

Analiza matematyczna III. Zakres podstawowy na egzamin ustny

1. Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^n i n -wymiarowa przestrzeń Euklidesowa. Iloczyn skalarny i norma euklidesowa
2. Metryka i norma euklidesowa w \mathbb{R}^n , kule otwarte i domknięte w \mathbb{R}^n , zbiory otwarte i domknięte w \mathbb{R}^n .
3. Zbieżność ciągów w \mathbb{R}^n . Charakteryzacja ciągów zbieżnych w \mathbb{R}^n do x_0 .
4. Granica odwzorowania i ciągłość funkcji w \mathbb{R}^n (w sensie Cauchy'ego i Heinego). Własności funkcji ciągłych
5. Pochodne kierunkowe i cząstkowe funkcji. Przykłady.
6. Definicja odwzorowania liniowego i różniczki odwzorowania. Pojęcie gradientu funkcji, macierzy Jacobiego i jacobianu odwzorowania. Przykłady.
7. Związek pomiędzy różniczką odwzorowania a pochodnymi kierunkowymi i cząstkowymi (Stwierdzenie 12 i Twierdzenie 4).
8. Twierdzenie o pochodnej odwzorowania dwuliniowego (Twierdzenie 5) i o różnicce złożenia (Twierdzenie 6) wraz z przykładami.
9. Twierdzenia o wartości średniej dla funkcji i odwzorowań (Twierdzenia 7 i 8).
10. Twierdzenie o funkcji odwrotnej (Twierdzenie 10). Wzór na różniczkę funkcji odwrotnej.
11. Definicja dyfeomorfizmu. Przykłady.
12. Definicja płatu k -wymiarowego, rozmaitości k -wymiarowej, mapy rozmaitości i atlasu. Przykłady.
13. Definicja wektora stycznego i twierdzenie o przestrzeni stycznej do rozmaitości (Twierdzenie 11).
14. Twierdzenie o funkcji uwikłanej (Twierdzenie 12). Przykłady.
15. Twierdzenie o rozmaitości M o równania $F(x) = 0$ (Twierdzenie 13). Definicja wektorów normalnych do rozmaitości M w x_0 i wzór na znalezienie przestrzeni wektorów normalnych i stycznych do M w x_0 .
16. Ekstrema lokalne funkcji. Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego (Twierdzenie 14) wraz z dowodem.
17. Twierdzenie o mnożnikach Lagrange'a (Twierdzenie 15). Przykłady stosowania.
18. Definicja pochodnych cząstkowych i różniczek wyższego rzędu. Przykłady.
19. Odwzorowania symetryczne, macierz Hessego, twierdzenie Schwarz'a o symetrii drugiej różniczki (Twierdzenie 18) i jego uogólnienie na k -te różniczki (Twierdzenie 19).
20. Dodatnia i ujemna określoność formy kwadratowej — definicja, kryteria. Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego (Twierdzenie 21 i 22).
21. Wzór Taylora dla funkcji (Twierdzenie 23) wraz z dowodem i wzór Taylora dla odwzorowań (Twierdzenie 24). Przykłady stosowania.
22. Podział przedziału, objętość przedziału, sumy dolne i górne, konstrukcja całki z funkcji na przedziale w \mathbb{R}^n , przykłady całek policzonych z definicji.
23. Funkcje całkowalne, kryteria całkowalności funkcji (Twierdzenie 25 i 31), przykłady.
24. Zbiory miary zero i objętości zero — definicje, przykłady, zależności między nimi.
25. Wahanie funkcji i jej związek z ciągłością.
26. Funkcje charakterystyczne zbioru, całki po dowolnych zbiorach, zbiory mierzalne w sensie Jordana, objętości zbiorów.
27. Całki dolne i górne, twierdzenie Fubini'ego i przykłady jego stosowania.
28. Twierdzenie o zamianie zmiennych w całkach (Twierdzenie 37) i jego zastosowanie przy zamianie zmiennych na zmienne biegunowe i sferyczne.
29. Całki krzywoliniowe niezorientowane i zorientowane — definicje, jak obliczać, przykłady.

30. Twierdzenie Greena (Twierdzenie 39) i jego zastosowania.
31. Pole potencjalne i jego własności, obliczanie całek z potencjalnego pola wektorowego, warunek konieczny i wystarczający potencjalności pola.
32. Wyznacznik Grama i jego interpretacja geometryczna, definicja nieorientowanej całki na rozmaitości, przykłady.
33. Orientacja przestrzeni linowej i orientacja rozmaitości, rozmaitości orientowalne, przykłady.
34. Całka zorientowana z pola wektorowego na rozmaitości, w tym w szczególności całka powierzchniowa zorientowana, przykłady, rotacja i dywergencja pola wektorowego.

Analiza matematyczna III. Zakres dodatkowy na egzamin ustny — na ocenę powyżej dobrej.

- 1*. Dowód nierówności Schwarz'a (Twierdzenie 1).
- 2*. Dowód twierdzenia o różnicce złożenia (Twierdzenie 6).
- 3*. Dowody twierdzenia o wartości średniej dla funkcji (Twierdzenie 7) i twierdzenia o wartości średniej dla odwzorowań (Twierdzenie 8).
- 4*. Dowód warunku wystarczającego istnienia ekstremum (Twierdzenie 21).
- 5*. Dowód twierdzenia Fubini'ego (Twierdzenie 33).
- 6*. Dowód twierdzenia Greena (Twierdzenie 39).
- 7*. Dowód warunku koniecznego i dostatecznego potencjalności pola na płaszczyźnie (Twierdzenie 19).