

Przykładowe zadania z analizy matematycznej II. Część II.

Zadanie 11. Znaleźć całki nieoznaczone:

1. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$;
2. $\int \frac{(1-x) dx}{1-\sqrt[3]{x}}$;
3. $\int \frac{(2^x-5^x) dx}{10^x}$;
4. $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x}$;
5. $\int e^{ax} \sin x dx$;
6. $\int x^a \ln x dx$;
7. $\int (x+1) \sin(x^2+2x+2) dx$;
8. $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{100}}$;
9. $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx$;
10. $\int x^3 e^{x^2} dx$;
11. $\int \frac{5 \sin x dx}{3-2 \cos x}$;
12. $\int \frac{(x+2) dx}{x(x-2)}$;
13. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;
14. $\int \frac{(3x-1) dx}{x^2-x+1}$;
15. $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} dx$;
16. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$;
17. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$;
18. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x} dx$;
19. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}$;
20. $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$;
21. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$;
22. $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$;
23. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$;
24. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} dx$;
25. $\int \sqrt{x^2-36} dx$.

Zadanie 12. Oblicz całki oznaczone:

1. $\int_0^1 x \sqrt{1+x} dx$;

2. $\int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx;$
3. $\int_0^{\frac{1}{2} \ln 3} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx;$
4. $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx;$
5. $\int_{\frac{1}{e}}^2 (x-1) \operatorname{sgn}(\ln x) dx;$
6. $\int_{-2}^2 ||x| - 1| dx;$
7. $\int_0^4 \frac{|x-1| dx}{|x-2|+|x-3|};$
8. $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin x + \frac{1}{2} \right| dx;$
9. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx;$
10. $\int_{-1}^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{3-x^2}};$
11. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx.$

Zadanie 13. Wykazać, że spełnione są równości:

1. $\int_{-1}^1 \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right) dx = 0;$
2. $\int_{-1}^1 e^{\cos x} dx = 2 \int_{-1}^0 e^{\cos x} dx;$
3. $\int_0^1 x^5 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f(x) dx,$ gdzie f jest funkcją ciągłą na $[0, 1];$
4. $\int_0^n (x - [x]) dx = n \int_0^1 (x - [x]) dx,$ gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą z x i $n \in \mathbb{N}.$

Zadanie 14. Oblicz wartości średnie podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

1. $f(x) = x^2$ na $[0, 1];$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ na $[0, 100];$
3. $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ na $[0, 2\pi].$

Zadanie 15 Oszacować podane całki:

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x};$
2. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$

Zadanie 16. Oblicz granice:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctg x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx}.$$

Zadanie 17. Oblicz pochodne:

$$1. \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$2. \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

$$3. \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

Zadanie 18. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu i całkowaniu szeregów potęgowych oblicz:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n5^n};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \cdot \frac{3^n}{4^n}.$$