

Przykładowe zadania z analizy matematycznej II. Część III.

Zadanie 19. Oblicz granice:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}};$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right);$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4n} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{4n} + \dots + \operatorname{tg} \frac{n\pi}{4n} \right).$

Zadanie 20. Znaleźć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

1. $ax = y^2, ay = x^2;$
2. $y = x^2, x + y = 2;$
3. $y = 2^x, y = 2, x = 0;$
4. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (cissoida);
5. $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3;$
6. $x = a(2 \cos t - \cos 2t), y = a(2 \sin t - \sin 2t);$
7. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (kardioida);
8. $r = 3 + 2 \cos \varphi.$

Zadanie 21. Zamienić na zmienne biegunowe i obliczyć pole figury:

1. $x^3 + y^3 = 3axy$ (liść Dekarta);
2. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$

Zadanie 22. Znaleźć długość łuku krzywych:

1. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y;$
2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$
3. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);
4. $r = a(1 + \cos \varphi).$

Zadanie 23. Znaleźć objętość brył ograniczonych powierzchniami:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = \frac{c}{a}x, z = 0;$
2. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2.$

Zadanie 24. Znaleźć objętość brył powstałych w wyniku obrotu figury:

1. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ ($0 \leq x \leq a$) wokół osi Ox ;
2. $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) wokół osi Oy ;
3. $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) wokół osi polarnej.

Zadanie 25. Znaleźć powierzchnię brył powstałych w wyniku obrotu figury:

1. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$) wokół osi Ox ;
2. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ wokół osi Ox ;
3. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ wokół polarnej osi.