

Przykładowe zadania z analizy matematycznej II. Część I.

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego:

1. $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ dla $0 < x \leq 1$;
2. $f_n(x) = \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}$ dla $x \geq 0$;
3. $f_n(x) = \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}$ dla $x \geq 0$;
4. $f_n(x) = (x - 1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^n$;
5. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}$;
6. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n}$ dla $x \geq 0$.

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność punktową (warunkową i bezwzględną) szeregów funkcyjnych:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność jednostajną szeregów funkcyjnych:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ na $[-1, 1]$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ na $[-1, 1]$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ na $(-2, +\infty)$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$ na $[0, +\infty)$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}$ na \mathbb{R} ;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}$ na \mathbb{R} .

Zadanie 4. Zbadać ciągłość funkcji:

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$;
2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$.

Zadanie 5. Znaleźć granice:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$;

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}.$$

Zadanie 6. Znaleźć $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ i $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ jeśli:

$$1. a_n = \frac{2n^2}{7} - \left[\frac{2n^2}{7} \right];$$

$$2. a_n = \frac{n-1}{n+2} \cos \frac{n\pi}{3};$$

$$3. a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}};$$

$$4. a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Zadanie 7. Wyznaczyć promień zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego i zbadać zbieżność na krańcach przedziału zbieżności:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n;$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n \quad (a > 0, b > 0);$$

$$4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+2 \cos \frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} x^n.$$

Zadanie 8. Znaleźć sumę szeregu potęgowego:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^n;$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)x^{2n}.$$

Zadanie 9. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcje:

$$1. \frac{12-5x}{6-5x-x^2};$$

$$2. \frac{x}{(1-x)(1-x^2)};$$

$$3. \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}};$$

$$4. \sin^2 x;$$

$$5. \sin^3 x.$$

Zadanie 10. Rozwinąć w szereg Taylora funkcje:

$$1. \ln x \text{ w otoczeniu punktu } x_0 = 1;$$

$$2. \sqrt{x^3} \text{ w otoczeniu punktu } x_0 = 1;$$

$$3. \frac{1}{x} \text{ w otoczeniu punktu } x_0 = 1;$$

$$4. \frac{1}{x} \text{ w otoczeniu punktu } x_0 = 3.$$