

Egzamin pisemny z analizy matematycznej IV. Zestaw A. 22 VI 2026.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. Opisz σ -ciało w $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ generowane przez rodzinę złożoną z $A = \{2\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Z ilu składa się ono zbiorów? Jak by się zmieniła sytuacja, gdyby dodać jeszcze zbiór $D = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$?

Zadanie 2. Oblicz tłumacząc wszystkie kroki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 + x^{2n})^{-\frac{1}{n}} d\lambda_1(x).$$

Zadanie 3. Dla danej 2-formy $\eta = 2y dy \wedge dz$ i 2-komórki $c: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ danej wzorem $c(u, v) = (v, u, uv)$:

- Pokaż, że 2-forma η jest dokładna i znajdź 1-formę ω taką, że $d\omega = \eta$.
- Znajdź 1-łańcuch ∂c .
- Sprawdź poprzez bezpośredni rachunek, że jest spełnione twierdzenie Stokesa $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$.

Zadanie 4. Obliczyć całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\int_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2) d\mu_S,$$

gdzie Σ jest płatem opisanym przez warunki $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, $0 \leq x \leq 2$.

Zadanie 5. Korzystając z twierdzenia Gaussa oblicz całkę powierzchniową zorientowaną

$$\int_\Sigma xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + xz dx \wedge dy,$$

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną czworościanu ograniczonego płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 3$.

Zadanie 6. Załóżmy, że pola wektorowe $F, G: V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ są różniczkowalne w sposób ciągły na obszarze $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Wykaż, że zachodzi wzór

$$\operatorname{div} (F \times G) = G \circ \operatorname{rot} F - F \circ \operatorname{rot} G.$$

Egzamin pisemny z analizy matematycznej IV. Zestaw B. 22 VI 2026.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. Opisz σ -ciało w $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ generowane przez rodzinę złożoną z $A = \{1\}$, $B = \{1, 3\}$ i $C = \{1, 3, 5, 7\}$. Z ilu składa się ono zbiorów? Jak by się zmieniła sytuacja, gdyby dodać jeszcze zbiór $D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$?

Zadanie 2. Oblicz tłumacząc wszystkie kroki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{n}{\sqrt{x} \ln(x^n + 2^n)} d\lambda_1(x).$$

Zadanie 3. Dla danej 2-formy $\eta = 2z dy \wedge dz$ i 2-komórki $c: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ danej wzorem $c(u, v) = (u, v, uv)$:

- Pokaż, że 2-forma η jest dokładna i znajdź 1-formę ω taką, że $d\omega = \eta$.
- Znajdź 1-łańcuch ∂c .
- Sprawdź poprzez bezpośredni rachunek, że jest spełnione twierdzenie Stokesa $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$.

Zadanie 4. Obliczyć całkę powierzchniową nieorientowaną

$$\int_\Sigma \frac{1}{x^2 + y^2} d\mu_S,$$

gdzie Σ jest płatem opisanym przez warunki $x^2 + y^2 = 4$, $1 \leq z \leq 2$.

Zadanie 5. Korzystając z twierdzenia Gaussa oblicz całkę powierzchniową zorientowaną

$$\int_\Sigma (x + y)^2 dy \wedge dz + (y + z)^2 dz \wedge dx + (z + x)^2 dx \wedge dy,$$

gdzie Σ jest zewnętrzną stroną sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Zadanie 6. Załóżmy, że funkcja f ma gradient na obszarze $V \subseteq \mathbb{R}^3$ i pole wektorowe $F: V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest różniczkowalne na tym obszarze. Wykaż, że zachodzi wzór:

$$\operatorname{rot}(fF) = (\operatorname{grad} f) \times F + f \operatorname{rot} F.$$