Egzamin z analizy matematycznej III. Zestaw A. 3 II 2023.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zadanie 2. Zbadać, czy zbiór

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 2\}$$

jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p,S)$ i $N(p,S)$, gdzie $p = (1,0,1)$.

Zadanie 3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = -x^4 - y^4 + 4x^2 + 8xy + 4y^2 - 5 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^2.$$

Zadanie 4. Rozwinąć w szereg MacLaurina funkcję $f(x,y) = \sin(3x - 2y)$.

Zadanie 5. Obliczyć całkę

$$\iint_D 2x - y \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczone trzema krzywymi $y = x^2$, $y = 3x$ i $y = x$.

Zadanie 6. Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i α obliczyć

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2} + x^2 y \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony krzywymi $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = -x$ $(y \geqslant 0)$.

Zadanie 7. Wykazać, że podana całka krzywoliniowa zorientowana

$$\int_\gamma (3x^2y^2 + e^{2x}) \, dx + (2x^3y + 4y^3) \, dy,$$

gdzie γ — krzywa o początku $A = (0,3)$ i końcu $B = (1,1)$, nie zależy od kształtu krzywej całkowania, znaleźć potencjał pola wektorowego które całkujemy oraz obliczyć podaną całkę.

Zadanie 8. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\iint_\Sigma 3z^2 \, dS,$$

gdzie Σ jest sferą o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Egzamin z analizy matematycznej III. Zestaw B. 3 II 2023.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3 \sin y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zadanie 2. Zbadać, czy zbiór

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 = 1, \; x + y + z = 3\}$$

jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p,S)$ i $N(p,S)$, gdzie $p = (0,2,1)$.

Zadanie 3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2 - 8xy - 4y^2 + 3 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^2.$$

Zadanie 4. Rozwinąć w szereg MacLaurina funkcję $f(x,y) = \cos(2x - 3y)$.

Zadanie 5. Obliczyć całkę

$$\iint_D x + 2y \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczone trzema krzywymi $y = x^2$, $y = 2x$ i $y = x$.

Zadanie 6. Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i α obliczyć

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} + xy^2 \, dx \, dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony krzywymi $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = -x$ $(y \leqslant 0)$.

Zadanie 7. Wykazać, że podana całka krzywoliniowa zorientowana

$$\int_\gamma (2xy^3 + 8x) \, dx + (3x^2y^2 + 6y^2) \, dy,$$

gdzie γ — krzywa o początku $A = (1,0)$ i końcu $B = (3,1)$, nie zależy od kształtu krzywej całkowania, znaleźć potencjał pola wektorowego które całkujemy oraz obliczyć podaną całkę.

Zadanie 8. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\iint_\Sigma 2z^2 \, dS,$$

gdzie Σ jest sferą o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.