{X_{k:n} \le \mu_F \le X_{n-k+1:n}\} = P\{U_{k:n} \le \frac{1}{2} \le U_{n-k+1:n}\}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{s=k}^{n-k} \binom{n}{s},$$

gdzie $P\{\}$ bez żadnego wskaźnika oznacza prawdopodobieństwo w rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Jest to wynik podręcznikowy, a wartości $k$ odpowiednie dla danych $n$ i $\gamma$ można łatwo porachować lub znaleźć w tablicach lub pakietach komputerowych.

**6. Mediana $M_n$ z próby o parzystej liczbie obserwacji $n$.** Rozważam medianę próbkową według definicji (2). Podam dwa wyniki mogące budzić niepokój.

**Pierwszy wynik.** Weźmy pod uwagę efektywność mediany w stosunku do średniej arytmetycznej (średnia arytmetyczna w modelu gaussowskim jest estymatorem nieobciążonym o jednostajnie minimalnej wariancji), zdefiniowaną wzorem

$$e(n) = \frac{Var(\overline{X}_n)}{Var(M_n)}.$$

Poniższa Tab. 2 pokazuje wartości $e(n)$ dla przypadku rozkładu normalnego $N(0,1)$ i jednostajnego $U(0,1)$:

Tab. 2. Efektywność $e(n)$ mediany

| $n$ | $N(0,1)$ | $U(0,1)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 1.000 |
| 2 | 1.000 | 1.000 |
| 3 | 0.743 | 0.556 |
| 4 | 0.838 | 0.625 |
| 5 | 0.697 | 0.467 |
| 6 | 0.776 | 0.519 |
| 7 | 0.679 | 0.429 |
| 8 | 0.743 | 0.469 |
| 9 | 0.669 | 0.407 |
| 10 | 0.723 | 0.440 |

Czyż nie wygląda na paradoks fakt, że zwiększenie liczności próby z $2n$ do $2n+1$ pogarsza efektywność estymatora?

**Drugi wynik.** Niech, jak wyżej, $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich rozkładów o ciągłych i ściśle rosnących dystrybuatach i niech $Med(F,T)$ oznacza medianę rozkładu statystyki $T$, gdy próba pochodzi z rozkładu o dystrybuancie $F$. Niech $m_F = F^{-1}(\frac{1}{2})$ oznacza medianę rozkładu $F \in \mathcal{F}$. Okazuje się, że dla każdej liczby $C > 0$ znajdzie się taki rozkład $F \in \mathcal{F}$, że

$$Med(F, M_{2n}) - m_F > C,$$

co oznacza, że mediana rozkładu estymatora może być dowolnie daleko od estymowanej mediany rozkladu. Praktyczny wniosek jest następujący: jeżeli trafi mi się próba z parzystą liczbą obserwacji, wyrzucam jedną z nich.

**7. Komentarz bibliograficzny.** W artykule nie ma nowych wyników naukowych: oryginalne (tak przypuszczam) jest ujęcie problemu dylematu „średnia arytmetyczna czy mediana" w modelu pomiaru $X = \mu + \varepsilon$. W dyskusji tego modelu przechodzę kolejno przez model gaussowski, model z rozkładami o tłustych ogonach i w końcu model nieparametryczny. Model gaussowski, gdy $\varepsilon \sim N(0, \sigma)$, jest klasyczny i szczegóły estymacji $\mu$ można znaleźć we wszystkich podstawowych podręcznikach statystyki matematycznej. Jest ich dużo i są łatwo dostępne; ja sam najchętniej korzystam z monografii Bartoszewicza (1996), Krzyśki (1996, 1998) oraz Magiery (2005, 2007). Model z rozkładami $\alpha$-stabilnymi jest naturalnym rozszerzeniem modelu gaussowskiego; więcej informacji o tych rozkładach można znaleźć u Magiery (2005), a w kontekście matematyki finansowej u Werona et al. (1998) i Čižeka et al. (2005). Rozkłady $\alpha$-stabilne mają ogony rzędu $x^{-\alpha}$, ale nie muszą być aż tak tłuste po to, żeby mediana dominowała średnią arytmetyczną. Mówi o tym Niemiro (1999); pojawia się to już w przypadku rozkładu Laplace'a z ogonami rzędu $\exp(-x)$ (przypominam, że rozkład normalny ma ogony $\exp(-x^2)$. Tab.2 pochodzi z pracy Hodges et al. (1967), a drugi wynik po raz pierwszy pojawił się w pracy Zieliński (1995), ale w dużo łatwiejszy sposób można go wydedukować z ogólniejszego twierdzenia z pracy Zieliński (2007). Bardziej szczegółowe informacje o kwestiach poruszonych w artykule każdy może sobie sam „wygooglować".

### Prace cytowane


Bartoszewicz, J. (1996): *Wykłady ze statystyki matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN.

Čižek, P., W. H́ardle, R. Weron (2005): *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer.

Hodges, J.L., Jr., and E. L. Lehmann (1967): *On medians and quasi medians*, *JASA* September 1967, pp. 926–931.

Krzyśko, M. (1996, 1998): *Statystyka matematyczna*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Tom I 1996, Tom II 1998.

Magiera, R. (2005, 2007): *Modele i metody statystyki matematycznej*, Oficyna Wydawnicza GiS Wrocław. Część I 2005, Część II 2007.

Niemiro, W. (1999): *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Biblioteka Szkoły Nauk Ścisłych.
Weron, A., R. Weron (1998): *Inżynieria finansowa*, WNT.
Zieliński, R. (1995): *Estimating median and other quantiles in nonparametric models*, Applicationes Mathemticae 23,3, pp. 363–370.
Zieliński, R. (2007): *A sharp inequality for medians of L-statistics in a nonparametric statistical model*, Journal of the Iranian Statistical Society, Vol. 6, No. 2, pp. 173–177.

Ryszard Zieliński
Instytut Matematyczny PAN
Warszawa. Poland
E-mail: R.Zielinski@impan.gov.pl

---

**The arithmetic mean and the median**

**Abstract.** Beginning with the statistical model $X_i = \mu + \varepsilon_i, i = 1, 2, \ldots, n$, $\mu$ – an unknown constant to be estimated and $\varepsilon_i$ independent identically distributed $N(0, \sigma^2)$ random variables, models with heavy tails ($\alpha$-stable) distributions as well as nonparametric models are discussed. Confidence intervals for $\mu$ are presented.
**Keywords:** measurement, arithmetic mean, median, estimating location, spread.

*(wpłynęło 13 lutego 2010 r.)*